LEHRBUCH DER DARSTELLENDEN GEOMETRIE

IN ZWEI BÄNDEN

VON

DR. GEORG SCHEFFERS
O PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE BERLIN

ERSTER BAND

ZWEITE, DURCHGESEHENE AUFLAGE
(MANULDRUCK)

MIT 404 TEXTFIGUREN

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER

Vorwort zur ersten Auflage.

Dies Lehrbuch, das aus zwei Bänden bestehen soll, ist für Studierende auf technischen Hochschulen und Universitäten bestimmt und setzt an Vorkenntnissen nur die Schulmathematik voraus. Da die Raumgeometrie an manchen höheren Schulen immer noch mangelhaft gelehrt wird, weil viele Mathematiklehrer nicht imstande sind, richtige Zeichnungen von räumlichen Gebilden zu entwerfen, habe ich nur das Allereinfachste aus der Raumgeometrie als bekannt angenommen. In der Tat ist die darstellende Geometrie selbst die beste Schule der Stereometrie. An unseren Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen sollte die Raumgeometrie immer nur in engster Verbindung mit den Grundlagen der darstellenden Geometrie gelehrt werden; leider aber sind wir in Deutschland — abgesehen von rühmlichen Ausnahmen — noch nicht so weit. Dies liegt meiner Ansicht nach zum Teil mit daran, daß man glaubt, die darstellende Geometrie bedürfe unbedingt des Zweitafelsystems, das dem Anfänger allerdings Schwierigkeiten bereitet. Ich halte es für zweckmäßiger, mit der senkrechten Projektion auf nur eine Tafel zu beginnen und bei ihr ziemlich lange zu verweilen.

Dadurch unterscheidet sich dies Lehrbuch wesentlich von den vortrefflichen Lehrbüchern von Wiener, Rohn und Papperitz und Emil Müller und von dem kurzen, aber inhaltreichen Leitfaden von Reinhold Müller. Dieser Unterschied ist es, aus dem ich die Daseinsberechtigung für mein Werk ableite. Ob der von mir eingeschlagene Weg richtig ist, darüber werden die Meinungen geteilt sein, aber mancher wird ihn dem gebräuchlichen Weg vorziehen. Auch ist es nicht Sucht nach Besonderem, die mich veranlaßt hat, so vorzugehen. Schon in Vorlesungen, die ich in den neunziger Jahren des verflossenen Jahrhunderts als Privatdozent an der Universität Leipzig hielt, schlug ich denselben Weg ein, und ich bin nach mancherlei anderen Versuchen immer wieder darauf zurückgekommen. Im übrigen widerstrebt es mir aber, ausführlich Ansichten darüber zu entwickeln, wie die darstellende Geometrie gelehrt werden sollte. Denn die Hauptsache ist doch immer die Begabung des Lehrers selbst, und pädagogische Auseinandersetzungen haben für solche, denen die Begabung fehlt, wenig Wert, während die andern darin etwas Aufdringliches finden können. Nur eine Ansicht möge man mir erlauben auszusprechen: Vom wissenschaftlichen Standpunkt aus wäre es vielleicht richtiger, zuerst bloß Lagenbeziehungen und erst dann metrische Beziehungen ins Auge zu fassen. Aber die peinliche Berücksichtigung der Maße wirkt, wenn sie möglichst frühzeitig beginnt, außerordentlich erzieherisch, indem sie die Gewissenhaftigkeit des Zeichners weckt und schärft. Deshalb stelle ich das Metrische soviel wie möglich voran.

Wenn nach der Entwicklung der Grundbegriffe für die senkrechte Projektion auf eine Tafel sogleich zur Herstellung von Dächern,

Böschungen und Sonnenuhren übergegangen wird, geschieht dies keineswegs, um so zu tun, als ob die Anwendungen vor die Theorie gesetzt werden sollten, sondern nur deshalb, weil diese Beispiele gestatten, in anschaulicher Weise das Legen von Ebenen durch gegebene Geraden unter gegebenen Winkeln und die Ermittlung ihrer Schnitte zu erläutern. Nebenbei gesagt, glaube ich, daß dies Beispiele sind, die sich besonders gut für die Einführung in die darstellende Geometrie an den höheren Schulen eignen, da sie ohne weiteres Teilnahme erwecken.

Bezüglich der Verteilung des Stoffes sei bemerkt, daß der erste Band die senkrechte und schiefe Parallelprojektion auf eine oder mehrere Tafeln in einer gewissen Abrundung darbietet, nämlich insoweit, als es sich um die Gebilde Punkt, Gerade, Ebene, Kreis, Kugel, Zylinder und Kegel und ihre Schnitte und Verbindungen handelt. Der zweite Band wird mit der Auseinandersetzung der Perspektive oder Zentralprojektion beginnen und dann das, was der erste Band bringt, insbesondere durch die Darstellung der wichtigeren krummen Linien und Flächen vervollständigen. Die Lehre von den Kegelschnitten wird dann von neuem, in enger Verbindung mit der Perspektive, entwickelt werden; im vorliegenden ersten Band wird sie so weit gefördert, daß man einsieht, daß die ebenen Schnitte allgemeiner Kreiskegel auch durch den Schnitt von Rotationskegeln mit Ebenen erzeugt werden können.

Im großen ganzen deckt sich die Darstellung in diesem Lehrbuch mit meinen Vorträgen an der Technischen Hochschule. Aber jedermann weiß, daß man im Vortrag nicht immer so wie in einem Buch vorgehen kann. Auch erschien es mir richtig, in das Buch verschiedene Sachen mit aufzunehmen, die im Vortrag aus Mangel an Zeit und aus anderen Gründen übergangen werden müssen. Hierher gehört, um nur eines zu nennen, die Lehre von den Involutionen, die nicht nur für den Mathematiker, sondern auch für den Techniker, insbesondere den Bauingenieur, gelegentlich von Bedeutung ist. Ich hatte eben den Wunsch, das Lehrbuch so auszugestalten, daß es nicht nur für das augenblickliche Bedürfnis des Hochschulunterrichts dienen soll, sondern auch darüber hinaus ein Ratgeber für spätere Zeiten bleiben kann. Durch Hinweise an den betreffenden Stellen ist dafür gesorgt worden, daß einzelne Nummern oder ganze Paragraphen beim ersten Durcharbeiten überschlagen werden können. Daß das Lehrbuch an einigen Stellen Neues oder wenig Bekanntes bringt, wird der Fachmann herausfinden.

Die Abbildungen zusammen mit ihrer Beschriftung rühren von mir selbst her; das Verlagshaus hat sie auf mechanischem Wege wiedergegeben. Wenn also an den Figuren Mangel bemerkt werden, trifft die Schuld nur den Verfasser. Das Verlagshaus hat, wie ich dankbar anerkenne, alles getan, um diesen Band auf das beste auszustatten.

Berlin-Dahlem, im Juli 1919.

Georg Scheffers.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Mit den Büchern verhält es sich wie mit den Menschen: solange sie noch in den Kinderjahren sind, werden ihre zweifellos vorhandenen erheblicheren Untugenden von ihren Erzeugern noch nicht wahrgenommen Ich habe mich also damit begnügen müssen, dies Buch, das noch keine drei Jahre alt ist, im Text und in den Abbildungen von kleinen Schönheitsfehlern zu reinigen. Da sich dadurch nichts in der Einteilung des Stoffes geändert hat, gelten die Hinweise des zweiten Bandes (1920) auf den ersten auch für diese neue Auflage Auf Seite X gebe ich einige Verbesserungen zum zweiten Bande an, außer den dort schon auf Seite VIII angeführten

Berlin-Dahlem, im April 1922

Georg Scheffers.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung.

Erstes Kapitel: Senkrechte Projektion auf eine Tafel.

Zweites Kapitel: Parallelprojektion auf eine Tafel.

[1]) Die mit Sternchen versehenen Nummern sind überschlagbar.

[1]) Vgl. die Bemerkung am Fuß der Seite 228.

Berichtigungen zum zweiten Band (1920).

Seite 22, 23 fehlt in Fig 434 und Fig. 435 eine Traufe im Aufrisse des Gebaudes.
„ 39, Zeile 25 von unten lies: Bucher statt· Bilder
„ 39, „ 15 von unten lies. Loria.
„ 167, „ 9 von oben ist das Wortchen· nach vor. derselbe einzuschalten
„ 250, „ 26 von unten lies flach statt: steil.
„ 250, „ 8 und 7 von unten Hier liegt ein Versehen vor, die Fallinien sind im allgemeinen gar nicht kurzeste Linien, vielmehr nur dann, wenn die Flache eine Gesimsflache (Nr 500 u. 502) ist
„ 382, „ 12 von unten lies sein statt ihr
„ 383, „ 7 von oben lies geht statt: gehen
„ 411, „ 11 von unten lies benutze statt benutzte

Einleitung.

1. Aufgabe der darstellenden Geometrie. Die darstellende Geometrie lehrt, wie man die Gegenstande auf die Ebene des Zeichenblattes abbildet, indem sie dabei nur auf die geometrischen Eigenschaften der Gegenstande Rucksicht nimmt Um ein geometrisches Gebilde herzustellen oder auch nur auszudenken, muß man gewisse geometrische Verfahren anwenden, z B Punkte durch Geraden oder Ebenen verbinden, Geraden oder Ebenen schneiden, Lote fallen u dgl m Deshalb soll die Zeichnung auch diese im Raume stattfindenden Vorgange auf der Ebene des Zeichenblattes wiedergeben

Da der Raum drei Dimensionen, Lange, Breite und Hohe, hat, dagegen der Zeichenebene nur zwei Dimensionen, Lange und Breite, zukommen, muß das Bild eines raumlichen Gegenstandes oder raumlichen Vorganges immer Verzerrungen aufweisen Trotzdem soll die Zeichnung dem Beschauer eine richtige Vorstellung von dem Dargestellten vermitteln, allerdings nicht jedem ungeubten Beschauer, sondern dem Kenner Die Zeichnung soll dem Kenner die Gegenstande im Raume, soweit es sich nur um ihre geometrischen Eigenschaften handelt, vollkommen ersetzen, und man soll imstande sein, jeden geometrischen Vorgang im Raum durch ein geometrisches Verfahren auf der Ebene des Zeichenblattes wiederzugeben *Daher besteht die Aufgabe der darstellenden Geometrie letzten Endes darin, den dreidimensionalen Raum mittels zweckmaßiger Vorkehrungen durch die nur zweidimensionale Ebene zu ersetzen*

Geometrische Zeichnungen sind etwas anderes als kunstlerische und technische Zeichnungen Eine *kunstlerische Zeichnung* will im Beschauer, auch wenn er kein Kenner ist, unmittelbar einen Begriff vom Dargestellten erwecken *Technische Zeichnungen* sind solche geometrische Zeichnungen, die durch Schrift, Zahlen und Farben auch alle diejenigen Angaben aufweisen, wodurch die Stoffe, aus denen die gezeichneten Gegenstande bestehen, hinreichend beschrieben werden Der Techniker bedarf daher der darstellenden Geometrie als wesentlicher Grundlage fur den Entwurf seiner Zeichnungen. Aber auch der Kunstler, gerade die großten Maler legten ihren Gemalden sorgfaltige geometrische Zeichnungen zugrunde

In kunstlerischen Zeichnungen spielt die Beleuchtung selbstverständlich eine große Rolle. Auch technische Zeichnungen werden dadurch, daß man auf ihnen Licht und Schatten angibt, anschaulicher und lesbarer Bis zu einem gewissen Maße ist nun die Bestimmung von Licht und Schatten eine rein geometrische Aufgabe. Deshalb rechnet man zu den geometrischen Eigenschaften der Gegenstande auch die bei

Beleuchtung auf sie fallenden Lichter und Schatten. Die Aufgabe der darstellenden Geometrie erweitert sich darum noch insofern, als sie auch lehren soll, wie man die Beleuchtung der Gegenstände ermittelt.

Andererseits werden die Forderungen, die man an die darstellende Geometrie stellt, zuweilen verringert. Es kommt nämlich vor, daß nur auf gewisse geometrische Eigenschaften der Gegenstände Bedacht zu nehmen ist, während die übrigen für den gerade verfolgten Zweck Nebensache sind. In solchen Fällen genügt es, von der geometrischen Zeichnung zu fordern, daß man aus ihr bloß jene in Betracht kommenden Eigenschaften der dargestellten Gebilde ablesen könne.

Das Erlernen der darstellenden Geometrie weckt und fördert die Fähigkeit, sich räumliche geometrische Gebilde und Vorgänge vorzustellen, eine Fähigkeit, die sonst gerade dadurch, daß man nicht im Raum, sondern immer bloß auf Flächen zeichnen kann, verkümmert.

2. Über die Geschichte der darstellenden Geometrie. Die Erfindung des Zeichnens ist älter als die des Schreibens, die Anfänge der darstellenden Geometrie sind deshalb uralt. Gewaltige Bauwerke aus alten Zeiten lassen keinen Zweifel darüber, daß ihre Schöpfer mancherlei Kenntnisse in der darstellenden Geometrie gehabt haben. Aber nur Spärliches ist uns überliefert. Einzelheiten aus der darstellenden Geometrie sind erst seit dem Zeitalter des Wiederauflebens der Wissenschaften schriftlich niedergelegt worden. Es erscheint nicht zweckmäßig, hier vorweg darauf einzugehen, da es doch erst dem Kenner verständlich sein kann. Geschichtliche Anmerkungen werden an geeigneten Stellen gebracht werden.

Die darstellende Geometrie fand ihre Ausbildung als Wissenschaft zunächst namentlich in Italien, dann in Frankreich und Deutschland. Die Franzosen räumten ihr zuerst eine besondere Stelle im Unterrichte ein und kennzeichneten sie dabei als deskriptive oder beschreibende Geometrie (Gründung der Ecole normale und Ecole polytechnique zu Paris 1794/95). Man nennt die darstellende Geometrie auch Projektionslehre (d. h. Lehre vom Entwerfen der Bilder), einzelne Teile heißen die Lehre von der Orthogonalprojektion oder senkrechten Projektion, von der Parallelprojektion und von der Zentralprojektion oder Perspektive. Diese Namen werden später erklärt werden.

Anmerkung. Noel Germinal Poudra (geb. 1794 zu Paris, französischer Stabsoffizier) schrieb eine „Histoire de la perspective ancienne et moderne, contenant l'analyse d'un très-grand nombre d'ouvrages sur la perspective et la description des procédés divers qu'on y trouve", Paris 1864. Sie bietet keine zusammenhängende Darstellung und läßt viel vermissen. Ergänzt wurde sie durch Luigi Cremona (geb. 1830 zu Pavia, Förderer der Flächentheorie und graphischen Statik, gest. als Leiter der Ingenieurschule zu Rom 1903) in dem Aufsatz „Sulla storia della prospettiva antica e moderna", Rivista italiana di scienze, lettere ed arti, 5. Bd. 1865, S. 226—231, 241—245, und durch Pietro Riccardi (geb. 1828 zu Modena, wo er 1898 als Professor an der Ingenieurschule starb) in dem Aufsatz „Di alcune opere di autori italiani ommesse nella Histoire de la perspective di M. Poudra", Bibliotheca mathem. 1889, S. 39—42. Das „Lehrbuch der darstellenden Geometrie" von Christian Wiener (geb. 1826 zu Darmstadt, gest. 1896 als Professor an der technischen Hochschule Karlsruhe), 2 Bände, Leipzig 1884, 1887, enthält im 1. Bd. S. 5—61 eine Geschichte der darstellenden Geometrie. Sie verdient den Vorzug gegenüber dem zwar reichhaltigen, aber unzuverlässigen und unübersichtlichen Buche von

Ferdinand Josef Obenrauch (geb 1853 in Austerlitz, Privatdozent an der techn. Hochschule Brunn, gest. ebenda 1906) „Geschichte der darstellenden und projektiven Geometrie mit besonderer Berucksichtigung ihrer Begrundung in Frankreich und Deutschland und ihrer wissenschaftlichen Pflege in Österreich", Brunn 1897. Außerdem seien genannt: Erwin Papperitz (geb 1857 zu Dresden, Professor an der Bergakademie Freiberg i. S.) im Abschnitt AB 6 des Bandes III der „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften", Leipzig 1910, S. 517—595, und Gino Loria (geb 1862 zu Mantua, Professor an der Universitat Genua), „Storia della geometria descrittiva dalle origini sino ai giorni nostri", Mailand 1921

3. Die technischen Hilfsmittel. Zeichnungen kann man statt auf der Ebene auch auf krummen Flächen herstellen, aber nur selten liegt ein Bedürfnis dazu vor Wir nehmen grundsätzlich an, daß alle Zeichnungen auf einer Ebene, dem Zeichenblatt, entworfen werden sollen Als Zeichenebene dient ein auf dem Reißbrett aufgespannter glatter, nicht zu körniger Zeichenbogen, als Zeichenstift ein harter spitzer Bleistift. Nach Vollendung einer Zeichnung in Blei kann man sie mit flussiger schwarzer Tusche nachziehen, wobei man sich der Reißfeder bedient

Als Werkzeug zum Ziehen von Geraden dient das Lineal, zum Ziehen von Kreisen der Zirkel Man findet es bequem, zur Vereinfachung des Ziehens paralleler Geraden die Reißschiene sowie die beiden Zeichendreiecke zu benutzen, namlich ein gleichschenklig rechtwinkliges und ein halbes gleichseitiges Dreieck Diese Werkzeuge dienen auch zum Ziehen von Senkrechten zu gegebenen Geraden

Beim Ausziehen krummer Linien mittels der Reißfeder, keineswegs mittels einer anderen Zeichenfeder, bedarf man als Anhaltes fur die Hand eines Kurvenlineals

Die richtige Handhabung dieser Werkzeuge will praktisch erlernt sein Hier ist deshalb nicht der Ort, dies auseinanderzusetzen Überhaupt muß betont werden, daß sich der Lernende nicht mit dem Durchlesen eines Lehrbuches begnugen darf, sondern selbst so genau wie moglich zeichnen muß

Anmerkung Die Bezeichnungen Reißschiene und Reißzeug (fur Zirkel) sowie die spater vorkommenden Bezeichnungen Grundriß, Aufriß usw enthalten den Stamm des Wortes Reißen, das hierbei in der alten Bedeutung von Einritzen zu nehmen ist Die Runen wurden bekanntlich in Holz eingeritzt Vgl das englische „write" fur „schreiben"

Erstes Kapitel.

Senkrechte Projektion auf eine Tafel.

§ 1. Grundbegriffe.

4. Verbinden und Schneiden. Mit den Punkten, Geraden und Ebenen kann man zwei grundlegende Verrichtungen vornehmen, das Verbinden und Schneiden

Verbinden

1 Zwei verschiedene Punkte verbindet eine, aber auch nur eine Gerade

2 Lassen sich drei verschiedene Punkte nicht durch eine Gerade verbinden, so verbindet sie eine, aber auch nur eine Ebene

3 Eine Gerade und einen nicht auf ihr gelegenen Punkt verbindet eine, aber auch nur eine Ebene

4 Schneiden sich zwei verschiedene Geraden in einem Punkt, so lassen sie sich auch durch eine Ebene verbinden

5. Schneiden sich dagegen zwei verschiedene Geraden nicht in einem Punkt (d h. sind sie windschief), so lassen sie sich auch nicht durch eine Ebene verbinden

Schneiden:

1. Zwei verschiedene Ebenen schneiden sich in einer, aber auch nur einer Geraden.

2 Schneiden sich drei verschiedene Ebenen nicht in einer Geraden, so schneiden sie sich in einem, aber auch nur einem Punkt.

3 Eine Gerade und eine sie nicht enthaltende Ebene schneiden sich in einem, aber auch nur einem Punkt.

4 Lassen sich zwei verschiedene Geraden durch eine Ebene verbinden, so schneiden sie sich auch in einem Punkt.

5 Lassen sich dagegen zwei verschiedene Geraden nicht durch eine Ebene verbinden, so schneiden sie sich auch nicht in einem Punkt (d. h sie sind windschief)

Diese Satze gelten zunachst nur unter der Voraussetzung, daß keine parallelen Geraden oder Ebenen vorkommen Das parallelen Geraden Gemeinsame ist ihre Richtung, das parallelen Ebenen Gemeinsame ihre Stellung. Man sagt auch· parallele Geraden schneiden sich in einem unendlich fernen Punkt. Richtung und unendlich ferner Punkt bedeuten also dasselbe. Man sagt ferner· parallele Ebenen schneiden sich in einer unendlich fernen Geraden Stellung und unendlich ferne Gerade bedeuten also dasselbe. Ist eine Gerade zu einer Ebene parallel, so sagt man, daß die Gerade die Ebene im unendlich fernen Punkt der Geraden schneide, der auf der unendlich fernen Geraden der Ebene liege. Den Inbegriff aller unendlich fernen Punkte und Geraden nennt man die unendlich ferne Ebene

Fügt man zu den eigentlichen Punkten, Geraden, Ebenen die unendlich fernen Punkte und Geraden sowie die unendlich ferne Ebene hinzu, so gelten die oben ausgesprochenen zehn Sätze ohne jede Ausnahme.

Man sagt, ein Punkt liege mit einer Geraden oder Ebene *vereinigt*, wenn er der Geraden oder Ebene angehört. Ferner: eine Gerade liege mit einer Ebene vereinigt, wenn sie der Ebene angehört.

5. Dualität im Raume. Aus mehreren gegebenen Punkten, Geraden und Ebenen sei durch Verbinden und Schneiden irgendein Gebilde hergestellt worden. Alsdann ersetze man jeden gegebenen Punkt durch eine Eben und jede gegebene Ebene durch einen Punkt Dabei richte man es so ein, daß, falls gegebene Elemente vereinigt liegen, auch die neuen Elemente vereinigt liegen Ferner ersetze man jedes Verbinden von Elementen durch das Schneiden der entsprechenden neuen Elemente und jedes Schneiden von Elementen durch das Verbinden der entsprechenden neuen Elemente. Alsdann entsteht ein neues Gebilde. Beide Gebilde heißen *dual* Sind z. B. drei Punkte gegeben, so kann man aus ihnen ein Dreieck bilden, indem man je zwei der Punkte durch eine Gerade verbindet und alle drei Punkte durch ihre Ebene verbindet Das zum Dreieck duale Gebilde entsteht daher aus drei Ebenen, indem man sie zu je zweien in einer Geraden zum Schnitte bringt und außerdem den Schnittpunkt aller drei Ebenen bestimmt So geht die räumliche dreiseitige Ecke als das zum Dreieck duale Gebilde hervor.

Es gibt *zu sich selbst duale Gebilde*, z B das ebene Winkelfeld, bestehend aus zwei Geraden, ihrem Schnittpunkt und ihrer Ebene Auch das Vierflach, bestehend aus vier Punkten, sechs Geraden und vier Ebenen, ist zu sich selbst dual Das einfachste zu sich selbst duale Gebilde ist die Gerade

Die Verrichtungen, wodurch duale Gebilde entstehen, nennt man auch dual, so ist das Schneiden zweier Ebenen zum Verbinden zweier Punkte dual

Von den zehn Sätzen der vorigen Nummer geht jeder in den neben ihm stehenden über, wenn man die in ihm vorkommenden Elemente und Verrichtungen durch die dualen ersetzt und die vereinigte Lage von Elementen beibehält Infolgedessen gilt der

Satz von der Dualität im Raum Jede richtige Aussage, in der nur von Punkten, Geraden und Ebenen, ihrer vereinigten Lage, ihrem Verbinden und Schneiden die Rede ist, geht in eine ebenfalls richtige Aussage über, wenn man jedes Element durch das duale Element und jede Verrichtung durch die duale Verrichtung ersetzt und die vereinigte Lage von Elementen beibehält

Dadurch gehen Satzpaare hervor, die zueinander dual heißen Wir geben noch zwei Beispiele an·

Liegen drei Punkte nicht auf einer Geraden, so liegen ihre Verbindungsgeraden zu je zweien in *einer* Ebene.

Haben drei Ebenen keine Gerade gemein, so gehen ihre Schnittgeraden zu je zweien durch *einen* Punkt.

Enthält eine Ebene keine von zwei windschiefen Geraden, so gibt es eine und nur eine Gerade, die in der Ebene liegt und beide windschiefe Geraden schneidet.

Liegt ein Punkt auf keiner von zwei windschiefen Geraden, so gibt es eine und nur eine Gerade, die durch den Punkt geht und beide windschiefe Geraden schneidet.

Anmerkung. Beschränkt man sich auf die Geometrie der Ebene (Planimetrie), in der keine Ebenen, sondern nur Punkte und Geraden vorkommen, so gibt es auch eine Dualität, aber bei ihr sind die Punkte zu den Geraden dual, davon später in Nr 191. Die folgenden geschichtlichen Bemerkungen beziehen sich auch hierauf Der Satz von der Dualität rührt her von Josèphe Diez Gergonne (geb 1771 zu Nancy, Professor in Nîmes und Montpellier, gest. 1859 zu Montpellier), siehe seine drei Abhandlungen: „Recherche de quelques-unes des lois générales qui régissent les polyèdres", Ann de Mathém. p et appl. 15. Bd 1824/25, S 157—164, „Considérations philosophiques sur les élémens de la science de l'étendue", ebenda 16 Bd 1825/26, S 209—231, „Recherches sur quelques lois générales qui régissent les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres", ebenda 17 Bd 1826/27, S 214—252 Die Bezeichnung Dualität zuerst in der zweiten Abhandlung S 210 Nach Gergonnes Vorgang pflegt man duale Betrachtungen so, wie es oben geschehen ist, nebeneinander zu stellen Trotz seiner Gegnerschaft gegen Gergonne hat Jean Victor Poncelet (geb 1788 in Metz, Ingenieuroffizier, dann General und Kommandeur der Ecole polytechnique zu Paris, gest 1867 ebenda) wesentlich zur Einführung des Begriffs der Dualität beigetragen Die Grundlagen zu seinen Forschungen entstanden zu Saratoff in Rußland während seiner Gefangenschaft nach dem Rückzug der großen Armee, sein Werk ist der „Traité des propriétés projectives des figures", Paris 1829 (2 Aufl 1865/66). August Ferdinand Möbius (geb 1790 in Schulpforta, gest 1868 als Professor an der Universität und Direktor der Sternwarte Leipzig) zeigte, wie man auf Grund einer einfachen Formel von jedem Gebilde zu einem bestimmten dualen Gebilde gelangen kann, siehe „Der baryzentrische Kalkul", Leipzig 1827, § 288 („Gesammelte Werke", 1 Bd herausgeg. von Richard Baltzer, Leipzig 1885, S 376 u f) Die Dualität wurde auf ihre einfachsten geometrischen Grundlagen zurückgeführt durch Jakob Steiner (geb 1796 zu Utzentorf bei Solothurn, Lehrer an der Gewerbeakademie und Professor an der Universität Berlin, gest 1863 in Bern), siehe sein Hauptwerk „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander", 1 (einziger) Teil, Berlin 1832 („Gesammelte Werke", herausgeg von Karl Weierstraß, 1 Bd Berlin 1882 S 229—460, auch in Ostwalds Klassikern der exakten Wissenschaften Nr 82, 83, herausgeg von Arthur J von Öttingen, Leipzig 1896) Die ausführlichste Behandlung wurde der Dualität zuteil durch Michel Chasles (geb 1793 zu Epernon, Professor der Geometrie an der Sorbonne, gest 1880 in Paris), siehe sein „Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science la dualité et l'homographie", S 573—851, enthalten in seinem „Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne", Mém couronnés etc de l'Acad de Bruxelles 1867 (2 u 3 Aufl. Paris 1875, 1889, die deutsche Ausgabe von Leonhard A Sohncke: „Geschichte der Geometrie, hauptsächlich mit Bezug auf die neueren Methoden", Halle 1839, läßt die Abhandlung fort)

6. Senkrechte Geraden und Ebenen. Auch wenn zwei Geraden zueinander windschief sind, bestimmen sie gewisse Winkel. Die Schenkel dieser Winkel bekommt man, wenn man durch irgendeinen Punkt die Parallelen zu beiden Geraden zieht Zwei Geraden heißen zueinander senkrecht, wenn sie zu den Schenkeln eines rechten Winkels parallel sind.

Der Begriff des Senkrechtstehens einer Geraden auf einer Ebene beruht auf den beiden folgenden Sätzen.

Erstens Gehen von einem Punkt P einer Geraden g zwei verschiedene und zu g senkrechte Geraden a, b aus, so ist auch jede von P ausgehende und in der Ebene von a und b gelegene Gerade c zu g senkrecht

Zweitens: Gehen von einem Punkt P einer Geraden g drei verschiedene und zu g senkrechte Geraden a, b, c aus, so liegen a, b, c alle drei in einer Ebene.

Zum Beweis des ersten Satzes nimmt man irgendwo auf a und b Punkte A und B an, außerdem wählt man auf g zwei Punkte U und V so, daß P die Mitte von UV ist, siehe Fig 1 Die Gerade c treffe AB in C. Dann ist $\triangle ABU \cong \triangle ABV$, also $\sphericalangle BAU = \sphericalangle BAV$, folglich

auch $\triangle CAU \cong \triangle CAV$, also $CU = CV$, woraus sich $\triangle PCU \cong \triangle PCV$ ergibt. Da demnach $\sphericalangle UPC = \sphericalangle VPC$ und andererseits die Summe $\sphericalangle UPC + \sphericalangle VPC$ zwei rechte Winkel beträgt, ist $\sphericalangle UPC$ und $\sphericalangle VPC$ ein rechter. Zum Beweis des zweiten Satzes werde angenommen, die Ebene von a und b schneide die Ebene von g und c in der Geraden d. Diese Gerade ist nach dem ersten Satze zu g senkrecht. Da auch $c \perp g$ ist und c und d in einerlei Ebene durch g liegen, fällt c mit d zusammen.

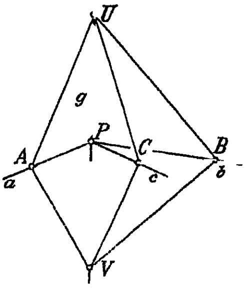


Fig. 1

Eine Gerade g heißt zu einer Ebene E senkrecht und wird ein Lot von E genannt, wenn sie zu jeder in E gelegenen Geraden senkrecht ist. Infolge der beiden Satze ist dies der Fall, sobald g zu zwei in E gelegenen Geraden von verschiedenen Richtungen senkrecht ist.

Der Begriff des Senkrechtstehens einer Ebene auf einer Ebene beruht auf dem Satz:

Geht eine Ebene A durch ein Lot a einer Ebene B, so geht auch die Ebene B durch ein Lot b der Ebene A.

Zum Beweis zieht man in der Ebene B diejenige Gerade b, die vom Schnittpunkt von a mit B ausgeht und mit der Schnittgeraden s von A und B rechte Winkel bildet. Da $a \perp$ B ist, steht a auf b senkrecht. Hieraus und aus $s \perp b$ folgt, daß die Ebene von a und s, also die Ebene A zu b senkrecht ist.

Zwei Ebenen heißen zueinander senkrecht, wenn jede von ihnen ein Lot der anderen enthalt. Infolge des letzten Satzes ist dies der Fall sobald nur eine der Ebenen ein Lot der anderen enthalt. Es reicht auch aus zu fordern, daß eine Ebene zu einem Lot der anderen Ebene parallel sei.

Den Namen Lot gibt man zwar jeder zu einer Ebene senkrechten Geraden, dagegen einer zu einer Geraden senkrechten Geraden nur dann, wenn sich beide Geraden schneiden. Einem Lot kommt also stets ein Fußpunkt zu.

7. Senkrechte Projektion auf eine Achse. Unter der senkrechten Projektion (vom latein projicere, entwerfen) eines Punktes P auf eine Gerade a versteht man den Fußpunkt P' des Lotes von P auf a. Die Gerade a heißt die Achse der Projektion, das Lot PP' der projizierende Strahl von P. Durchweg soll die senkrechte Projektion eines Punktes ebenso wie der Punkt selbst bezeichnet werden, aber mit dem rechts oben angebrachten Strich. Man liest P' als „P-Strich“ oder „P-gestrichen“, nicht als „P-Eins“.

Die projizierenden Strahlen PP', QQ' zweier beliebiger Punkte P, Q des Raumes sind im allgemeinen nicht zueinander parallel. Die Parallele zu PQ durch P' und die Parallele zu PP' durch Q schneiden sich in einem Punkt R, so daß ein Parallelogramm $PQRP'$ entsteht, siehe Fig. 2. Nun ist $QR \parallel PP' \perp a$ und $QQ' \perp a$, folglich die Ebene $QRQ' \perp a$, also auch $RQ' \perp a$. Daher fällt die senkrechte Projektion R' von R mit Q' zusammen. Ist α der Winkel, den die Achse a mit der Geraden PQ

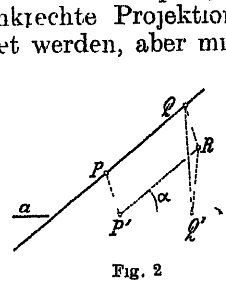


Fig. 2

oder also mit der Geraden $P'R$ bildet, so ergibt sich aus dem an der Ecke Q' rechtwinkligen Dreieck $P'Q'R$

$$P'Q' = P'R \cos\alpha = PQ \cos\alpha$$

Die Strecke $P'Q'$ heißt die senkrechte Projektion der Strecke PQ Sie ist nie länger als PQ selbst und nur dann gleich PQ, wenn PQ zur Achse a parallel liegt Sie ist nur dann gleich Null, wenn entweder PQ selbst gleich Null ist oder wenn PQ zur Achse a senkrecht ist, wobei aber PQ die Achse a nicht zu schneiden braucht Die Langen paralleler Strecken verhalten sich zueinander wie die Langen ihrer senkrechten Projektionen auf die Achse

Durch Anbringen eines Pfeils auf der Achse a legt man ihr einen bestimmten Sinn des Fortschreitens bei Ferner werde verabredet, der Sinn des Fortschreitens auf einer Strecke PQ sei allemal der vom ersten Punkt P zum zweiten Punkt Q. Dann ist auch der Sinn der Strecke $P'Q'$ der von P' nach Q' Mit $\sphericalangle(PQ, a)$ sei derjenige Winkel α bezeichnet, dessen Schenkel sich ergeben, wenn man von irgendeinem Punkt aus die zu PQ und a parallelen Strahlen im Sinn des Fortschreitens längs PQ und a zieht Als Scheitel kann P' benutzt werden Dann ist der eine Schenkel der Strahl von P' nach R, der andere die Achse a in der Pfeilrichtung. Der Winkel kann spitz oder stumpf sein, siehe Fig 3. Im ersten Fall ist $\cos\alpha$ positiv, im zweiten negativ. Andererseits hat $P'Q'$ im ersten Fall denselben Fortschreitungssinn wie a, im zweiten den entgegengesetzten Wenn man also festsetzt, daß eine Strecke $P'Q'$ auf a positiv oder negativ gerechnet werden soll, je nachdem der Sinn von P' nach Q' dem Pfeil auf a entspricht oder ihm entgegengesetzt ist, gilt stets die Formel·

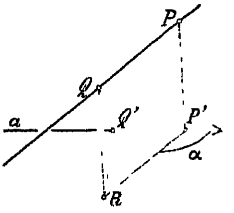


Fig 3

$$P'Q' = PQ \cos(PQ, a)$$

Nun liege ein geschlossenes geradliniges Vieleck $1\ 2\ 3$ vor, siehe Fig 4 Es kann eben oder windschief sein Dann ist infolge der getroffenen Festsetzung

$$1'2' + 2'3' + 3'1' + \quad . = 0,$$

d h

Die Summe der senkrechten Projektionen aller Seiten eines geschlossenen geradlinigen und in einem bestimmten Sinn durchlaufenen Vielecks auf eine mit Pfeil versehene Achse ist gleich Null. Dabei ist durchaus nicht erforderlich, daß das Vieleck eben sei.

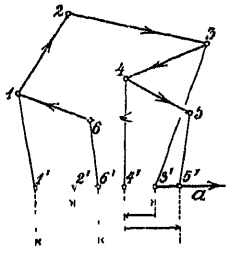


Fig 4

8. Senkrechte Projektion auf eine Tafel. Die senkrechte Projektion eines Punktes P auf eine Ebene T ist der Fußpunkt P' des Lotes von P auf T. Die Ebene T heißt die Tafel, das Lot PP' der projizierende Strahl des Punktes P. Unter der senkrechten Projektion eines Gebildes versteht man den Inbegriff der senkrechten Projektionen aller Punkte des Gebildes. Das Wort Projektion benutzt man aber auch zur Bezeichnung des Vorganges, durch den man das Gebilde auf die

Tafel projiziert. Die Tafel T ist die Ebene der Zeichnung, und alle erforderlichen Zeichnungen sollen ausschließlich auf dieser Ebene gemacht werden. Die Zeichenebene hat eine bestimmte Oberseite. Die Strecke $P'P$ heißt die Höhe des Punktes P über der Tafel, einerlei, ob P wirklich über oder ob P unter der Tafel liegt. Befindet sich P nämlich unter der Tafel, so wird die Höhe $P'P$ als negative Strecke betrachtet. Ein Punkt fällt nur dann mit seiner Projektion zusammen, wenn seine Höhe gleich Null ist. Die Lage eines Punktes P im Raum ist vollkommen bestimmt durch die Angabe seiner Projektion P' und seiner mit Vorzeichen versehenen Höhe.

Die senkrechte Projektion einer Geraden g, die nicht auf der Tafel senkrecht steht, ist ebenfalls eine Gerade g', die projizierenden Strahlen aller Punkte von g bilden eine zur Tafel senkrechte Ebene, die projizierende Ebene von g, und diese Ebene schneidet die Tafel in g' Der Schnittpunkt einer Geraden mit der Tafel heißt der Spurpunkt der Geraden Er ist der gemeinsame Punkt der Geraden und ihrer Projektion Die senkrechte Projektion einer Geraden ist bloß ein Punkt, nämlich ihr Spurpunkt, sobald die Gerade auf der Tafel senkrecht steht Parallele und nicht zur Tafel senkrechte Geraden haben parallele Projektionen Wenn zwei Geraden parallele Projektionen haben, folgt daraus jedoch noch nicht, daß sie selbst zueinander parallel seien Wenn sich zwei Geraden schneiden, treffen sich ihre Projektionen in der Projektion ihres Schnittpunktes Aus dem Umstand, daß die Projektionen g' und l' zweier Geraden g und l einen Punkt gemeinsam haben, folgt jedoch nicht, daß auch g und l einander schneiden

Die senkrechte Projektion einer Ebene, die nicht auf der Tafel senkrecht steht, ist die ganze Tafel Die Schnittgerade der Ebene mit der Tafel heißt die Spurgerade oder Spur der Ebene Die Spurpunkte aller Geraden einer Ebene liegen auf der Spurgeraden der Ebene Die senkrechte Projektion einer Ebene ist bloß eine Gerade, nämlich die Spurgerade, sobald die Ebene auf der Tafel senkrecht steht Parallele Ebenen haben parallele Spurgeraden Aber wenn zwei Ebenen parallele Spurgeraden haben, folgt daraus nur, daß ihre Schnittgerade zur Tafel parallel ist

Ein Gebilde ist vollkommen bestimmt, sobald man die senkrechten Projektionen und Höhen aller seiner Punkte kennt Die Höhen vermerkt man auf einem Höhenmaßstab, einer seitlich gezeichneten Geraden, die mit einer Nullmarke O sowie mit Marken A, B, C derart versehen wird, daß die Strecken OA, OB, OC . die Höhen der Punkte A, B, C des Gebildes darstellen Je nachdem ein Punkt positive oder negative Höhe hat, wird die Marke oberhalb oder unterhalb O angebracht. Alsdann stellen die Strecken AB, BC, AC auf dem Höhenmaßstab die Höhenunterschiede zwischen den Punkten des Gegenstandes dar

In Fig 5 ist eine Strecke AB durch die senkrechten Projektionen A', B' und die Höhen ihrer Endpunkte A, B gegeben, und der Punkt A liegt über, der Punkt B unter der Tafel Will man die Länge der Strecke AB, den Winkel α, den sie mit ihrer Projektion $A'B'$ bildet, sowie den Spurpunkt S der Geraden AB bestimmen, so hat man zu bedenken, daß einerseits alles Gesuchte in der projizierenden Ebene

der Geraden AB liegt, andererseits aber alle Zeichnungen auf der Tafel ausgeführt werden sollen. Man sieht sich deshalb veranlaßt, die projizierende Ebene um ihre Spurgerade $A'B'$ soweit herumzudrehen, bis sie auf der Tafel liegt. Dies Drehen kann in dem einen oder anderen Sinn um $A'B'$ herum geschehen. Die Lagen, in die dabei die Punkte A, B kommen, seien mit (A) und (B) bezeichnet. Sie sind die Endpunkte der Lote, die man in A', B' auf $A'B'$ errichtet und gleich den Höhen von A und B macht. Dabei sind die Höhen nach verschiedenen Seiten hin aufzutragen, wenn sie (wie es in Fig. 5 der Fall ist) verschiedene Vorzeichen haben. Es erhellt, daß jetzt $(A)(B)$ die Länge der Strecke AB darstellt und ebenso zu $A'B'$ geneigt ist wie AB selbst, sowie daß der Schnittpunkt von $A'B'$ mit $(A)(B)$ der Spurpunkt S ist. Bezeichnet α den spitzen Winkel, den die Geraden $A'B'$ und $(A)(B)$ miteinander bilden, so ist

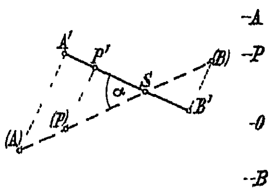


Fig. 5.

$$AB = (A)(B) = A'B' : \cos\alpha .$$

Die senkrechte Projektion einer Strecke ist nie länger als die Strecke selbst. Sie ist ihr nur dann gleich, wenn die Strecke zur Tafel parallel liegt; sie ist nur dann gleich Null, wenn entweder die Strecke selbst gleich Null oder zur Tafel lotrecht ist. Die umgelegte projizierende Ebene von AB gestattet auch ohne weiteres die Beantwortung der Frage nach der Höhe desjenigen Punktes P der Geraden AB, dessen Projektion P' irgendwo auf der Geraden $A'B'$ gewählt worden ist. Dabei darf P' auch auf der Verlängerung der Strecke $A'B'$ über A' oder B' hinaus angenommen werden. Was das Vorzeichen der Höhe von P betrifft, so stimmt es mit dem Vorzeichen derjenigen Höhe von A oder B überein, die nach der Umlegung auf derselben Seite von $A'B'$ liegt. Auch die umgekehrte Aufgabe ist sofort zu lösen: Die Projektion P' desjenigen Punktes P der Geraden AB zu ermitteln, der eine beliebig vorgeschriebene Höhe hat.

Die Höhenangaben kann man auch dadurch bewirken, daß man ihre Zahlenwerte an die Stellen A', B' usw. schreibt, nachdem man eine bestimmte Längeneinheit gewählt hat. Diese Zahlen heißen die Koten der Punkte (französ. cote, auch cotte, latein. quota), und man spricht von der kotierten Projektion. Wir werden uns hier jedoch der Höhen selbst statt der Höhenzahlen bedienen.

9. Unveränderlichkeit von Verhältnissen bei senkrechter Projektion. Ist AB eine Strecke und wird P irgendwo auf der Geraden AB gewählt, so heißt $AP : BP$ das zu P gehörige Teilverhältnis der Strecke AB. Es wird mit dem Plus- oder Minuszeichen versehen, je nachdem der Sinn von A nach P mit dem von B nach P übereinstimmt oder nicht, d. h. je nachdem P die Strecke AB äußerlich oder innerlich teilt. Zu jedem bestimmt gewählten positiven oder negativen Zahlenwert des Teilverhältnisses gibt es einen und nur einen zugehörigen Teilpunkt P, z. B. zu -1 die Mitte von AB und zu $+1$ den unendlich fernen Punkt der Geraden AB. Nach Fig. 5 der letzten Nummer ist:

$$A'P' : B'P' = AP : BP,$$

und diese Formel ist auch in Hinsicht auf die Vorzeichen richtig, denn je nachdem P die Strecke AB äußerlich oder innerlich teilt, tut P' dasselbe bei der Strecke $A'B'$. Die Formel besagt: Jedes Teilverhältnis bleibt bei senkrechter Projektion unverändert. Man nennt es deshalb eine Invariante (d. h. unveränderliche Größe) der Projektion. Insbesondere: Die Projektion der Mitte einer Strecke ist die Mitte der Projektion der Strecke.

Haben A, B, P die Höhen h_a, h_b, h_p, so ist:

$$AP : BP = (h_a - h_p) : (h_b - h_p) = A'P' : B'P'.$$

Ist P insbesondere der Spurpunkt S dei Geraden AB, so ist:

$$AS : BS = h_a : h_b = A'S : B'S,$$

d. h. der Spurpunkt der Geraden AB teilt die Projektion der Strecke AB im Verhältnis der Höhen der Punkte A und B.

Sind AB und CD parallele Strecken, so sind auch ihre Projektionen $A'B'$ und $C'D'$ zueinander parallel. Bilden sie mit ihren Projektionen den spitzen Winkel α, so ist

$$A'B' = AB \cos\alpha, \qquad C'D' = CD \cos\alpha,$$

mithin $A'B' : C'D'$ gleich $AB : CD$. Also bleibt das Verhältnis paralleler-Strecken bei senkrechter Projektion unverändert. Man bezeichnet es ebenfalls als eine Invariante der Projektion.

10. Ebene durch drei Punkte. Liegen die Projektionen A', B', C' dreier Punkte A, B, C nicht in gerader Linie, so tun es auch die Punkte A, B, C selbst nicht. Vielmehr bestimmen sie dann eine Ebene, die nicht zur Tafel lotrecht ist, so daß jeder Punkt P' der Tafel die Projektion eines Punktes P der Ebene ist. Sind außer A', B', C' auch die Höhen von A, B, C gegeben, so findet man die Spurpunkte X, Y, Z der Geraden BC, CA, AB nach Nr. 8 durch Umlegen der projizierenden Ebenen dieser drei Geraden. Da die Spurpunkte X, Y, Z alle drei auf der Spurgeraden s der Ebene ABC liegen müssen, ergibt sich eine Probe der Richtigkeit der Zeichnung.

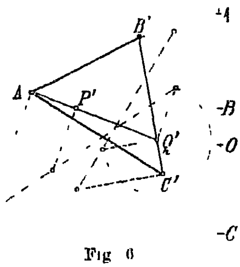


Fig. 6

Die Bestimmung der Höhe, die einem Punkte P der Ebene ABC zukommt, falls man seine Projektion P' irgendwo angenommen hat, geschieht durch zweimalige Anwendung des Verfahrens von Nr. 8. Man denke sich in der Ebene ABC z. B. die Gerade AP gezogen. Sie wird BC in einem Punkt Q treffen, dessen Projektion Q' bekannt ist, siehe Fig. 6. Nun bestimmt man die Höhe von Q durch Umlegen der projizierenden Ebene von BC und dann die gesuchte Höhe von P durch Umlegen der projizierenden Ebene von AQ.

11. Satz des Menelaus. Nicht selten kann man durch räumliche Betrachtungen und durch Projektion Sätze beweisen, die der Geometrie der Ebene, der Planimetrie, angehören. Hierzu ein Beispiel.

Liegt ein Dreieck $A'B'C'$ sowie eine Gerade s in der Ebene T gezeichnet vor und schneidet s die Seiten $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ des Dreiecks

in X, Y, Z, so kann man sich irgendeine Ebene E denken, die durch s geht und zur Ebene T geneigt ist. Denkt man sich in A', B', C' die Lote auf T errichtet und mit E in A, B, C zum Schnitt gebracht, so liegt im Gegebenen die Projektion einer Ebene ABC mit ihrer Spurgeraden s vor. Bezeichnen h_a, h_b, h_c die Höhen von A, B, C, so ist (Nr. 9):

$$\frac{B'X}{C'X} = \frac{h_b}{h_c}, \qquad \frac{C'Y}{A'Y} = \frac{h_c}{h_a}, \qquad \frac{A'Z}{B'Z} = \frac{h_a}{h_b}.$$

Multiplikation aller drei Teilverhältnisse gibt:

$$\frac{B'X}{C'X} \cdot \frac{C'Y}{A'Y} \cdot \frac{A'Z}{B'Z} = 1 .$$

Folglich gilt für das Dreieck $A'B'C'$ der

Satz des Menelaus. Werden die Seiten eines Dreiecks von irgendeiner Geraden geschnitten, so ist das Produkt der drei Verhältnisse, in denen die Gerade die Seiten teilt, gleich Eins.

Selbstverständlich muß man dabei die drei Teilverhältnisse so aufeinanderfolgen lassen, wie sie sich beim Umlaufen des Dreiecks nacheinander ergeben.

Anmerkung. Benannt wird der Satz nach einem Menelaus von Alexandria, der um 100 n. Chr. in Rom lebte und „Drei Bücher über Sphärik“ verfaßt hat, von denen Teile in arabischen und hebräischen Übersetzungen überliefert sind. Im dritten Buch wird der in Rede stehende Satz zu Anfang aufgestellt und bewiesen, aber nicht im Fall der Ebene, sondern in bezug auf ein sphärisches Dreieck, und zwar wird er auf den Satz für den Fall ebener Dreiecke zurückgeführt. Ausführlicheres bei Axel Anthon Björnbo, „Studien über Menelaos' Sphärik. Beiträge zur Geschichte der Sphärik und Trigonometrie der Griechen“, Abhandlungen zur Geschichte der mathem. Wissensch. 14. Heft, 1902, S. 1—154, insbes. S. 88 u. f.

12. Höhenebenen und Höhenlinien. Die zur Tafel parallelen Ebenen heißen Höhenebenen. Eine gerade oder krumme Linie, die einer Höhenebene angehört, heißt eine Höhenlinie. Zwei Höhenlinien können einander nur dann schneiden, wenn ihnen dieselbe Höhe zukommt. Ein ebenes Gebilde ist mit seiner senkrechten Projektion nur dann kongruent, wenn es in einer Höhenebene liegt. Eine Ebene, die keine Höhenebene ist, enthält eine Schar von unendlich vielen Höhenlinien, nämlich zur Spurgeraden der Ebene parallele Geraden, deren Projektionen ebenfalls zur Spurgeraden parallel sind. Die Spurgerade selbst ist eine Höhenlinie von der Höhe Null.

Wird ein starrer Gegenstand senkrecht zur Tafel ohne Drehung verschoben, also gehoben oder gesenkt, so ändert sich seine senkrechte Projektion nicht. Wohl aber erfahren alle Punkte des Gegenstandes die gleiche Höhenzunahme oder -abnahme. Die neue gegenseitige Lage von Gegenstand und Tafel geht auch dadurch hervor, daß man die Tafel senkt oder hebt, während man den Gegenstand in Ruhe läßt. Hierdurch wird die Tafel in eine Höhenebene verwandelt. Mithin dürfen wir die Projektionszeichnung eines Gebildes auch als Projektion auf eine Höhenebene in beliebiger Höhe betrachten. Zeichnerisch ersetzt man die Tafel durch die Höhenebene von der Höhe h dadurch, daß man die Marke O auf dem Höhenmaßstab durch die Marke H von der Höhe $OH = h$ ersetzt.

Diese Bemerkungen sind trotz ihrer Einfachheit sehr wichtig. Wir sehen uns nämlich veranlaßt, die Tafel durch eine Höhen-

ebene ersetzt zu denken, sobald die auszuführende Zeichnung sonst den Rahmen des Zeichenblattes überschreiten oder überhaupt einen zu großen Platz beanspruchen würde oder auch bloß, um die Konstruktion etwas abzukürzen. Das einfachste Beispiel hierzu bietet die Aufgabe von Nr. 8, die Länge einer durch ihre Projektion $A'B'$ und durch die Höhen von A und B gegebenen Strecke AB zu ermitteln. Die Ausführung der Zeichnung in Fig. 5 kann auch dann, wenn AB verhältnismäßig kurz ist, zu viel Platz in Anspruch nehmen, nämlich wenn die Höhen von A und B beide beträchtlich sind, wie z. B. in Fig. 7. Hier denken wir uns die Tafel etwa durch die Höhenebene von A ersetzt, d. h. statt der Nullmarke O benutzen wir die Marke A, so daß jetzt (A) mit A' zusammenfällt und $B'(B)$ gleich der Höhe von B über A ist. Die Umlegung $A'(B)$ stellt die Länge von AB dar und $\sphericalangle (B)A'B'$ gibt den Winkel α der Geraden AB mit ihrer Projektion an. Diese Konstruktion nimmt nicht nur weniger Platz ein, sondern ist auch kürzer als die in Nr. 8, weshalb man so in jedem Falle vorgehen wird. Ist P' irgendwo auf der Geraden $A'B'$ gewählt, so gestattet die Figur auch jetzt, die Höhe $P'(P)$ des Punktes P abzulesen, doch ist zu beachten, daß jetzt A die Nullmarke auf dem Höhenmaßstab ist. Man hat also, um die Höhe von P über der Tafel zu finden, die aus der Hauptzeichnung entnommene Strecke $P'(P)$ von A aus auf dem Höhenmaßstab abzutragen. Nach welcher Seite hin, richtet sich danach, ob (B) und (P) in der Hauptzeichnung auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten von $A'B'$ liegen.

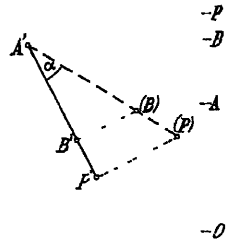


Fig. 7

Vermöge Ersetzens der Tafel durch eine Höhenebene kann man die Höhenlinien einer durch ein Dreieck ABC wie in Nr. 10 gegebenen Ebene geradeso ermitteln wie damals die Spurgerade. Soll nämlich die Höhenlinie in der Höhe h bestimmt werden, so ersetzt man die Nullmarke O durch die Marke in der Höhe h und verfährt wie damals. Die hervorgehende Projektion der Höhenlinie muß zur Spurgeraden parallel werden. Will man das Dreieck ABC besonders hervorheben, so kann man es mit Schraffen versehen, und am besten wird es sein, diese Schraffen in der Richtung der Höhenlinien zu ziehen. Da das Umlegen der projizierenden Ebenen der Dreiecksseiten BC, CA, AB etwas lästig ist, wird man sowohl die Spurgerade s als auch die Projektionen aller übrigen Höhenlinien der Ebene ABC besser wie folgt ermitteln.

Nach Nr. 9 teilen die Spurpunkte X, Y, Z der Geraden BC, CA, AB die Strecken $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ in den Verhältnissen der Höhen der Punkte A, B, C zu je zweien. Um diese Teilung zu bewirken, zieht man in Fig. 8 durch die Marken O, A, B, C parallele Geraden in irgendeiner Richtung und trägt zwischen ihnen die Strecken $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ derart ein, daß ihre Endpunkte auf den zugehörigen Parallelen liegen. Diese Strecken werden dann von der durch O gehenden Parallelen in den richtigen Verhältnissen in X, Y, Z geteilt, so daß man nur noch die Teilpunkte auf die Strecken $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ der Hauptzeichnung zurückzuübertragen hat. Ferner bekommt man ebenso die Projektionen derjenigen Punkte U, V, W der Seiten des Dreiecks ABC, durch die irgendeine Höhenlinie der Ebene ABC

geht, indem man nämlich die Nullmarke O durch die Marke in beliebiger Höhe h ersetzt, also statt der Parallelen durch O die durch diesen Punkt benutzt. Die Gerade $U'V'W'$ muß zur Spurgeraden s parallel ausfallen.

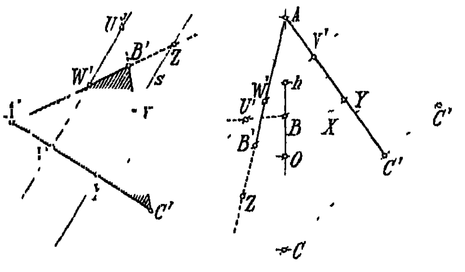


Fig. 8

Wenn die Höhen der Dreiecksecken A, B, C wenig voneinander verschieden sind, ist die Ebene ABC nur gering zur Tafel geneigt, so daß die Spurgerade sehr entlegen und zeichnerisch unerreichbar sein kann. Aber auch dann gibt es immer Höhenlinien der Ebene ABC, die in der Zeichnung erreichbar sind, nämlich diejenigen, die durch das Innere des Dreiecks ABC gehen. Während also eine Ebene unter Umständen eine unerreichbare Spurgerade hat, kommen ihr doch stets erreichbare Höhenlinien zu. Ebenso wie die Tafel durch eine Höhenebene ersetzt wird, tritt an die Stelle der Spurgeraden eine Höhenlinie. Man nennt die Höhenlinien von Ebenen auch Spurparallelen. Wir werden jedoch bei der Bezeichnung Höhenlinie bleiben.

13. Drehung. Ändern die Punkte eines Gebildes ihre Lagen so, daß sich auch ihre gegenseitigen Entfernungen ändern, so sagt man, das Gebilde sei nicht starr und es finden in ihm Bewegungen statt. In strengem geometrischen Sprachgebrauch wendet man jedoch das Wort Bewegung nur für solche Lagenänderungen an, bei denen die gegenseitigen Entfernungen aller Punkte des Gegenstandes ungeändert bleiben, also nur bei Lagenänderungen starrer Gebilde.

Bleibt bei einer Bewegung im Raum ein, aber auch nur ein Punkt fest, so handelt es sich um eine Drehung um einen Punkt. Irgendein anderer Punkt kann dabei immer noch eine willkürliche Bahn auf einer Kugel um diesen Drehpunkt beschreiben. Bleiben bei der Bewegung zwei verschiedene Punkte fest, so gilt dasselbe von jedem Punkt ihrer verbindenden Geraden, und wenn sonst kein Punkt festbleibt, d. h. nicht überhaupt Ruhe herrscht, liegt dann eine Drehung um eine Gerade vor. Diese Gerade heißt die Drehachse. Jeder nicht auf der Drehachse gelegene Punkt ist gezwungen, einen Kreis zu beschreiben. Die Ebene dieses Drehkreises ist zur Achse senkrecht, und der Mittelpunkt des Drehkreises liegt auf der Achse. Er ist der Fußpunkt des Lotes vom Punkte auf die Achse, und dieses Lot ist der Drehradius. Bei einer bestimmten Drehung um eine Achse beschreiben alle Drehradien gleich große Winkel, den Drehwinkel.

Geläufiger ist der Begriff einer Drehung in der Ebene. Sie findet um einen Punkt der Ebene statt; aber wenn man die ebene Figur, die man der Drehung unterwirft, als Teil eines starren räumlichen Gebildes auffaßt, bemerkt man, daß es sich tatsächlich um eine Drehung um eine Achse handelt. Die Achse steht nämlich in jenem Punkte auf der Ebene senkrecht.

Wir benutzen Drehungen und zwar nur Drehungen um Geraden als Hilfsmittel der Konstruktion. Als besonders nützlich werden sich Drehungen um Höhengeraden erweisen. Hier sind die Ebenen der

Drehkreise zur Tafel senkrecht, daher die Projektionen der Drehkreise bloß Lote zur Projektion der Drehachse.

In Fig. 9 liegt eine Höhengerade h sowie ein Punkt P vor, und zwar sind von beiden die senkrechten Projektionen sowie die Höhen angegeben. Außerdem liegt ein Winkel α vor Man soll nun die Projektion und Hohe desjenigen Punktes Q ermitteln, in den P bei der Drehung um h durch den Drehwinkel α in einem der beiden möglichen Drehsinne ubergeht Die Projektion des Mittelpunktes M des Drehkreises von P ist der Fußpunkt des Lotes von P' auf h'. Da der Drehkreis von P in derjenigen Ebene liegt, die langs $P'M'$ auf der Tafel senkrecht steht, wird man diese Ebene umlegen, aber nicht in die Tafel, sondern bequemer in die durch h gehende Hohenebene Man ersetze also die Nullmarke O durch die Marke von h. Alsdann ergibt sich P in der Umlegung (P) sotort, indem $P'(P)$ gleich der Hohe von P uber der neuen Marke ist Da man nun auch den umgelegten Drehradius $r = M'(P)$ zeichnen kann, wird man ihn der Drehung durch den Winkel α bis in die neue Lage $M'(Q)$ unterwerfen, so daß der Fußpunkt des Lotes von (Q) auf $P'M'$ die Projektion Q' liefert Die Strecke $Q'(Q)$ gibt die Hohe von Q uber der Hohe von h an, ist also auf dem Hohenmaßstab von h an bis Q autzutragen Alsdann ist OQ die Hohe des Punktes Q uber der Tafel.

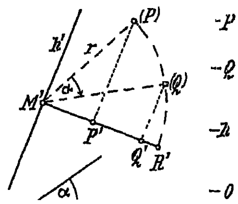


Fig 9

Man bemerkt Der Radius des Drehkreises von P ist gleich der Hypotenuse $M'(P)$ des rechtwinkligen Dreiecks, von dem die eine Kathete der Hohenunterschied von P und h und die andere Kathete die Strecke $P'M'$ ist Diese Strecke, die man unmittelbar in der vorgelegten Zeichnung mit dem Zirkel von P' aus bis h' abgreifen kann, nennen wir den seitlichen Abstand des Punktes P von der Geraden h. Der Radius des Drehkreises eines Punktes wird somit als Hypotenuse aus den beiden Katheten dem Hohenunterschied gegenuber der Drehachse und dem seitlichen Abstand von der Drehachse gewonnen Der Punkt R' in Fig 9 ist die Projektion desjenigen Punktes R, in den P ubergeht, wenn die Drehung um h soweit ausgefuhrt wird, bis der Punkt gerade so noch wie h liegt.

14. Ebene Figuren von gesuchter oder gegebener Gestalt. Ist ein Dreieck durch die Projektionen und Hohen seiner Ecken gegeben, so kann man, um die wirkliche Gestalt und Große des Dreiecks zu ermitteln, die Langen der drei Seiten feststellen (nach Nr. 8) und aus ihnen das Dreieck zusammensetzen. Bequemer und zweckmaßiger ist es jedoch, die Ebene des Dreiecks in eine zur Tafel parallele Lage zu bringen, weil das Dreieck in dieser Lage seine wirkliche Form zeigt. Die Überfuhrung wird durch eine Drehung bewerkstelligt; dabei muß man als Drehachse eine zur Tafel parallele Gerade benutzen. Man wird daher eine Höhenlinie h der Dreiecksebene bestimmen (Nr. 12) und alsdann die Drehung so vornehmen, wie es in der letzten Nummer auseinandergesetzt wurde. Es genügt dabei, bloß diejenige Lage (A) zu ermitteln, in die eine Ecke A des Dreiecks bei der Drehung gelangt. Denn da die beiden anderen Ecken B und C Kreise um die Drehachse beschreiben, liegen die gesuchten Punkte (B) und (C)

auf den Loten von B' und C' auf h'. Außerdem schneiden AB und AC die Drehachse h in Punkten, die in Ruhe bleiben. Deshalb erhalt man die gedrehten Geraden $(A)(B)$ und $(A)(C)$, indem man (A) mit denjenigen beiden Punkten verbindet, in denen h' von $A'B'$ und $A'C'$ getroffen wird. Man kennt demnach je zwei Geraden, auf denen (B) bzw. (C) liegen, so daß man (B) und (C) ebenfalls findet. Eine Probe der Richtigkeit ist, daß $(B)(C)$ die Gerade $B'C'$ auf h' schneiden muß. In dem Fall, wo Schnittpunkte der Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ mit h' unerreichbar sind, kann man Hilfspunkte benutzen, namlich auf dieselbe Art feststellen, an welche Stellen geeignet gewählte Punkte der Seiten $A'B'$ und $A'C'$ nach Vollendung der Drehung gelangen. Überhaupt ist es leicht, den Punkt (P) zu finden, in den irgendein Punkt P der Dreiecksebene übergeht, sobald die Projektion P' von P beliebig gewahlt worden ist.

Indem man von dem Dreieck ABC durch gerade Linien Teile abschneidet oder auch zu ihm geradlinig begrenzte Teile hinzufügt, die in derselben Ebene liegen, gelangt man auch dazu, die wahre Gestalt und Größe eines beliebigen ebenen Vielecks durch Drehung zu ermitteln.

In Fig. 10 ist gezeigt, wie man die umgekehrte Aufgabe löst. Eine ebene Figur von gegebener Form soll in eine beliebige Lage gebracht und dann in ihrer senkrechten Projektion dargestellt werden. Insbesondere ist hier eine durch zwei regelmaßige und ahnlich gelegene Sechsecke begrenzte Form benutzt worden. Zunachst denkt man sich, diese Form liege in irgendeiner Hohenebene, etwa in der angegebenen Hohe h. Alsdann wahlt man irgendeine Gerade s, die ebenfalls in dieser Hohenebene liegt, als Drehachse und dreht nun die Figur um s durch einen beliebig gewahlten Winkel α in eine neue Lage. Der Drehradius irgendeiner Ecke (A) der ursprünglichen Figur erscheint als das Lot $(A)M_a'$ von (A) auf s', und zwar in wahrer Große. Der Drehkreis von (A) liegt in der Ebene, die durch dieses Lot geht und auf der Tafel senkrecht steht. Indem man die Tafel durch die Hohenebene von der Hohe h ersetzt, legt man die Ebene des Drehkreises um $(A)M_a'$ in diese Hohenebene um. Alsdann ist der Drehkreis als Kreis um M_a' durch (A) zu ziehen. Seinen Radius $M_a'(A)$ laßt man den Winkel α beschreiben. Dadurch geht (A) in $[A]$ über. Das Lot von $[A]$ auf $M_a'(A)$ hat als Fußpunkt die gesuchte Stelle A'. In dem in Fig. 10 gewahlten Beispiel ist es besonders zweckmaßig, festzustellen, wohin der Sechsecksmittelpunkt gelangt. Denn dann kann man sofort die drei gedrehten Diagonalen der Sechsecke finden. In der Tat. Die Punkte, in denen die Diagonalen die Drehgerade s treffen, bleiben bei der Drehung in Ruhe; also müssen auch die gedrehten Diagonalen dorthin gehen. Da sich alle Punkte der Figur in der Zeichnung bei der Drehung auf Loten von s' bewegen, da ferner alle Punkte von s in Ruhe bleiben und schließlich parallele Seiten der Figur auch nach der Drehung zueinander parallel sein müssen, ergeben sich vielerlei Hilfsmittel, die Richtigkeit der Zeichnung durch uberzählige Konstruktionen zu prüfen,

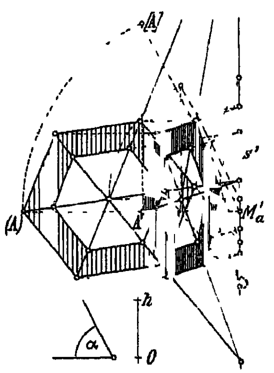


Fig. 10.

sowie das Hindernis, das in unerreichbaren Schnittpunkten mit s' liegt, leicht zu überwinden.

Es leuchtet ein, daß sich zu jedem Punkt (P), der der Ebene der gegebenen Figur angehört, ein gedrehter Punkt P' ergibt. Demnach besteht zwischen den beiden Ebenen in der Zeichnung eine gesetzmäßige Beziehung, bei der jedem Punkt der einen Figur ein gewisser Punkt der anderen entspricht. Einander entsprechende Punkte fallen nur dann zusammen, wenn sie auf s' liegen. Beschreibt der eine Punkt eine Gerade, so gilt dasselbe von dem anderen, so daß also auch jeder Geraden der einen Figur eine Gerade der anderen entspricht. Ferner treffen sich einander entsprechende Geraden allemal auf s'. Parallele Geraden der einen Figur sind solchen Geraden der anderen zugeordnet, die ebenfalls parallel sind.

Diese gesetzmäßige Beziehung ist ein Sonderfall einer allgemeineren, die wir in § 3 und 4 des zweiten Kapitels gründlich behandeln werden, nämlich der sogenannten Affinität (zu deutsch Verwandtschaft)

Man beachte noch, daß die angenommene Höhe h in Fig 10 ohne Einfluß auf die Zeichnung ist.

15. Windschiefe Vierecke und allgemeine Vierflache. Weil man nur in der Ebene zu zeichnen vermag, hat man eine bessere Vorstellung von einer Geraden als von einer Ebene im Raume. Es wird niemandem einfallen, irgend drei Punkte ganz beliebig anzunehmen und dann zu behaupten, daß sie in gerader Linie liegen Dagegen begeht der Anfänger leicht den Fehler anzunehmen, daß irgend vier ganz beliebig im Raume angenommene Punkte in einer Ebene liegen Vier durch ihre Projektionen und Höhen gegebene Punkte A, B, C, D bestimmen im allgemeinen gar kein ebenes, sondern ein windschiefes Viereck $ABCD$. Es ist eben, wenn die Diagonalen AC und BD einander schneiden Nun haben die Projektionen $A'C'$ und $B'D'$ in Fig 11 zwar eine Stelle gemein, aber sie ist die Projektion eines Punktes X von AC und eines im allgemeinen in anderer Höhe gelegenen Punktes Y von BD Die Höhen von X und Y gehen durch Umlegen der projizierenden Ebenen von AC und BD um ihre Spurgeraden $A'C'$ und $B'D'$ hervor (Nr 8). In Fig. 11 zeigt sich, daß X höher als Y liegt. Fügt man zu den vier Strecken AB, BC, CD, DA noch die Kanten AC und BD hinzu, so entsteht ein allgemeines Vierflach. Um das Körperliche des Vierflachs hervortreten zu lassen, wendet man hier wie später die Regel an: Höher gelegene Punkte decken tiefer gelegene Punkte auf demselben Lote zur Tafel zu. Man zeichnet daher das Vierflach so, wie es verkleinert in Fig. 11 dargestellt ist.

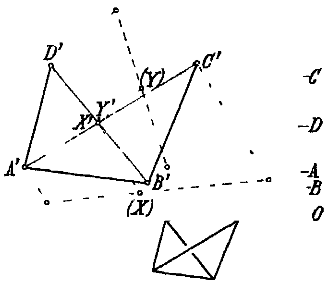


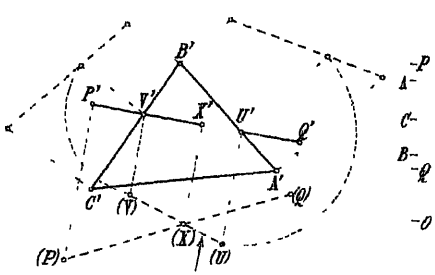
Fig 11

Zu der soeben ausgesprochenen Regel kommt man, indem man sich vorstellt, daß die Gegenstände und ihre Projektionen aus der Ferne von oben her so betrachtet werden, daß sie sich für den Beobachter miteinander decken. Dann sind die Projektionen als die Bilder der Gegen-

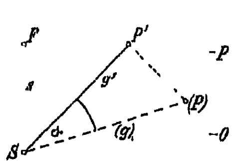
stande zu bezeichnen. Das anschauliche Wort **Bild** werden wir künftig öfters statt des Wortes Projektion benutzen.

In Fig. 11 ist der **Umriß des Bildes des Vierflachs** ein Viereck. Er ist nur ein Dreieck, wenn die Projektion eines der vier Eckpunkte im Innern des Dreiecks der Projektionen der drei anderen Eckpunkte liegt (vgl. Nr. 23).

16. Schnitt von Gerade und Ebene. Eine Ebene ABC und eine Gerade PQ seien durch die Projektionen und Höhen der fünf Punkte gegeben, siehe Fig. 12. Im Bilde schneidet $P'Q'$ die Seiten $A'B'$ und $B'C'$ des Dreiecks $A'B'C'$ in U' und V'. Die zugehörigen Punkte U und V von AB und BC brauchen aber nicht auf PQ zu liegen. Vielmehr wird PQ im allgemeinen weder AB noch BC schneiden. Aber PQ wird die Ebene ABC in einem Punkte X treffen, und dieser Punkt X liegt in der projizierenden Ebene von PQ. Da diese projizierende Ebene das Dreieck in der Geraden UV schneidet, bekommt man X, wenn man die projizierende Ebene um ihre Spurgerade $P'Q'$ in die Tafel umlegt. Die Lage $(P)(Q)$, in die dabei PQ übergeht, ergibt sich ohne weiteres. Die Umlegung $(U)(V)$ der Dreieckssehne UV kann man zeichnen, nachdem man die Höhen der Punkte U und V von AB und BC ermittelt hat. Diese ergeben sich durch Umlegen der projizierenden Ebenen von AB und BC. Wenn man $(P)(Q)$ und $(U)(V)$ gezeichnet hat, kennt man auch den Schnittpunkt X in seiner Umlegung (X), so daß man X' sofort findet. Die Strecke $X'(X)$ ist die Höhe von X; sie hat dasselbe Vorzeichen wie diejenigen Höhen von P, Q, U, V, die in der Umlegung auf derselben Seite von $P'Q'$ gelegen sind. In Fig. 12 liegt U über PQ und V unter PQ, wie die Umlegung zeigt, indem der angebrachte Pfeil die Sehrichtung in der Umlegung anschaulich macht. Ist die Ebene des Dreiecks ABC undurchsichtig, so ist das Stück $X'U'$ des Bildes der Geraden $P'Q'$ nach der Regel der letzten Nummer unsichtbar.


Fig. 12

17. Fallinien der Ebene. Der **Neigungswinkel** einer Geraden g **zur Tafel** ist der spitze Winkel, den g mit der Projektion g' bildet. Wir untersuchen nun die Neigungswinkel der verschiedenen Geraden einer Ebene E. Diese Ebene sei durch ihre Spurgerade s und die senkrechte Projektion und Höhe eines ihrer Punkte P gegeben. Jede Gerade der Ebene E ist zu einer durch P gehenden Geraden der Ebene parallel, so daß wir uns auf die Betrachtung solcher Geraden beschränken können. Eine von P ausgehende Gerade g der Ebene treffe s in S, siehe Fig. 13. Der Tangens des Neigungswinkels α von g ist gleich $P'P : SP'$. Das rechtwinklige Dreieck $SP'P$, in dem α vorkommt, kann in der Umlegung um SP' als das Dreieck $SP'(P)$ gezeichnet werden. Dreht sich g in E um P, so beschreibt S die Spurgerade s. Dabei bleibt


Fig. 13

die Länge von $P'(P)$ ungeändert, während SP' am kleinsten wird, wenn SP' zu s senkrecht wird. Bezeichnet F den Fußpunkt des Lotes von P' auf s, so ist also PF diejenige Gerade der Ebene, die von allen Geraden durch P den größten Neigungswinkel hat. Da $P'P$ zu s senkrecht ist, steht die Ebene $FP'P$ auf s senkrecht, so daß die Gerade FP ebenfalls ein Lot zu s ist. *Demnach sind die gegenüber der Tafel steilsten Geraden der Ebene E diejenigen, die zur Spurgeraden und somit zu allen Höhenlinien der Ebene E senkrecht sind.* Sie heißen die *Fallinien* der Ebene E, *ihre Projektionen sind ebenfalls zur Spurgeraden sowie zu den Projektionen der Höhenlinien der Ebene senkrecht* Nur Höhenebenen haben keine Fallinien Die Fallinien einer lotrechten Ebene sind Lote zur Tafel, ihre Projektionen bloß Punkte der Spurgeraden. Man nennt die Fallinien auch *Linien stärksten Gefälles.*

Unter dem *Winkel zweier Ebenen* versteht man den spitzen Winkel, dessen Schenkel von einer zu beiden Ebenen und also zur Schnittgeraden beider Ebenen senkrechten Ebene ausgeschnitten werden. *Deshalb sind die Fallinien einer Ebene E diejenigen Geraden der Ebene, die mit der Tafel T denselben Winkel bilden wie die Ebene E selbst.*

18. **Senkrechte Projektion eines rechten Winkels.** Faßt man eine Höhenlinie und eine Fallinie einer Ebene ins Auge, so lehrt das Vorhergehende Die senkrechte Projektion eines rechten Winkels, von dem ein Schenkel zur Tafel parallel liegt, ist ebenfalls ein rechter Winkel, selbstverständlich unter der Voraussetzung, daß der andere Schenkel kein Lot zur Tafel sei.

Nun betrachten wir einen rechten Winkel, der keinen zur Tafel parallelen Schenkel hat, so daß seine Schenkel die Tafel in zwei im Endlichen gelegenen Punkten S_1 und S_2 schneiden, siehe Fig. 14 Die Ebene des rechten Winkels S_1RS_2 kann man durch Drehen um ihre Spurgerade S_1S_2 in die Tafel umlegen Dabei gelangt R nach einem Punkte (R) des Kreises mit dem Durchmesser S_1S_2. Der Fußpunkt des Lotes von (R) auf S_1S_2 ist der Mittelpunkt M des von R beschriebenen Drehkreises In der ursprünglichen Lage von R ist MR' kürzer als MR oder $M(R)$, d h R' liegt im Innern des Kreises mit dem Durchmesser S_1S_2, so daß $\sphericalangle S_1R'S_2$ stumpf ist Dasselbe gilt vom Scheitelwinkel, während die beiden Nebenwinkel spitz sind. Dies und das Vorhergehende liefert den wichtigen Satz:

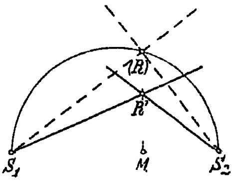


Fig 14

Die senkrechte Projektion eines rechten Winkels ist dann, aber auch nur dann ebenfalls ein rechter Winkel, wenn einer seiner Schenkel zur Tafel parallel liegt oder also eine Höhenlinie ist. Selbstredend wird dabei von dem Fall abgesehen, wo der andere Schenkel zur Tafel lotrecht ist.

Da auch windschiefe Geraden zueinander senkrecht sein können (Nr. 6), gilt der Satz:

Die senkrechten Projektionen zweier zueinander senkrechten Geraden sind dann, aber auch nur dann ebenfalls zueinander senkrecht, wenn eine der beiden Geraden eine Höhenlinie ist.

Ferner lehrt das Vorhergehende sofort die Umkehrung.

Bildet die senkrechte Projektion einer Geraden mit der Projektion einer Höhenlinie einen rechten Winkel, so ist die Gerade selbst zur Höhenlinie senkrecht.

Insbesondere:

Die senkrechten Projektionen aller Lote einer Ebene decken sich mit den senkrechten Projektionen der Fallinien der Ebene, sobald die Ebene nicht zur Tafel senkrecht ist

Wenn Geraden oder Ebenen zueinander senkrecht sind, gilt dasselbe von ihren Richtungen und Stellungen (Nr. 4). Es gibt unendlich viele zu einer gegebenen Richtung senkrechte Richtungen, ebenso unendlich viele zu einer gegebenen Stellung senkrechte Stellungen. Dagegen gibt es nur eine zu einer gegebenen Richtung senkrechte Stellung und nur eine zu einer gegebenen Stellung senkrechte Richtung Alle zu einer gegebenen Richtung senkrechten Richtungen treten in denjenigen Ebenen auf, denen die zur gegebenen Richtung senkrechte Stellung zukommt Alle zu einer gegebenen Stellung senkrechten Stellungen kommen denjenigen Ebenen zu, die die zur gegebenen Stellung senkrechte Richtung enthalten Daher kann man alle Aufgaben, bei denen es sich um das Senkrechtstehen handelt, auf eine der beiden Aufgaben zurückführen, entweder die zu einer gegebenen Richtung senkrechte Stellung oder die zu einer gegebenen Stellung senkrechte Richtung zu ermitteln.

19. Lot von einem Punkt auf eine Gerade. Das soeben Gesagte soll an einem Beispiel erläutert werden Gegeben sei eine Gerade AB oder g sowie ein Punkt P, indem A', B', P' sowie die Höhen von A, B, P beliebig angenommen seien, siehe Fig 15. Von P soll das Lot r auf die Gerade gefällt werden Da eine Gerade gegeben ist, d. h. eine Richtung vorliegt, sucht man die zu dieser Richtung senkrechte Stellung Sie kommt derjenigen Ebene durch P zu, die auf AB senkrecht steht. Man legt demnach durch P die zu AB senkrechte Ebene E und ermittelt ihren Schnittpunkt M mit AB Die Gerade PM ist das gesuchte Lot. Die Zeichnung geschieht so: Da E $\perp AB$ ist, sind die Projektionen der Höhenlinien von E zu $A'B'$ senkrecht. Da P in E liegt, geht eine Höhenlinie h durch P. Ihre

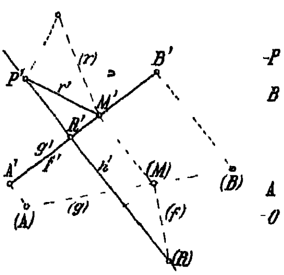


Fig 15

Projektion ist daher die zu $A'B'$ senkrechte Gerade h' durch P' Eine gewisse Fallinie f der Ebene E deckt sich mit $A'B'$. Sie geht durch denjenigen Punkt R von h, dessen Projektion auf $A'B'$ liegt, und der Punkt R hat als Punkt der Höhenlinie h dieselbe Höhe wie P. Da die Fallinie f in der projizierenden Ebene von AB enthalten ist, legt man diese Ebene um $A'B'$ in die Tafel um. Die umgelegte Fallinie (f) ist das Lot zu $(A)(B)$ von (R) aus. Der Fußpunkt (M) des Lotes ist die Umlegung des gesuchten Punktes M, so daß man M' sofort findet. Die wahre Länge des Abstandes r des Punktes P von g ist die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit der einen Kathete $P'M'$ und der anderen Kathete gleich dem Höhenunterschied von P und M. Da die Höhe von M gleich $M'(M)$ ist, kann der Höhenunterschied festgestellt werden.

20. Übungen. Im vorhergehenden sind einige einfache Aufgaben aus der Geometrie des Raumes mittels senkrechter Projektion auf eine Tafel gelöst worden. Wenn überhaupt irgendeine Aufgabe vorliegt, deren Lösung man durch das Konstruieren von geeigneten Punkten, Geraden und Ebenen im Raume anzugeben vermag, so ist man auch imstande, diese Konstruktionen Schritt für Schritt zeichnerisch in senkrechter Projektion auf die Tafel darzustellen. Doch soll nicht verschwiegen werden, daß dies oft zu umständlichen Verfahren Anlaß gibt: erst im dritten Kapitel werden wir auseinandersetzen, wie man in solchen Fällen zweckmäßiger vorgehen kann. In den übrigen Paragraphen des gegenwärtigen Kapitels werden wir aber nur solche Aufgaben behandeln, die schon mittels der hier gelehrten senkrechten Projektion auf eine einzige Tafel ihre einfachste Lösung erfahren.

Noch eine Bemerkung allgemeiner Art. In Nr. 12 wurde erörtert, daß die Tafel durch irgendeine Höhenebene ersetzbar ist. Am Höhenmaßstab braucht man deshalb eigentlich die Nullmarke gar nicht anzugeben, vielmehr genügt es, nur die Höhenunterschiede aller in Betracht kommenden Punkte zu kennen. So ist z. B. bei der Lösung der in Nr. 13 und 14 besprochenen Aufgaben die Nullmarke auf dem Höhenmaßstab gar nicht benutzt worden, sie kann also in Fig. 9 und 10 durch irgendeine Stelle auf dem Höhenmaßstab ersetzt werden, ohne daß dadurch die Zeichnung irgendwie geändert wird. Nur dann, wenn die Tafel für die darzustellenden Gegenstände eine besondere Rolle spielt, ist die Angabe der Nullmarke wesentlich, z. B. wenn es sich um die Darstellung von Bauwerken handelt, die man sich auf der Tafel als wagerechter Ebene aufgebaut denkt, oder wenn ausdrücklich Spurpunkte und Spurgeraden bei der Stellung der Aufgabe genannt werden.

Zur Einübung des bisher Vorgetragenen können die nachfolgenden Aufgaben dienen.

1) Gegeben ein Punkt P durch seine Projektion und Höhe sowie zwei Punkte S_1 und S_2 der Tafel. Wie groß ist $\sphericalangle S_1PS_2$? (Nr. 13.)

2) Gegeben drei Punkte A, B, C durch ihre Projektionen und Höhen. Wo liegt der Spurpunkt der zu AB parallelen Geraden durch C?

3) Gegeben vier Punkte A, B, C, D durch ihre Projektionen und Höhen. Gesucht die wahre Größe der Winkel, die von den beiden im allgemeinen windschiefen Geraden AB und CD bestimmt werden. Zur Lösung lege man die zu CD parallele Gerade durch A.

4) Gegeben vier Punkte A, B, C, D durch ihre Projektionen und Höhen. Auf $A'B'$ und $C'D'$ sind ferner Punkte P', Q' gegeben. Sie sind die Projektionen gewisser Punkte P, Q von AB und CD. Wie lang ist PQ? Welchen Winkel bildet PQ mit der Tafel? (Nr. 8.)

5) Gegeben vier Punkte A, B, C, P durch ihre Projektionen und Höhen. Von P soll das Lot auf die Ebene ABC gefällt werden (Nr. 17). Wo liegt der Fußpunkt Q des Lotes? (Nr. 16.) Wie lang ist PQ?

6) Gegeben fünf Punkte A, B, C, D, P durch ihre Projektionen und Höhen. Gesucht die Projektion derjenigen Geraden durch P, die die Geraden AB und CD schneidet. Die gesuchte Gerade liegt in der Ebene PAB. Demnach ist diese Ebene mit der Geraden CD zu schneiden (Nr. 16).

7) Drei Punkte A, B, C sind durch ihre Projektionen und Höhen gegeben. Den Ort der Mittelpunkte aller durch A, B, C gehenden Kugeln zu ermitteln (Nr. 14).

§ 2. Dächer.

21. Schnitt zweier Ebenen. Eine gegebene Spurgerade s gehört zwei verschiedenen Ebenen an, die mit der Tafel denselben gegebenen spitzen Winkel α bilden. Um eine von beiden zu kennzeichnen, bringen wir einen Pfeil in der Fallrichtung der Ebene an. Ist die Tafel wagerecht, so gibt der Pfeil die Richtung des auf der Ebene herunterfließenden Wassers an.

Die Abstände zwischen den Höhenlinien der Ebene liegen auf den Fallinien und bilden mit der Tafel den Winkel α. Die Höhe h einer Höhenlinie a, ihr seitlicher Abstand von der Spurgeraden, d. h. die Entfernung von s bis zur Projektion der Höhenlinie (Nr. 13), und ihr wahrer Abstand von s sind die Katheten und die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks $A'OA$, in dem $\sphericalangle A'OA = \alpha$ ist. Siehe Fig. 16. Ein derartiges Dreieck würde man bei der Herstellung eines Modells zur Stütze der betrachteten Ebene verwenden, wir nennen es deshalb ein Stützdreieck. Um die Projektion a' der in irgendeiner angenommenen Höhe h gelegenen Höhenlinie zu ermitteln, zeichnet man bequemer das zum Stützdreieck $A'OA$ kongruente Dreieck HAO. Dann ist nämlich HA der seitliche Abstand. Man schlägt also um irgend zwei Punkte von s die Kreise mit dem Radius HA und zieht ihre gemeinsame zu s parallele Tangente a'. Welche der beiden in Frage kommenden Tangenten man zu benutzen hat, ist nicht zweifelhaft. Der Pfeil muß von a' nach s gerichtet sein, falls die Höhe h positiv ist, sonst umgekehrt.

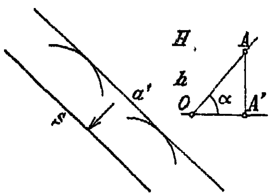


Fig. 16

Um die Schnittgerade g zweier durch ihre Spurgeraden s_1, s_2, ihre Neigungswinkel und ihre Pfeile gegebenen Ebenen zu finden, bedarf man außer des Schnittpunktes S der Spurgeraden, der ja der Spurpunkt von g ist, noch eines Punktes A von g. Man findet ihn durch Benutzung der einfachen, aber wichtigen und schon in Nr. 12 gemachten Bemerkung. Nur solche Höhenlinien zweier Ebenen schneiden einander wirklich, die in gleicher Höhe gelegen sind. Man zeichnet demnach die Projektionen der in einer beliebig angenommenen Höhe h gelegenen Höhenlinien a_1, a_2 beider Ebenen, siehe Fig. 17, und bestimmt ihren Schnittpunkt A'. Die Gerade SA' ist die gesuchte Projektion von g.

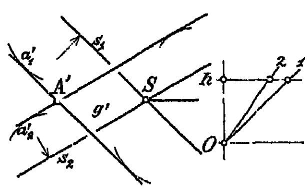


Fig. 17

Nimmt man an, die Tafel und die beiden Ebenen seien undurchsichtig, und begrenzt man die Ebenen oben durch die Höhenlinien a_1, a_2,

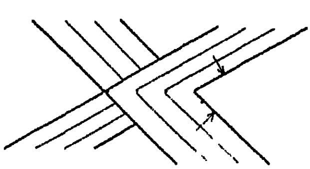


Fig. 18.

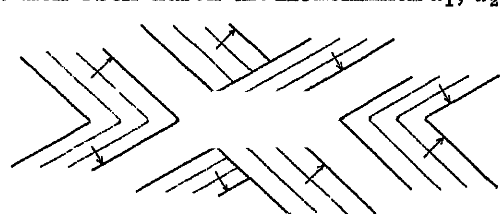


Fig. 19

so ergibt sich der Anblick in Fig 18. In Fig 19 sind die einzelnen Keile dargestellt, aus denen sich Fig. 18 zusammensetzt. Der linke Keil ist durch die Pfeile vom rechten unterschieden Beispiel für links: zwei aneinanderstoßende Dachflachen eines Hauses, Beispiel für rechts· zwei aneinanderstoßende Ränder einer photographischen Entwicklungsschale.

Haben die beiden Ebenen gleiche Neigung zur Tafel, so kommt den Höhenlinien a_1 und a_2 derselbe seitliche Abstand von s_1 bzw. s_2 zu, d. h dann haben a_1 und a_2 gleiche Entfernungen von s_1 und s_2, so daß die Projektion der Schnittgeraden beider Ebenen den Winkel ihrer Spurgeraden in zwei gleiche Teile zerlegt.

22. Gerade durch unerreichbare Punkte. Wenn der Schnittpunkt von s_1 und s_2 oder der von a_1 und a_2 unerreichbar ist, kommt man durch Anwendung einer Hilfsebene zum Ziel· Eine willkurlich gewählte Ebene schneidet jede der beiden gegebenen Ebenen in einer Geraden, diese beiden Geraden treffen sich also in einem Punkt der gesuchten Schnittgeraden g der beiden gegebenen Ebenen. Man kann nun irgend zwei parallele Geraden u und v allemal als die Spurgerade und als die Projektion der in der Hohe h gelegenen Hohenlinie einer Ebene auffassen Indem man wie in voriger Nummer die Projektionen derjenigen beiden Geraden ermittelt, in denen diese Ebene die beiden gegebenen Ebenen schneidet, erhalt man einen Punkt U' der gesuchten Geraden g', siehe Fig 20. Ein zweiter Punkt V' geht hervor, wenn man die Rollen von u und v vertauscht

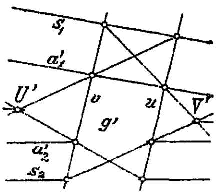


Fig 20

Sieht man von der Bedeutung im Raum ab, so ist hiermit eine Aufgabe aus der Geometrie der Ebene gelost den unerreichbaren Schnittpunkt zweier Geraden mit dem ebenfalls unerreichbaren Schnittpunkt zweier zu ihnen parallelen Geraden zu verbinden.

Besonders erwahnenswert ist der Fall, wo die beiden gegebenen Ebenen parallele Spurgeraden haben Er wird wie soeben erledigt, als Probe der Richtigkeit dient, daß jetzt $U'V'$ zu s_1 und s_2 parallel werden muß Wenn die beiden gegebenen Ebenen nicht nur parallele Spurgeraden, sondern auch gleiche Neigungen zur Tafel haben, ohne jedoch zueinander parallel zu sein, so daß ihre Pfeile nach verschiedenen Seiten zeigen, ist die Projektion ihrer Schnittgeraden die Mittellinie zwischen s_1 und s_2

23. Dreiseitige Ecken und dreiseitige Dächer. Gegeben seien die Spurgeraden s_1, s_2, s_3, Neigungswinkel und Pfeile dreier Ebenen, siehe Fig. 21. Um ihre Schnitte zu bestimmen, benutzt man eine Höhenebene von beliebig gewahlter Hohe h Diese Ebene schneidet die drei gegebenen Ebenen in Höhenlinien a_1, a_2, a_3. Hat man die Projektionen a_1', a_2', a_3' gezeichnet, so findet man sofort die der drei Schnittgeraden. Diese mussen in der Projektion des allen drei gegebenen Ebenen gemeinsamen Punktes P zusammenlaufen Es entsteht das Bild eines auf der Tafel ruhenden allgemeinen Vierflachs (Nr. 15), d. h einer dreiseitigen Pyramide mit gegebener Grundflache und gegebenen Neigungswinkeln der Seitenflächen.

Zur Ermittlung der wahren Gestalt und Größe einer Seitenflache legt man sie um ihre Spurgerade in die Tafel um. Bei der Umlegung der

ersten Fläche z. B. bekommt man die neue Lage der Höhenlinie a_1, indem man die zu s_1 parallele Gerade (a_1) in demjenigen wahren Abstand zieht, der in der Nebenfigur auf dem geneigten Schenkel des zugehörigen Winkels abzugreifen ist. Die auf der Höhenlinie a_1 gelegenen Kantenpunkte beschreiben bei der Umlegung Kreise, die in der Projektion als Lote zu s_1 erscheinen, so daß man ihre Umlegungen auf (a_1) sofort findet. Alsdann kann man die Zeichnung der umgelegten Dreieckseebene ohne weiteres beenden. Mehrere Proben auf die Richtigkeit lassen sich hier machen: Jede Kante eines umgelegten Dreiecks muß gerade so lang wie die benachbarte Kante eines anderen ausfallen, und die Spitzen der umgelegten Dreiecke müssen auf den Loten von P' auf s_1, s_2, s_3 liegen. Um die Höhe der Spitze über der Tafel zu finden, greift man etwa die Entfernung von P' bis s_1 ab und trägt sie in der Nebenfigur auf dem wagerechten Schenkel des zugehörigen Winkels von O aus ab. Der senkrecht über dem Endpunkt gelegene Punkt des anderen Schenkels hat die gesuchte Höhe. Seine Entfernung von O ist gleich der Höhe des ersten umgelegten Dreiecks. Da man auch die zweite oder dritte Seitenfläche benutzen kann, ergeben sich viele Mittel zur Prüfung der Genauigkeit der Zeichnung.

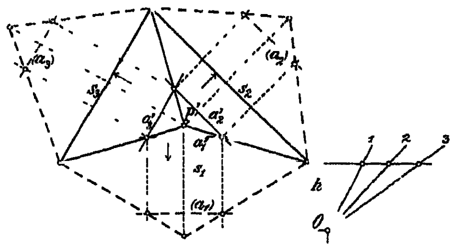


Fig. 21.

In Fig. 21 weisen die Fallrichtungen der drei Ebenen vom Innern des Dreiecks der Spurgeraden nach außen. Anders verhält es sich in Fig. 22, und zwar a) für eine Ebene, b) für zwei und c) für alle drei Ebenen. Diese Zeichnungen erschöpfen noch nicht alle Möglichkeiten, denn im Falle a) kann es noch vorkommen, daß P unter der Tafel liegt, im Falle b), daß P über der Tafel liegt. Handelt es sich um ein dreiseitiges Dach, so kommt nur die in Fig. 21 dargestellte Lagerung vor.

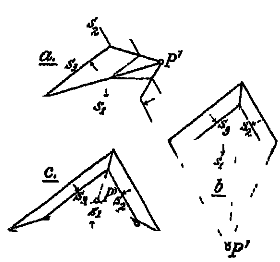


Fig. 22

24. Vierseitige Dächer. Die Ergebnisse der vorhergehenden Nummern sind es, die beständig benutzt werden, wenn es sich darum handelt, die Gestalt eines Dachkörpers zu ermitteln, der geometrisch durch sein Grundvieleck und durch die Steigungen seiner einzelnen ebenen Flächen gegeben ist. Denn augenscheinlich kommt es dabei immer darauf an, die Schnitte von Ebenen zu finden, die durch ihre Spurgeraden und Neigungen zur Tafel gegeben sind. Zunächst besprechen wir die vierseitigen Dächer.

Wir gehen dabei aus von einem auf der wagerecht gedachten Tafel gelegenen Viereck, das wir das Grundviereck nennen. Es soll sich nicht selbst überschneiden. Seine Seiten s_1, s_2, s_3, s_4 seien die Spurgeraden von Ebenen, die mit der Tafel irgendwelche gegebene spitze Winkel bilden. Die Pfeile der Fallrichtungen der Ebenen sollen vom Innern des Vierecks nach außen zeigen. In Fig. 23 hat das Grundviereck keine, in Fig. 24 eine einspringende Ecke,

Mittels einer zur Tafel parallelen Ebene in beliebig zu wählender Höhe h, also mittels eines geeigneten Höhenschnittes, findet man die Projektionen der in dieser Höhe gelegenen Höhenlinien a_1, a_2, a_3, a_4 der Ebenen und demnach wie in Nr. 21 die der Schnittgeraden der Ebenen zu je zweien. Solcher Schnittgeraden gibt es insgesamt sechs, da auch die erste und dritte Ebene sowie die zweite und vierte Ebene einander schneiden. Da die Ebenen zu je dreien einen Punkt gemein haben, treffen die Schnittgeraden zu je dreien zusammen So gehen vier Punkte hervor, die in den Figuren durch Angabe der Ziffern der beteiligten Ebenen als die Punkte *123*, *124*, *134*, *234* gekennzeichnet sind Das Dach wird nun von unten her zunachst bloß so weit aufgebaut, als über seine Gestalt kein Zweifel sein kann. Man geht von jeder Ecke des Grundvierecks auf der Schnittgeraden der dort zusammenstoßenden Ebenen so weit empor, bis diese Schnittgerade eine der beiden anderen Ebenen trifft, d h bis zu dem zuerst zu erreichenden jener vier besonderen Punkte. Das Ergebnis, zu dem man bis dahin kommt, ist durch kraftige Linien hervorgehoben In Fig. 23 wird auf diese Weise sowohl die erste als auch die dritte Ebene vollstandig abgegrenzt, d h hier wird das Dach weiter oben nur noch von der zweiten und vierten Ebene gebildet Deshalb ist nur noch vom Punkt *1 2 4* zum Punkt *2 3 4* die Schnittgerade der zweiten und vierten Ebene zu ziehen. Das Ergebnis ist verkleinert dargestellt. Im Fall der Fig 24 liegt die Sache anders Hier wird zunachst nur die erste Ebene vollstandig abgegrenzt Dies bedeutet Weiter oben ist das Dach so zu konstruieren, als ob es sich wie in Nr 23 um eine dreiseitige Ecke handle, bestehend aus der zweiten, dritten und vierten Ebene Demnach sind nur noch die Kanten bis zur Spitze *2 3 4* auszuziehen Auch hier ist das Ergebnis verkleinert dargestellt.

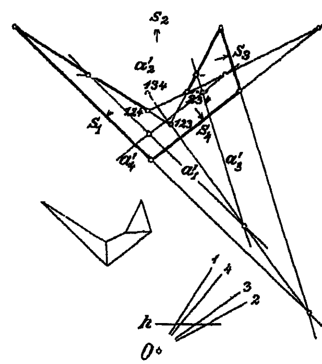


Fig 23

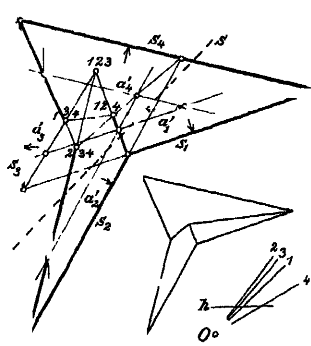


Fig 24

Die wahre Gestalt und Größe einer Dachflache findet man durch Umlegen wie in Nr. 23, ebenso wie dort kann man auch die Höhen der oberen Eckpunkte ermitteln. Einen beliebigen zur Tafel senkrechten Querschnitt, z. B den langs der willkurlich gezogenen Geraden s in Fig 24, bekommt man, indem man die Schnittpunkte von s mit s_1, s_2, s_3, s_4 und mit a_1', a_2', a_3', a_4' auf zwei parallele Geraden s und a in Fig 25 übertragt, wobei s und a voneinander den Abstand h haben müssen. Man hat dann nur die Punkte mit gleichen Ziffern zu verbinden.

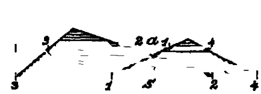


Fig 25

Die hergestellten vierseitigen Dacher haben zwei Eckpunkte *1 2 4* und *2 3 4* über der Tafel. Diese Eckpunkte können im besonderen zusammenfallen; dann ergeben sich vierseitige Turmspitzen.

25. Ausgezeichnete Höhenschnitte eines Daches. Auf der wagerechten Tafel sei ein geschlossenes und sich nicht selbst durchsetzendes Vieleck, das sogenannte Grundvieleck, gegeben, etwa ein n-Eck. In Fig. 26 ist $n = 7$. Auf dem Vieleck soll ein n-seitiges Dach aufgebaut werden. Was unter diesem Dach zu verstehen ist, wird sich dadurch ergeben, daß wir den Dachkörper nach und nach entwickeln.

Zunächst werde der Einfachheit halber angenommen, daß alle n Dachebenen zur Tafel gleich geneigt seien, auch ist dies die meistens bevorzugte Annahme. Wir wollen also die Kanten des Grundvielecks als Spurgeraden von n Ebenen ansehen, die sämtlich mit der Tafel denselben Winkel bilden. Die Fallrichtungen der Ebenen sollen durch die vom Innern des Vielecks nach außen weisenden Pfeile gekennzeichnet sein. Die n Spurgeraden heißen beim Dachkörper die Traufen. Je zwei unmittelbar aufeinander folgende Dachebenen haben eine Schnittlinie; wir können sie entsprechend den bei ihnen beteiligten Dachebenen mit zwei Ziffern bezeichnen, also mit $1, 2-3, 4- n-1, n-n, 1$. Man nennt sie die Grate des Dachkörpers. Die Bilder der Grate bekommt man wie in voriger Nummer durch Anwendung eines Höhenschnittes. Weil alle Dachebenen dieselbe Neigung zur Tafel haben sollen, ergibt sich ein Höhenschnitt ohne weiteres, indem man auf allen n Dachebenen solche Höhenlinien zieht, die den gleichen, übrigens beliebig wählbaren, seitlichen Abstand von den Traufen haben. Die Projektionen der Grate zerlegen augenscheinlich wegen der gleichen Neigung aller Dachebenen die Winkel des Grundvielecks in je zwei gleiche Teile (Nr. 21). Hat man die Grate gezeichnet, so ist es leicht, einen Höhenschnitt in beliebiger Höhe zu verfolgen, so die von den Stellen A und B des Grates $1\,2$ in Fig. 26 ausgehenden. Man ziehe immer die Parallele zu einer Traufe, und zwar bis zum Schnitt mit demjenigen Grat, der zum Endpunkt der betreffenden Traufe gehört. Nun bemerkt man: Liegt der Ausgangspunkt A nicht allzu hoch, so ergeben sich als Höhenschnitte n-Ecke, die sich wie das Grundvieleck nicht selbst durchsetzen, also nicht verschränkt sind. Anders wird es, wenn die Ausgangsstelle höher genommen wird, z. B. in B. Hier tritt eine Verschränkung in der Gegend der Grate $2\,3$ und $3\,4$ ein. Solange der Höhenschnitt ein noch nicht verschränktes n-Eck ist, gehören zur Begrenzung des Dachkörpers alle n Dachebenen, indem ihre n Grate die Schnittkanten sind. Der Übergang von den nicht verschränkten Höhenschnitten zu den verschränkten findet nun in Fig. 26 in der Weise statt, daß in einer gewissen Höhe die auf der Dachebene 3 gelegene Kante des Höhenschnittes gleich Null wird, indem die auf den Graten $2\,3$ und $3\,4$ gelegenen Endpunkte dieser Kante zusammenfallen. Man bekommt demnach diesen Höhenschnitt, den wir einen ausgezeichneten Höhenschnitt nennen, indem man die Grate $2\,3$ und $3\,4$ in P zum Schnitt bringt und dann, von P ausgehend, parallel zu den Traufen von Grat zu Grat geht. Der unterhalb

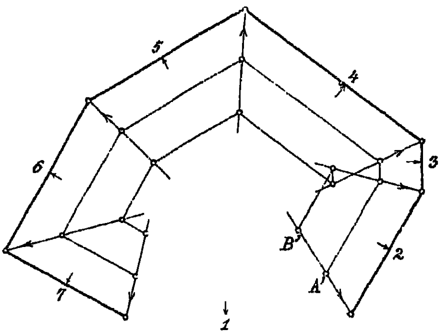


Fig. 26

dieses ausgezeichneten Höhenschnittes gelegene Teil des Dachkörpers ist in Fig. 27 dargestellt; er ist unten durch ein Siebeneck, oben durch ein Sechseck begrenzt und gehört zu denjenigen Körpern, die man Prismatoide nennt

Die Bedeutung des ausgezeichneten Höhenschnittes durch *P* liegt darin, daß es sich oberhalb des Schnittes um die Herstellung eines nur noch (*n*—*1*)-seitigen Daches handelt, denn diejenige Dachebene, in der die zu Null gewordene Kante des Höhenschnittes liegt, scheidet aus, weil diese Ebene durch die in *P* zusammenlaufenden Grate abgegrenzt wird In Fig. 27 ist es die Dachebene *3*, und hier handelt es sich deshalb oberhalb des ausgezeichneten Höhenschnittes um denjenigen Dachkörper, der auf dem mit *1′ 2′ 4′ 5′ 6′ 7′* bezeichneten Grundvieleck steht und also nur noch sechsseitig ist. Da jetzt die Dachebenen *2* und *4* unmittelbar aufeinander folgen, tritt an die Stelle der beiden Grate *2 3* und *3 4* die Schnittlinie *2 4* Sie spielt also für den noch zu ermittelnden Restkörper oberhalb des ausgezeichneten Höhenschnittes die Rolle eines Grates, ist aber kein Grat des gesamten Dachkörpers, da sie nicht von einem Eckpunkt des Grundvielecks ausgeht. Man nennt sie einen First

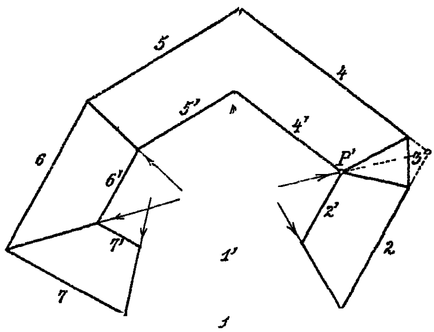


Fig 27

Wie die Untersuchung fortzusetzen und zu beendigen ist, zeigt Fig 28 Nachdem die Tafel durch die Ebene des ausgezeichneten Höhenschnittes ersetzt worden ist, sucht man wie vorhin den ausgezeichneten Höhenschnitt des nur noch (*n*—*1*)-seitigen Restdachkörpers Er geht hier durch *Q*, und ist durch *1″ 2″ 4″ 5″ 6″* dargestellt Nun scheidet auch die Dachebene *7* aus, so daß der First *6 1* an die Stelle der beiden Grate *6 7*

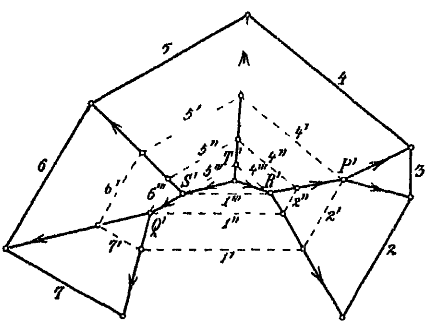


Fig 28

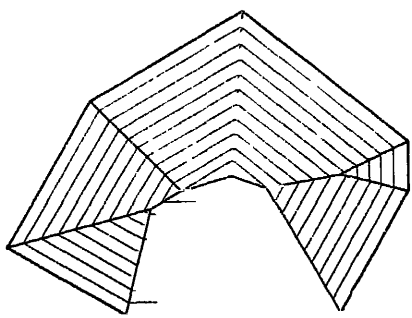


Fig 29

und *7 1* tritt. Der nächste ausgezeichnete Höhenschnitt *1‴ 4‴ 5‴* hat sogar nur noch drei Seiten, indem zugleich die Ebenen *2* und *6* ausscheiden. Hier liegt der besondere Fall vor, daß die Eckpunkte *R* und *S* dieselbe Höhe haben. Schließlich ist *T* die Spitze des obersten dreiseitigen Daches (ihre Bezeichnung ist wegen Platzmangels etwas höher

eingeschrieben). Es hat sich ein Dach mit den Firsten PR, QS, ST, RT ergeben. Fig. 29 stellt das Ergebnis dar, das durch Schraffen in Höhenschnitten von gleichen Schichthöhen anschaulicher gemacht ist.

Der Übergang von den nicht verschrankten Höhenschnitten zu den verschrankten fand vorhin so statt, daß zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Ecken des Schnittes zusammenrückten. Er kann sich aber auch auf andere Weise vollziehen, nämlich dadurch, daß eine Ecke des Schnittes auf eine Kante rückt, die mit dieser Ecke nichts zu tun hat. Dieser Fall tritt in Fig. 30 ein. Hier ist das Grundvieleck ein Siebeneck mit einer einspringenden Ecke. Die Schnittgerade *2 3* zwischen denjenigen beiden Dachebenen, deren Traufen die **einspringende** Ecke bilden, heißt nicht Grat, sondern **Kehle**. Hat man durch Benutzung eines Höhenschnittes die Grate und die Kehle bestimmt, so kann man wie vorher die Gestalt der Hohenschnitte in beliebigen Hohen verfolgen, indem man von verschieden hohen Stellen eines Grates *1 2* ausgeht. Der Schnitt von B aus ist wie in Fig. 26 verschränkt, aber jetzt so, daß die zweite und dritte Kante die sechste durchsetzen. Deshalb ergibt sich der tiefste ausgezeichnete Höhenschnitt, indem man den Punkt P bestimmt, der den drei Dachebenen *2*, *3*, *6* gemein ist und von ihm aus auf den Dachebenen herumgeht. Dieser Hohenschnitt besteht nun aus zwei getrennten und nicht verschränkten Vielecken, die nur in P zusammenstoßen und von denen jedes weniger als n Seiten hat. In Fig. 30 sind es zwei Vierecke. Bis zum Hohenschnitt durch P ist der Dachkörper bekannt, und auf dies Prismatoid sind jetzt noch zwei vierseitige Dacher aufzusetzen.

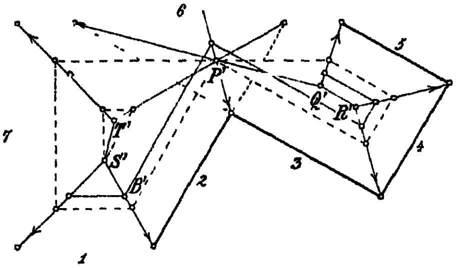


Fig. 30

Die Bedeutung des ausgezeichneten Höhenschnittes durch P liegt darin, daß es sich oberhalb des Schnittes um die Herstellung von zwei getrennten Dachern handelt, von denen jedes weniger als n Seiten hat. Im übrigen ist die weitere Konstruktion in Fig. 30 ersichtlich. Nachdem man die Tafel durch die Hohenebene von P ersetzt hat, handelt es sich links um das Restdach mit den vier Seiten *1*, *2*, *6*, *7*, rechts um das Restdach mit den vier Seiten *3*, *4*, *5*, *6*. Fur das eine ist noch der First *2 6*, für das andere der First *6 3* zu konstruieren. Weiter oben liegen noch zwei ausgezeichnete Hohenschnitte, der durch Q und der durch S. Rechts ist ein besonderes Vorkommnis zu beobachten. Der Höhenschnitt durch Q zieht sich vollstandig in die Strecke QR zusammen. Das hat seinen Grund darin, daß sich die Ebenen *3* und *5* in einer Höhenlinie schneiden, so daß der First QR wagerecht liegt. Links ist über dem ausgezeichneten Höhenschnitt durch S ein nur noch dreiseitiges Dach mit

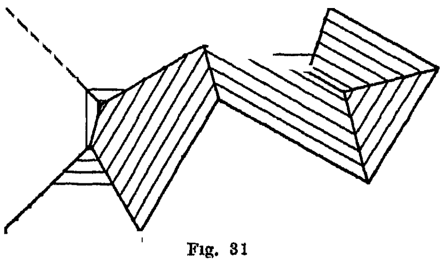


Fig. 31

der Spitze T' herzustellen. Insgesamt ergeben sich vier Firste PQ, QR, PT, ST. Fig. 31 stellt das Ergebnis dar, das durch Schraffen in Höhenschnitten von gleicher Schichthöhe anschaulich gemacht ist.

Zusammengefaßt: Der Dachkörper wird in einzelnen Schichten hergestellt, die durch Höhenebenen begrenzt sind. Diese Ebenen enthalten die ausgezeichneten Höhenschnitte, nämlich diejenigen Höhenschnitte, die durch die oberhalb der Tafel gelegenen Ecken des Dachkörpers gehen. Durch Ermittlung des am tiefsten gelegenen ausgezeichneten Höhenschnittes wird die Aufgabe, ein n-seitiges Dach herzustellen, allemal vereinfacht. Entweder ist der Restkörper ein höchstens $(n-1)$-seitiges Dach, oder er zerfällt in einzelne Dächer, von denen jedes weniger als n Seiten hat. Man ermittelt den am tiefsten gelegenen ausgezeichneten Höhenschnitt als den Übergang zwischen den nicht verschränkten n-seitigen Höhenschnitten, die unmittelbar über der Tafel liegen, zu den verschränkten. Hat man die Schicht zwischen der Tafel und der Ebene des tiefsten ausgezeichneten Höhenschnittes erledigt, also den dazwischengelegenen Prismatoidkörper als Teil des Dachkörpers bestimmt, so ersetzt man weiterhin die Tafel durch die Ebene des Schnittes und verfahrt bei dem oberhalb dieser Ebene gelegenen Rest des Dachkörpers ebenso.

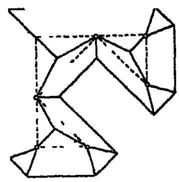


Fig. 32

Die Vereinfachung, die sich durch die Ermittlung eines ausgezeichneten Höhenschnittes ergibt, kann recht beträchtlich sein, z. B. in Fig. 32, wo sechs Ecken des Dachkörpers gleich hoch liegen, wird die Herstellung des elfseitigen Daches auf die von drei dreiseitigen zurückgeführt. Selbstverständlich kann es auch vorkommen, daß die beiden Arten der Verschränkung des Höhenschnittes, die in Fig. 26 und 30 vorgeführt wurden, zugleich eintreten.

In jedem Falle sind wir also in der Lage, Schritt für Schritt den Dachkörper aufzubauen, und es entstehen nirgends Zweifel über den weiteren Aufbau. Demnach ist der Dachkörper durch seine Konstruktion wohldefiniert.

26. Dächer mit verschiedenen Neigungen der Dachebenen. In allem Wesentlichen gilt das Vorhergehende auch dann, wenn die Ebenen des Daches verschiedene Neigungen zur Tafel haben. Bloß die Herstellung der Höhenschnitte ist dann nicht so einfach, weil gleich hoch gelegene Höhenlinien verschieden geneigter Ebenen nicht gleiche seitliche Abstände von den Spurgeraden oder Traufen haben. Man verfährt wie in Fig. 33, wo als Grundvieleck ein Sechseck mit einer einspringenden Ecke angenommen worden ist, so daß hier

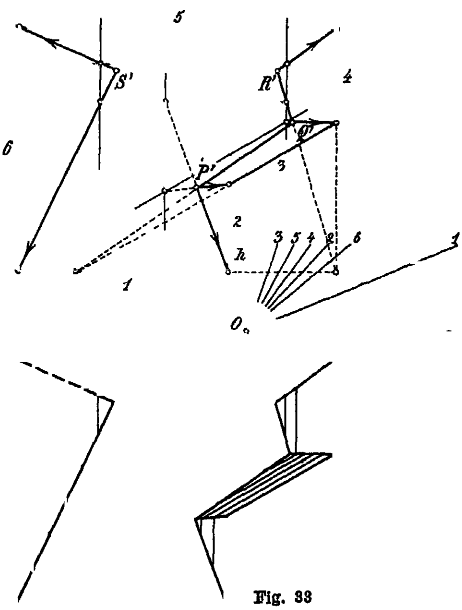


Fig. 33

fünf Grate *12, 34, 45, 56, 61* und eine Kehle *23* vorkommen. Die Nebenfigur veranschaulicht durch die schrägen Geraden *1, 2 ... 6* die Neigungen der Dachebenen zur Tafel. In beliebiger Höhe h über dem Winkelscheitel O schneidet man wagerecht hindurch und kann dann auf dieser Wagerechten von der Senkrechten aus bis zu den Geraden *1, 2, ... 6* die seitlichen Abstände der in der Höhe h gelegenen Höhenlinien abgreifen, also den Höhenschnitt und damit auch die Grate und Kehlen ermitteln. Im übrigen ist alles so wie in voriger Nummer, denn man kann nunmehr wie dort beliebige andere Höhenschnitte dadurch einzeichnen, daß man von irgendeinem Punkte eines Grates aus immer parallel zu den Traufen bis zu der jeweils in der richtigen Reihenfolge darankommenden Grat- oder Kehllinie geht. In Fig. 33 ist der niedrigste ausgezeichnete Höhenschnitt der durch P. Es ergeben sich drei Firste PQ, QR und RS, und der First RS ist wagerecht. Versieht man das Dach mit Schraffen, die Höhenebenen in gleich hohen Schichten übereinander angehören, so zeigt sich an der Enge oder Weite der Schraffen die größere oder geringere Steilheit der Dachebenen, während in Fig. 29 und 31 der letzten Nummer alle Schraffen gleiche Enge hatten. Am besten stellt man die Schraffen her, indem man einen der am längsten erscheinenden Grate in gleiche Teile zerlegt (in Fig. 33 den Grat *61*) und von den Teilpunkten ausgeht. Die Umläufe auf dem Dache, die man dabei ausführt, müssen sich stets schließen. Daraus sieht man z. B., daß die Zeichnung eines Daches in Fig. 34 falsch ist.

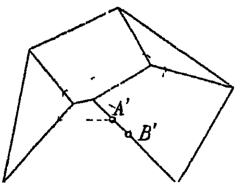


Fig. 34

Insbesondere kann es vorkommen, daß auch lotrechte Ebenen (Mauern) den Dachkörper begrenzen. Dann entstehen Giebelwände. So hat das sechsseitige Dach in Fig. 35 zwei Giebelwände *1* und *4*.

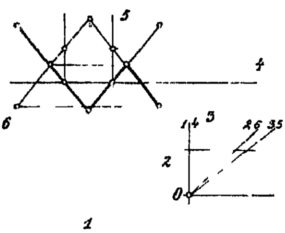
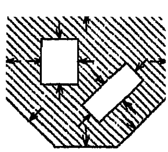


Fig. 35

Da die Betrachtungen der letzten Nummer, wie gesagt, in allem Wesentlichen auch in dem allgemeineren Falle von verschieden geneigten Dachebenen gelten, so leuchtet ein, daß auch in diesem Falle beim Aufbau des Dachkörpers nirgends Zweifel über den weiteren Fortgang entstehen. Also auch jetzt ist der Dachkörper wohldefiniert.

27. Dächer mit Höfen. Die Grundfläche eines Daches ist nicht immer, wie wir bisher annahmen, das ganze Innere eines geschlossenen und nicht verschränkten Vielecks. Vielmehr können aus dieser Fläche einzelne Teile durch ebenfalls geschlossene und nicht verschränkte Vielecke ausgespart sein. Dann ergeben sich Dächer mit Höfen. Die Grundfläche kann z. B. wie in Fig. 36 äußerlich durch ein Sechseck und innerlich durch zwei Vierecke begrenzt sein. In diesem Fall gibt es $6 + 2 \cdot 4 = 14$ Dachebenen. Die Fallrichtungen sind allemal durch die vom Innern der Grundfläche nach den Traufen gerichteten Pfeile gegeben. Zu Fig. 36 gehören sechs Grate; sie enden in den Ecken des äußeren Sechsecks. Außerdem treten acht Kehlen auf; sie


Fig. 36.

enden in den Ecken der beiden inneren Vierecke Nimmt man z. B. an, daß alle Dachebenen gleiche Neigung haben, so entsteht das im größerem Maßstab in Fig 37 dargestellte Dach. Die Hofe sind hier durch enge Schraffen hervor gehoben, und die Fallrichtungen aller Dachebenen sind angegeben, damit man die Form des Daches besser erfassen kann. Man wird leicht angeben konnen, in welchem Sinne die verschiedenen Firste dieses Daches fallen.

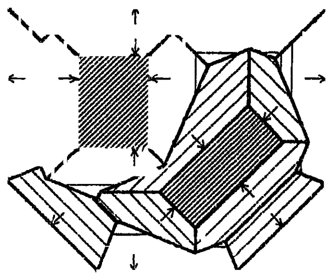


Fig 37

Die Konstruktion von Dachern mit Hofen geschieht geradeso wie fruher Der einzige, aber unwesentliche Unterschied besteht darin, daß die zunachst uber der Tafel gelegenen Höhenschnitte aus mehreren einzelnen nicht verschrankten und einander nicht uberschneidenden geschlossenen Vielecken bestehen Die Verschrankung in großerer Hohe kann daher auf zweierlei Art eintreten, entweder indem sich eines dieser Vielecke selbst verschrankt oder indem eines uber ein anderes herubergreift Der tiefste ausgezeichnete Hohenschnitt laßt sich daher in derselben Art wie in Nr 25 ermitteln

28. Zusammengesetzte Dächer. Wie man zum Begriff eines zusammengesetzten Daches kommt, erhellt am besten an einem Beispiel Fig 38 zeigt ein Grundvieleck von sieben Seiten Wird der Einfachheit halber angenommen, daß alle Dachebenen dieselbe Neigung haben, so liefert das in Nr 25 auseinandergesetzte Verfahren das dargestellte Dach Aber man pflegt in dem vorliegenden Fall ein anderes Dach uber dem gegebenen Grundvieleck zu errichten, namlich das in Fig 39 dargestellte Hier ist die Ebene *2* noch mit der Ebene *6* zum Schnitt gebracht, infolgedessen gehen von der Ecke *A* des Grundvielecks zwei Kanten *2 5* und *2 6* aus Dies entspricht nicht der Definition des Daches, die sich in Nr. 25 durch die dort durchgefuhrte Konstruktion ergab, denn damals ging von jeder Ecke des Grundvielecks nur ein Grat oder nur eine Kehle aus, wahrend hier von *A* sowohl ein Grat *2 5* als auch eine Kehle *2 6* ansteigt. Das Dach in Fig. 39 ist aber auch auf ganz andere Weise entstanden. Man nehme zunachst wie in Fig. 40 zwei getrennte Grundflachen an, errichte über beiden nach dem früheren Verfahren die Dächer (wobei eine Giebelwand *8* auftritt) und schiebe schließlich die beiden entstandenen Dachkörper so ineinander, daß die gesamte Grundfläche die in Fig. 39 wird. Dabei hat man die

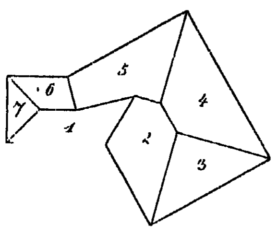


Fig 38

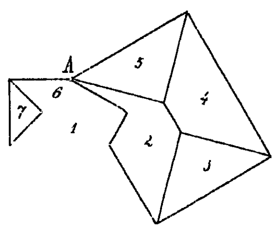


Fig 39

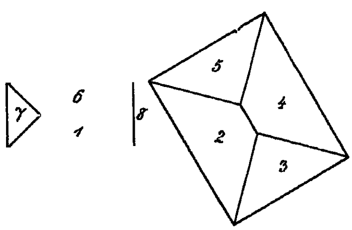


Fig 40.

Ebenen *1* und *6* des linken Dachkörpers mit der Ebene *2* des rechten Dachkörpers zum Schnitt zu bringen, und so entsteht das in Fig 39 dargestellte Ergebnis. Unter zusammengesetzten Dachern sind danach solche Gebilde zu verstehen, die durch das Ineinanderschieben von mehreren einzelnen Dachkorpern hervorgehen

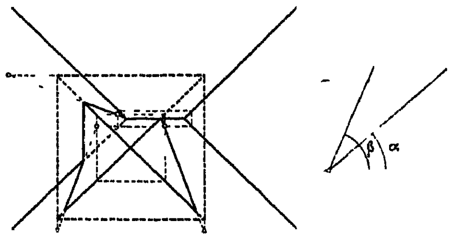


Fig 41

Zu ihnen gehoren die Dacher mit aufgesetzten Turmspitzen, wofür Fig. 41 ein Beispiel gibt. Die Grundflache der vierseitigen Turmspitze und die Konstruktion der Durchdringungen ist angedeutet, α und β sollen die Winkel sein, die von den Ebenen des Daches und den Ebenen der Turmspitze mit der Tafel gebildet werden. Auch die Mansardendächer, bei denen die einzelnen Dachflachen aus je zwei Ebenenstreifen bestehen, die langs Hohenlinien aneinandergrenzen, kann man aus einfachen Dachern zusammensetzen Zuerst stellt man ein Dach wie früher her, dann schneidet man es durch eine Höhenebene ab wodurch sich in dieser Ebene ein neues Grundvieleck ergibt, auf dem man nun ein neues Dach mit anderen Neigungen aufbaut, siehe Fig. 42, wo die Höhe des Knickes aus der Nebenfigur zu ersehen ist. Das ursprüngliche Dach ist in dieser Figur vollstandig angedeutet. Auf Dacher, deren Traufen nicht samtlich in gleicher Hohe liegen, kommen wir gelegentlich zuruck (in Nr. 106).

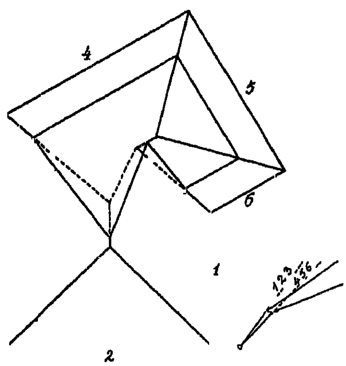


Fig 42

29. Dachausmittlung. Die Grundflache eines Daches wird durch den Entwurf eines Gebaudes bedingt und hat meistens eine mehr oder weniger regelmaßige Gestalt Gewöhnlich steht es dann noch frei, die Neigungen der Dachebenen zu wahlen, auch kann man statt eines einfachen Daches zuweilen ein zusammengesetztes anbringen. Es liegt also eine ziemlich unbestimmte Aufgabe vor, die der sogenannten Dachausmittlung. Sie ist mehr Gegenstand der Baukunst, und wir machen nur einige auf sie bezügliche Bemerkungen.

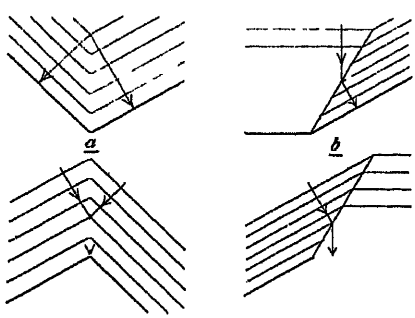


Fig 43.

Die Fallinien der Dachebenen sind auch in der Zeichnung zu den Traufen senkrecht (Nr. 17). Nun können diese Linien auf zwei benachbarten Dachebenen in den vier in Fig. 43 dargestellten Arten verlaufen. Die oberen Zeichnungen beziehen sich auf einen Grat, die unteren auf eine Kehle.

Die Falle b), in denen das Regenwasser von einer Dachebene auf die andere überfließt, wünscht man zu vermeiden. Demnach soll in der Projektion kein Grat mit einer anstoßenden Traufe einen stumpfen Winkel und keine Kehle mit einer anstoßenden Traufe einen spitzen Winkel bilden. Haben beide Dachebenen dieselbe Neigung, so treten die zu vermeidenden Falle nie ein. Das Dach in Fig. 33, Nr. 26, zeigt den Fehler bei der Kehle *2 3*.

Alle Dachebenen sollen, wenn möglich, dieselbe Neigung haben. Nicht wagerechte, d. h. nicht zur Tafel parallele Firste sehen häßlich

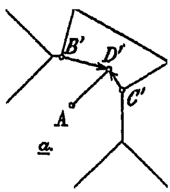


Fig 44

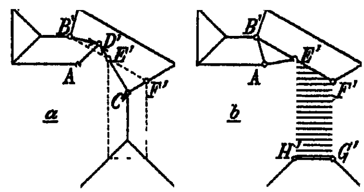


Fig 45

aus und sollen deshalb vermieden werden. In Fig. 44a, wo alle Dachebenen dieselbe Neigung haben, kommen die nicht wagerechten Firste BD und CD vor. Man beseitigt sie, indem man die Ebene durch A, B, C einfugt, die allerdings eine andere Neigung hat, siehe Fig. 44b. Diese Auskunft ist moglich, weil B und C gleich hoch liegen Anders verhalt es sich in Fig. 45a, wo B tiefer als C liegt. Hier wird man das Dach durch die Höhenebene von B abschneiden, indem man noch eine Ebene ABE einschaltet, siehe Fig 45b. Dabei entsteht eine Plattform $EFGH$, auf die man noch ein zweites Dach mit sehr geringen Neigungen setzen kann, so daß es von unten her nicht zu sehen ist, also auch ein schrager First nicht in Erscheinung tritt Ein anderes Verfahren besteht darin, daß man eine Ecke des Dachkorpers abschneidet. So wird der in Fig. 46a mit dem Pfeil versehene First beseitigt, wie es Fig 46b zeigt

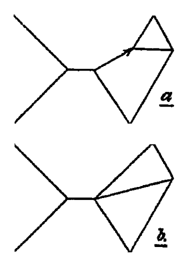


Fig 46

Stößt ein Dach an eine Mauer eines Nachbargebaudes, so soll man es so einrichten, daß die Fallinien nicht nach dieser Mauer hin gerichtet sind Dazu hilft z. B. in Fig. 47 die Einfugung zweier neuer Dachebenen mit wagerechtem First.

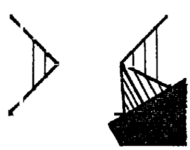


Fig 47.

30. Übungen. 1) Von einer dreiseitigen Pyramide ist die Grundfläche gegeben, außerdem kennt man die Längen der von der Spitze ausgehenden Kanten. Man bestimme die Neigungen der Seitenebenen zur Grundebene (Nr. 23). Was für ein Satz der Planimetrie ergibt sich dabei?

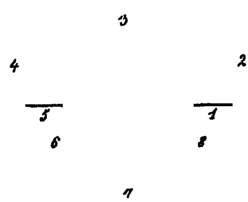


Fig. 48

2) Über dem Achteck in Fig. 48 soll ein Dach hergestellt werden für den Fall, wo die Ebenen *1*, *2*, *3*, *4*, *5* eine gleiche Neigung sowie die Ebenen *6*, *7*, *8* eine andere gleiche Neigung haben. Je nach-dem man die erste oder zweite Neigung

größer wählt, ergeben sich wesentlich verschiedene Gestalten. Kann man die Neigungen so wählen, daß nur wagerechte Firste vorkommen? Wenn man die Ebenen *1* und *5* als eine Ebene auffaßt, kann man das Dach als zusammengesetztes Dach nach Nr. 28 entstehen lassen? Ergibt sich dabei dasselbe oder etwas anderes?

3) Die Ebenen *1* und *5*, ferner die Ebenen *2* und *4* und schließlich die Ebenen *6* und *8* des Daches mit dem Grundvieleck der Fig. 48 sollen gleiche Neigung haben. Insbesondere kann man die Neigungen so wählen, daß gar kein First vorkommt.

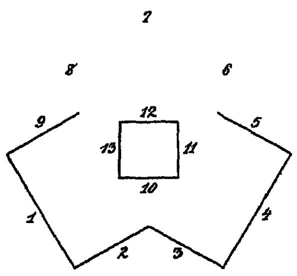


Fig. 49

4) Über dem in Fig. 49 angegebenen Grundvieleck mit Hof soll ein Dach hergestellt werden unter der Annahme, daß die Ebenen *1*, *4*, *7*, ferner die Ebenen *2*, *3*, *5*, *6*, *8*, *9* und schließlich die Ebenen *10*, *11*, *12*, *13* gleiche Neigung haben. Je nachdem man von diesen drei Neigungen die eine oder andere größer annimmt, gehen wesentlich verschiedene Gestalten hervor.

5) Wie viele Firste kann ein Dach über einem Fünfeck oder Sechseck höchstens haben?

§ 3. Böschungen.

31. Böschungskegel. Bei der Herstellung sogenannter Böschungen bezeichnet man den spitzen Winkel α, den eine Ebene mit der wagerecht gedachten Tafel bildet, als ihren Böschungswinkel. Unter dem Gefälle der Ebene versteht man den Wert von $\operatorname{tg}\alpha$. Er kann irgendeine positive Zahl sein und ist zugleich das Gefälle der Fallinien der Ebene (Nr. 17).

Unter P sei irgendein Punkt der Ebene verstanden. Sein seitlicher Abstand r von der Spurgeraden s der Ebene ist die Entfernung $P'R$ seiner Projektion P' von s (Nr. 13), seine Höhe h die Strecke $P'P$. Diese beiden Strecken r und h sind die Katheten eines rechtwinkligen Stützdreiecks $RP'P$ (Nr. 21), die Hypotenuse PR ist die durch P gehende Fallinie der Ebene. Es ist $\sphericalangle P'RP = \alpha$ und $\operatorname{tg}\alpha = h : r$, siehe Fig. 50.

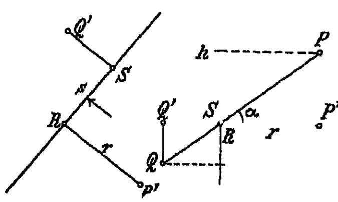


Fig. 50

Ein unter der Tafel gelegener Punkt Q der Ebene hat eine negative Höhe. Die Formel $\operatorname{tg}\alpha = h : r$ bleibt daher für ihn nur dann richtig, wenn man auch den seitlichen Abstand des Punktes Q von der Spurgeraden negativ annimmt. Demnach sei verabredet: Der seitliche Abstand eines Punktes der Ebene von der Spurgeraden soll positiv oder negativ gerechnet werden, je nachdem der Punkt über oder unter der Tafel liegt, d. h. je nachdem die Richtung von seiner Projektion nach der Spurgeraden hin den Sinn des Pfeils der Fallrichtung (Nr. 21) oder den entgegengesetzten Sinn hat. In Fig. 50 soll also $P'R$ positiv und $Q'S$ negativ gerechnet werden.

Jetzt sei angenommen, ein Punkt P werde durch seine Projektion P' und seine Höhe h gegeben. Außerdem sei ein bestimmtes Gefälle, also eine positive Zahl t, gegeben. Wir betrachten die Gesamtheit derjenigen

Ebenen durch P, denen dies Gefalle t zukommt. Da $t = h \; r$ ist, muß die Spurgerade s einer jeden derartigen Ebene von P' den Abstand $r = h : t$ haben, d h. die Spurgeraden s aller dieser Ebenen sind die Tangenten des Kreises um P' mit dem Radius $r = h : t$. Dieser Kreis heißt der zum Gefalle t gehorige **Böschungskreis** des Punktes P, sein Radius r der zugehorige **Boschungsradius**. Die Fallrichtung einer durch P gehenden Ebene vom Gefalle t wird durch einen Pfeil dargestellt, der von P' nach der Spurgeraden s zeigt, wenn P eine positive Höhe hat, sonst umgekehrt. Die Gesamtheit aller durch P gehenden Ebenen vom Gefalle t ist die Gesamtheit der Tangentialebenen desjenigen geraden Kreiskegels, dessen Spitze P und dessen Grundkreis der Böschungskreis ist. Dieser Kegel heißt der zum Gefalle t gehörige **Böschungskegel** des Punktes P. Seine Mantellinien sind diejenigen Geraden von P aus, die mit der Tafel den durch $\operatorname{tg} \alpha = t$ bestimmten spitzen Winkel bilden. Jede Tangentialebene berührt den Kegel langs einer dieser Mantellinien, die ihre von P ausgehende Fallinie ist. Die Mantellinien kann man sowohl über P hinaus als auch uber den Böschungskreis hinaus beliebig weit fortsetzen. Dementsprechend setzt sich auch der Boschungskegel über seine Spitze P hinaus als Scheitelkegel fort, und er geht auch uber den Grundkreis hinaus. Die Hohenebenen schneiden den Kegel in Kreisen, deren Projektionen die konzentrischen Kreise um P' sind In Fig 51 ist der Boschungskegel nebst einer Tangentialebene in senkrechter Projektion dargestellt, und zwar im Fall a) fur einen Punkt P uber der Tafel, im Fall b) fur einen Punkt Q unter der Tafel Man ermittelt den zu einem bestimmten Gefalle t (z B $t = 0{,}8$) gehorigen Boschungsradius so Mit irgendeinem bequemen Maßstab, z B dem Zentimeterstab, tragt man die Strecke Eins von O bis 1 wagerecht und die zu t gehorige Strecke (also 0,8) von O bis t senkrecht auf, und zwar diese zweite Strecke auf dem Hohenmaßstab. Die Parallele zur Geraden von t nach 1 durch die Marke P bzw. Q des Hohenmaßstabes schneidet dann auf der Wagerechten durch O den Boschungsradius r_p bzw r_q ab In Fig. 51 sind nur oberhalb der Tafel gelegene Teile der Boschungskegel gezeichnet.

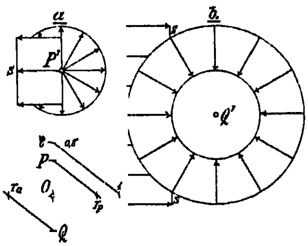


Fig 51

Aus den Nebenfiguren entnimmt man leicht, wie sich der Böschungsradius von P bzw. Q andert, wenn die Tafel durch eine Hohenebene ersetzt wird (Nr 12). Dabei andert sich unter Umstanden auch das Vorzeichen oder die Pfeilrichtung, nämlich dann, wenn die alte und neue Tafel den Punkt P oder Q zwischen sich einschließen.

32. Ebenen von gegebenem Gefälle durch eine gegebene Gerade. Zwei Punkte A und B seien durch ihre senkrechten Projektionen und Höhen und das Gefalle sei durch irgendeine positive Zahl t gegeben. Nun soll durch die Gerade AB eine Ebene vom Gefälle t gelegt werden. Zunachst ermittelt man die Radien r_a und r_b der Böschungskreise von A und B, siehe Fig 52, wo $t = 1{,}5$ gewählt worden ist. Alsdann zeichnet man die Böschungskreise um A' und B' Die Spurgerade der gesuchten Ebene muß gemeinsame Tangente beider Kreise sein, aber so liegen,

daß die Pfeile der Böschungskegel in gleichem Sinne zu ihr gerichtet sind. In Fig. 52 gibt es also zwei Ebenen durch AB mit dem vorgeschriebenen Gefälle. In Fig. 53, wo B unterhalb der Tafel liegt, gilt dasselbe. Da AB die Schnittgerade beider Ebenen ist, gehen ihre Spurgeraden s_1 und s_2 durch den Spurpunkt S von AB.

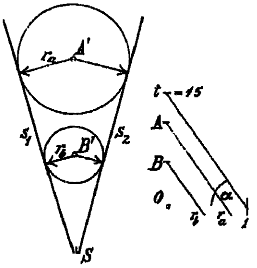


Fig. 52

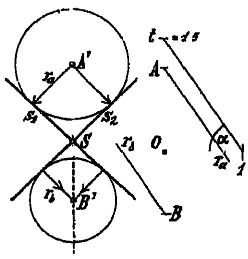


Fig. 53

Nicht immer gibt es zwei Ebenen. Es gibt nur eine, wenn die Gerade AB selbst mit der Tafel den Böschungswinkel α bildet, indem dann die Böschungskreise von A und B einander in S berühren und die Gerade AB Fallinie der Ebene ist. Es gibt keine Ebene, wenn AB mit der Tafel einen größeren Winkel als α bildet. Dann haben die Böschungskreise keine Tangente gemein.

33. Böschungen im Gelände. Unter dem Gelände (Terrain, topographischer Fläche) wird eine mehr oder weniger von der wagerecht gedachten Tafel abweichende und im allgemeinen krumme Fläche verstanden, die Oberfläche des natürlichen Erdreichs. Sieht man vom Vorkommen senkrechter oder überhangender Erdwände und von Höhlenbildungen ab, so wird die Geländefläche von jedem auf die Tafel errichteten Lot einmal, aber auch nur einmal getroffen. Die Höhenlinien des Geländes (Nr. 12), die im allgemeinen krumm sind, liegen daher so, daß die senkrechten Projektionen zweier in verschiedenen Höhen befindlichen Höhenlinien einander nicht schneiden. Wir beschränken uns gegenwärtig auf ebenflächige Gelände, die also nur aus Stücken von Ebenen bestehen. Ihre Höhenlinien sind gebrochene Linien. Abgesehen von der Tafel selbst und den Höhenebenen sind die einfachsten Gelände die Abhänge, d. h. schräge Ebenen. Zwei Abhänge zusammen bestimmen die geometrisch einfachste Gestalt eines Bergrückens oder eines Tales.

Durch Auftragen von Erdmasse über dem Gelände sowie durch Abtragen von Erdmasse aus dem natürlichen Erdreich stellt man Erdwerke her. Ihre seitlichen Begrenzungen werden dadurch bedingt, daß die Erdmasse ihren Halt verliert, sobald die Neigung ihrer Außenfläche zur Tafel einen gewissen natürlichen Böschungswinkel übertrifft. Dieser Winkel liegt je nach der Beschaffenheit der Erdmasse zwischen 20 und 50 Grad, sein Tangens also, das natürliche Gefälle, zwischen etwa 0,4 und 1,2. Wir betrachten hier im wesentlichen ebenflächig begrenzte Erdwerke. Ihre Seitenflächen sind Ebenen mit dem natürlichen Böschungswinkel. Das natürliche Gefälle ist beim Auftragen von Erdmasse, bei den sogenannten Auftrags- oder Dammböschungen, im allgemeinen geringer anzunehmen als beim Abtragen des gewachsenen Bodens, bei den sogenannten Abtrags- oder Einschnittböschungen. Im folgenden wird das Gefälle von Dammböschungen mit t und das von Einschnittböschungen mit τ bezeichnet, so daß $t < \tau$ zu wählen ist. Die zugehörigen Böschungsradien werden wir mit r und ϱ bezeichnen, so daß $r > \varrho$ sein wird.

Die Zeichnung eines Erdwerkes mit Böschungen erfordert einerseits die wiederholte Lösung der Aufgabe von Nr. 32, durch eine Gerade in beliebiger Lage eine Böschungsebene von gegebenem Gefalle zu legen, und andererseits, daß man die vorkommenden Ebenen durch einander begrenze, also ihre Schnitte bestimme, was nach Nr. 21 durch Benutzung von Hohenlinien in gleicher Höhe, insbesondere auch der Spuren, geschieht. Man muß sich immer daruber klar werden, welche der beiden möglichen Boschungsebenen von gegebenem Gefälle durch eine gegebene Gerade zu benutzen ist Wird z. B. von einer Geraden SA aus, deren Spurpunkt S ist, wie in Fig 54 nach rechts hin eine Dammböschung vom gegebenen Gefalle t angebracht, so ist es klar, daß die zugehörige Spurgerade s_1 die von S nach rechts gehende Tangente an den zu t gehörigen Böschungskreis von A ist Nun soll aber auch oberhalb SA nach links hin ein Einschnitt ins Erdreich gemacht werden Die Spurgerade s_2 der Einschnittböschungsebene ist, weil sie unterhalb SA liegt, die von S nach rechts gehende Tangente an den zum gegebenen Gefalle τ gehörigen Boschungskreis von A.

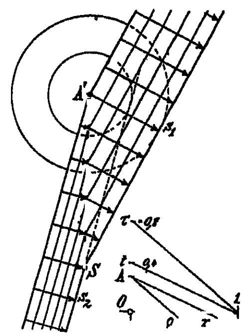


Fig 54

34. Einfache Boschungskorper. Die Tafel selbst sei das Gelande, eine von einem Punkt S der Tafel bis zu einem Punkt A uber der Tafel ansteigende Gerade soll durch Dammboschungen gestutzt werden

Zunachst sind wie in Nr 32 die beiden Ebenen vom Gefalle t durch SA zu legen Ihre Spurgeraden sind die von S ausgehenden Tangenten des Böschungskreises von A, siehe Fig 55 Nun muß man sich vorstellen, der Boschungskorper entstehe, indem von allen Stellen der Strecke SA Erdmasse hinabgeschuttet wird, so daß jeder Punkt P von SA die Spitze eines Böschungskegels ist Der Boschungskörper ist also derjenige Raum, den alle diese Kegel erfullen Mithin hat die Oberflache des Boschungskorpers außer zwei ebenen Teilen noch einen kegelformigen Abschluß durch einen Teil des Boschungskegels von A. Der Übergang zwischen dem ebenen und diesem gerundeten Teil findet langs derjenigen Mantellinien statt, langs deren die beiden Ebenen den Kegel beruhren Durch Einzeichnen von Hohenschnitten in gleichhohen Schichten wird der Körper anschaulicher gemacht Jeder Höhenschnitt ist geschlossen und besteht aus zwei Strecken und einem Kreisbogen. Die Strecken treffen einander auf dem sogenannten Grat SA des Böschungskörpers.

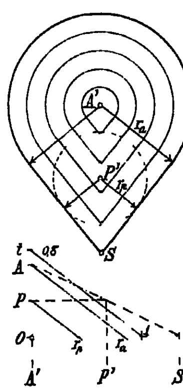


Fig 55

Eine oberhalb der Tafel befindliche Strecke AB laßt sich durch Dammböschungen stützen, wenn AB mit der Tafel einen Winkel bildet, der kleiner als der Böschungswinkel ist. In diesem Fall entsteht ein Böschungskörper mit dem Grat AB; an seinen Enden wird er durch Teile der Böschungskegel von A und B, dazwischen durch Teile der gemeinsamen Tangentialebenen beider Kegel begrenzt.

Setzt man mehrere Strecken SA, AB, BC usw. wie in Fig. 56 zu einer gebrochenen Linie aneinander, so läßt sich diese Linie ebenfalls durch Dammböschungen stützen, falls keine Strecke stärker geneigt ist als die Dammböschung. Der entstehende Böschungskörper weist geradlinige, von A und B ausgehende Kehlen auf, d. h. Schnittlinien aufeinander folgenden Tangentialebenen. Die gebrochene Linie $SABC$ kann übrigens auch so gestaltet sein, daß der Böschungskörper sich selbst durchdringt. Von diesem Falle sehen wir jedoch ab.

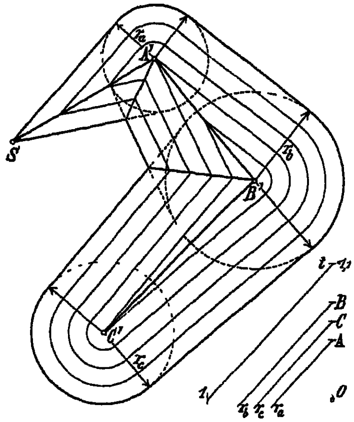


Fig. 56

35. Verebnen von Grundstücken. Ein irgendwie abgegrenzter Teil des Geländes heißt ein Grundstück. Ist die Gestalt des Geländes bekannt, so wird das Grundstück durch die senkrechte Projektion seiner Grenze gegeben. Wir beschränken uns auf Grundstücke, deren Grenzen geschlossene gebrochene Linien sind. Zum Nutzbarmachen muß man das Grundstück verebnen oder planieren, nämlich wagerecht gestalten. Dabei ist es durch Böschungen zu sichern. Je nachdem die Grenze beim Verebnen über das Gelände gehoben oder darunter gesenkt wird, ist eine Damm- oder Einschnittböschung mit dem Gefälle t oder τ anzubringen.

Wir betrachten hierhergehörige Aufgaben unter der Annahme, daß das Gelände etwa aus der Tafel selbst, aus einem Abhang und aus einer zur Tafel parallelen, aber höhergelegenen Ebene bestehe. Dann ist der Abhang ein Streifen, der unten durch seine Spurgerade s, oben durch eine Höhenlinie $h \parallel s$ begrenzt wird. Die Höhe von h soll gegeben sein. Die senkrechte Projektion des Grundstücks ist im einfachsten Fall ein Dreieck $A'B'C'$.

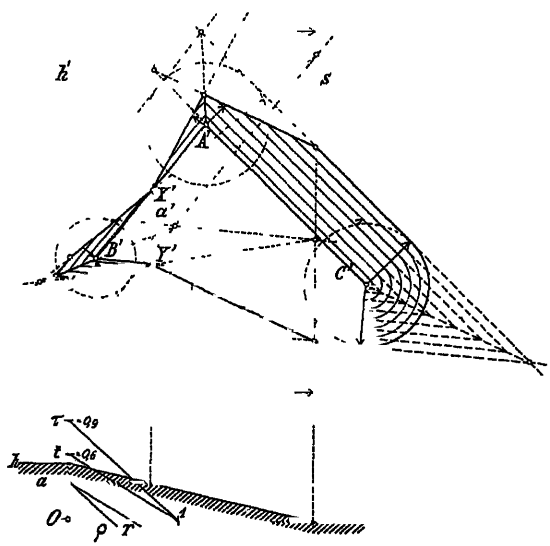


Fig. 57

Nunmehr soll das Grundstück so verebnet werden, daß es wagerecht wird. Am Höhenmaßstab in Fig. 57 ist die zu erreichende Höhenlage durch die Marke a angedeutet. Nach dem Verebnen liegt das Grundstück tiefer als die wagerechte Geländeebene jenseits h, und seine Ränder AB und BC werden an gewissen Stellen X und Y in den Abhang eindringen. Sie liegen auf derjenigen Höhenlinie a des Abhanges,

der die Höhe des Grundstücks zukommt, und man findet die Projektion dieser Höhenlinie leicht. Das Gefälle der Ebene des Abhanges wird durch das der geschrafften schragen Geraden der Nebenfigur dargestellt. Aus dem Schnitt in der Höhe der Marke a entnimmt man den seitlichen Abstand der Höhenlinie a von s oder h, so daß man a' zeichnen kann. Die Schnittpunkte von a mit AB und BC sind die Punkte X und Y. Nun weiß man, daß längs XA, AC, CY Dammböschungen und langs XB und BY Einschnittböschungen anzubringen sind. Man ermittelt die Böschungsradien r und ϱ für die Hohe des Grundstücks und schlägt dann um A, B', C' die Böschungskreise. Die Dammböschungsebenen haben zu XA, AC, CY parallele Spurgeraden, und diese Spurgeraden sind Tangenten der Boschungskreise vom Radius r, und zwar diejenigen zu $X'A'$, $A'C'$, $C'Y'$ parallelen Tangenten, die vom Grundstück aus gerechnet nach außen liegen. Dagegen haben die Einschnittböschungsebenen solche zu $X'B'$ und $B'Y'$ parallele Spurgeraden, die nach innen zu gelegene Tangenten der Böschungskreise von A, B, C mit dem Radius ϱ sind. Da von allen funf vorkommenden Boschungsebenen die Spurgeraden und die Höhenlinien in der Hohe des Grundstücks, namlich AB, BC, CA, bekannt sind, und auch vom Abhang die Spurgerade s sowie die Höhenlinie a in der Hohe des Grundstucks vorliegt, kann man alle in Betracht kommenden Schnittgeraden nach Nr. 21 ermitteln. Das Ergebnis wird durch Angabe der Hohenschnitte in gleichhohen Schichten anschaulicher gemacht. Den Abschluß der Aufschuttung kann man mittels des Boschungskegels von C bewirken, wie es in der Zeichnung dargestellt ist. Die Einschnittboschungen werden oben noch von der wagerechten Ebene des Gelandes jenseits von h begrenzt und zwar durch Hohenlinien, also durch Parallelen zu BX und BY.

Eine allgemeinere Aufgabe ist die, das Grundstuck so zu verebnen, daß die Ecken A, B, C verschiedene vorgeschriebene Hohen bekommen. In diesem Falle findet man die Punkte X und Y, in denen die Grenzen des Grundstücks den Abhang treffen, nicht mehr durch Benutzung einer Hohenlinie a des Abhanges, weil jetzt die Treffpunkte, wenn sie überhaupt vorhanden sind, in verschiedenen Höhen liegen werden. Man laßt es daher zunachst noch dahingestellt, wo die Treffpunkte sind, und stellt langs aller drei Seiten AB, BC, CA sowohl die Dammboschungsebenen als auch die Einschnittböschungsebenen her. Ihre Spurgeraden sind gemeinschaftliche Tangenten der entsprechenden und jetzt verschieden großen Böschungskreise. Dabei ist zu beachten, daß die Ebenen der Einschnittböschungen oberhalb des Grundstücks nach außen, vom Grundstuck aus gerechnet, gehen, also unterhalb des Grundstücks nach innen, so daß man weiß, welche gemeinschaftlichen Tangenten der Böschungskreise als Spurgeraden benutzt werden müssen. Man kann ferner diejenigen Höhenlinien aller Böschungsebenen und der Ebenen des Abhanges zeichnen, die in einer willkurlich angenommenen Höhe liegen. Folglich kann man auch die Schnittgeraden der Ebenen ermitteln (nach Nr. 21). Die Schnittgeraden der Einschnittböschungsebenen und der Dammböschungsebenen mit der Ebene des Abhanges treffen einander in denjenigen Punkten X und Y, in denen die Grenzen des Grundstücks in den Abhang eindringen.

36. Wege. Von den sogenannten Wegen betrachten wir hier nur gerade Wege. Das sind ebene Streifen, begrenzt durch parallele Geraden, die Wegränder, zwischen denen die Mittellinie ebenfalls geradlinig verlauft. Aber nicht jeder derartige Streifen ist als Weg brauchbar: Ein nicht wagerechter Weg muß so angelegt werden, daß seine Höhenlinien zur Wegrichtung senkrecht sind, weil er sonst nach einer Seite überhängt und unbequem zu begehen ist. Somit gilt die Vorschrift. Die Mittellinie des Weges soll eine Fallinie des Weges sein. Daraus folgt Die Projektionen der Höhenlinien des Weges sind zur Projektion seiner Mittellinie senkrecht.

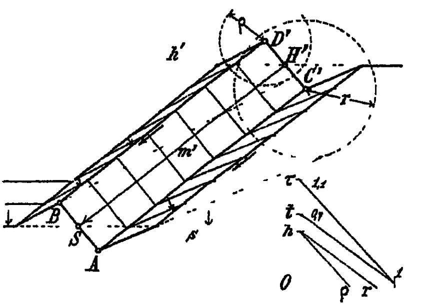


Fig 58

Zuerst betrachten wir einen Weg, dessen Mittellinie auf dem Gelände liegt Das Gelände sei wieder ein Abhang zwischen einer Spurgeraden s und einer Höhenlinie h, woran sich jenseits von s die Tafel, jenseits von h eine Höhenebene als Fortsetzung anschließe Die Mittellinie m des Weges sei eine gegebene Gerade des Abhanges, siehe Fig. 58 Die Spurgerade der Wegebene, die untere Wegschwelle AB, geht durch den Spurpunkt S von m und ist zu m' senkrecht Der Weg endet oben in der Höhenlinie durch den Endpunkt H von m auf h Ist die Wegbreite gegeben, so findet man also ohne weiteres die Projektionen der Wegrander AC und BD. Da die obere Wegschwelle CD in der Höhe von h liegt, ist der Rand AC oberhalb und der Rand BD unterhalb des Geländes gelegen, d h. längs AC ist eine Dammböschung, längs BD eine Einschnittböschung anzubringen Die Spurgeraden der Böschungsebenen gehen von den Spurpunkten A und B aus und sind Tangenten der Böschungskreise von C und D. Dabei ist zu beachten, daß die durch BD zu legende Ebene oberhalb BD nach außen geht, vom Wege aus gerechnet, d h. unterhalb BD nach innen, so daß kein Zweifel darüber bestehen kann, welche Tangente von B aus zu ziehen ist Die Höhenlinien der Böschungsebenen durch C und D sind die Parallelen zu ihren Spurgeraden. Nach Nr. 21 bekommt man nun alle Schnitte. Man bemerkt, daß die wagerechte Ebene jenseits h einen kleinen dreieckigen Zuwachs gegenüber einem ebensolchen Verlust erfährt.

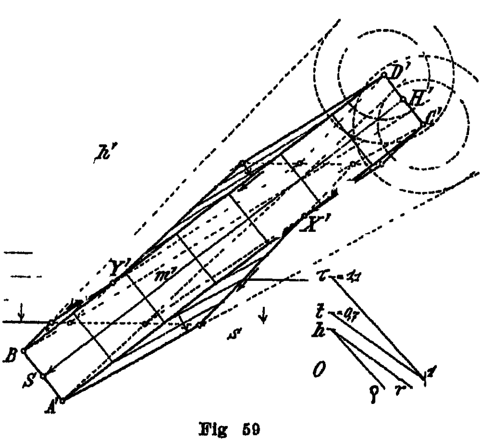


Fig 59

Nun betrachten wir einen Weg, dessen Mittellinie nicht auf dem Gelände liegt. Der Spurpunkt S der Mittellinie m sei irgendein Punkt der unteren wagerechten Geländeebene, und m ende in irgendeiner Stelle H der oberen wagerechten Geländeebene, siehe Fig. 59. Die

untere Wegschwelle AB und die Wegränder AC und BD sowie die obere Wegschwelle CD zeichnet man wie vorher. Da man nun aber von vornherein nicht weiß, wo AC und BD aus der Ebene des Abhanges heraustreten, konstruiert man längs AC sowohl die Damm- als auch die Einschnittböschungsebene, ebenso längs BD, d. h. man zeichnet ihre Spuren und ihre durch C und D gehenden Höhenlinien, so daß alsdann alle Schnitte zu bestimmen sind. Die Geraden, in denen die Ebenen der Dammböschungen die Ebene des Abhanges treffen, und die Geraden, in denen es die Ebenen der Einschnittböschungen tun, kommen in denjenigen Punkten X und Y der Wegränder AC und BD zusammen, in denen AC und BD die Abhangsebene schneiden. Das obere Stück des Weges ist ein Hohlweg, das untere ein Dammweg. Das Zwischenstück von X bis Y wird auf der einen Seite durch eine abfallende Ebene, auf der anderen durch eine ansteigende Ebene begrenzt, könnte also als Saumweg bezeichnet werden. Man benutzt Höhenschnitte in gleichhohen Schichten zur Herstellung von Schraffen.

Die Fallrichtungen der Ebenen sind in Fig. 58 und 59 durch Pfeile gekennzeichnet. Sie lehren, wo das Regenwasser Rinnsale bilden wird, nämlich längs der mit Pfeilen versehenen Strecken. Hier wären die Abzugsleitungen für das Wasser anzubringen.

37. Wegabzweigungen. Es handelt sich hier darum, wie man den Übergang von der Ebene eines Hauptweges zur Ebene eines abzweigenden Nebenweges herstellt. Das Gelände sei die wagerecht gedachte Tafel selbst. Der Hauptweg sei zunächst als ebenfalls wagerechter Dammweg angenommen, also beiderseits durch Böschungen gestützt. Die Höhe h des Weges ist in Fig. 60 am Höhenmaßstab angegeben. Vom Nebenweg sei die Projektion der Mittellinie m und ihr Spurpunkt S vorgeschrieben. Ist außerdem seine Breite gegeben, so findet man sofort seine Schwelle AB als Senkrechte zu m' und weiterhin die Wegränder. Man könnte nun annehmen, die Mittellinie m treffe den Rand des Hauptweges, dann aber würde sich ein störender Einschnitt der Wegbahn des Hauptweges ergeben, etwa so wie in Fig. 58 der letzten Nummer ein Einschnitt der oberen wagerechten Geländefläche. Man nimmt besser an, die von A ausgehende Randlinie des Nebenweges treffe den Rand des Hauptweges in C. Dann bekommt man

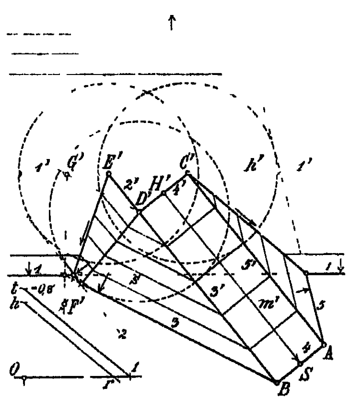


Fig. 60.

sogleich die obere Schwelle CD des Nebenweges. Da sie so hoch wie die Ebene des Hauptweges liegt, erwächst dieser Ebene ein Gewinn, und man kann das Zusatzstück etwa durch diejenige Gerade DE begrenzen, die in der Projektion die geradlinige Verlängerung von BD' ist. In Wahrheit bildet die ansteigende Gerade BD mit der wagerechten Geraden DE in D einen Knick. Somit wird das entstehende Erdwerk diesseits des Hauptweges durch fünf Ebenen begrenzt, deren Spuren mit *1* bis *5* bezeichnet sind, während *1'* bis *5'* die oberen Begrenzungslinien der Ebenen bedeuten. Die zweite, dritte und fünfte Ebene sind Dammböschungsebenen und

als solche Tangentialebenen der kongruenten und gleichhohen Böschungskegel von E, D und C. Von allen fünf Ebenen sind die Höhenlinien in der Höhe des Hauptweges entweder schon da oder leicht zu ziehen, da sie zu den Spuren parallel sind. Somit macht die Feststellung der Schnitte keine Beschwerden. Zur Probe der Richtigkeit kann noch die erste und dritte Ebene zum Schnitt gebracht werden: Im Punkte F treffen sich die erste, zweite und dritte Ebene sowie ihre Schnittgeraden. Er liegt hier unterhalb der Tafel. Läge F oberhalb der Tafel, so würde die zweite Ebene nur durch ein Dreieck mit der oberen Kante ED zum Vorschein kommen und die erste und dritte Ebene eine von der tiefsten Spitze dieses Dreiecks ausgehende sichtbare Schnittgerade haben. Man kann übrigens in Fig 60 die Dammböschungsebene, die zu BD gehört, auch uber FD hinaus fortgesetzt als Begrenzung des Dammes benutzen. Dann erfahrt die Ebene des Hauptweges statt des kleinen Dreiecks EDC den größeren Zuwachs GDC, und die von E ausgehende Kante verschwindet. Die Pfeile längs der Kanten in Fig. 60 geben wieder die Rinnsale an.

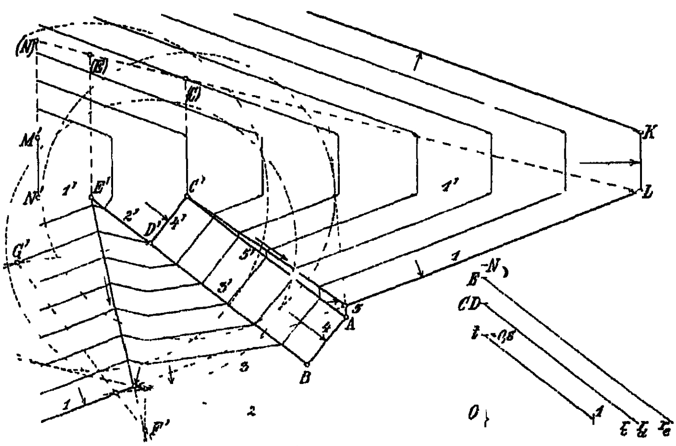


Fig 61.

Steigt der Hauptweg selbst an, siehe Fig. 61, so ist das einzuschaltende Stück CDE nicht mehr wagerecht, da E höher als CD liegt Zur Bestimmung der Böschungen bedarf man der Höhe von C (oder D) und von E. Man findet sie durch Umlegen der projizierenden Ebene des Wegrandes LN des Hauptweges als die Strecken $C'(C)$ und $E'(E)$. In der Nebenfigur erhalt man alsdann die zugehörigen Böschungsradien r_c (oder r_d) und r_e Die weitere Lösung der Aufgabe liegt auf der Hand. Wieder sind die Rinnsale durch Pfeile kenntlich gemacht.

Ein kleiner Unterschied zwischen Fig. 60 und Fig. 61 ist noch bemerkenswert· In Fig. 61 ist CE eine Kante, in Fig. 60 jedoch nicht.

*38. **Übungen.** 1) Die Ecken einer wagerechten quadratischen Plattform in gegebener Höhe über der Tafel seien gleichmäßig abgeschrägt. Die entstehenden Strecken sollen die oberen Enden abwärts führender Wege sein, deren Mittellinien in der Projektion nach dem Mittelpunkt des Quadrates weisen. Die Lange aller dieser vier Wege sei gleich groß. Man stutze die Plattform und die Wege durch Böschungen von gleichem Gefalle t.

2) Ein Weg längs eines Abhanges, d. h. dessen Mittellinie auf einer Abhangsebene verläuft wie in Fig. 58 von Nr. 36, soll auf der einen Seite eine Ausbreitung zum Ausweichen haben. Die Projektion des dazu

nötigen Ansatzes sei ein Trapez, von dessen beiden parallelen Seiten die eine eine Randlinie des Weges ist. Je nachdem diese Ausweichstelle einerseits oder anderseits des Weges liegt, sind Damm- bzw Einschnittböschungen nötig. Diese sollen hergestellt werden.

§ 4. Sonnenuhren.

39. Begriff der Sonnenuhr. Vorweg sei bemerkt: In § 2 besprachen wir die Herstellung von Dachern, in § 3 die von Böschungen. Die geometrische Aufgabe bestand dabei in § 2 darin, von gegebenen Spurgeraden aus Ebenen mit gegebenen Neigungen zur Tafel zu konstruieren und miteinander zu schneiden, in § 3 dagegen darin, von gewissen im Raume gegebenen Geraden aus Ebenen mit gegebenen Neigungen zur Tafel zu konstruieren und miteinander zu schneiden. Indem wir uns jetzt zur Herstellung von Sonnenuhren wenden, werden wir auf die neue geometrische Aufgabe geführt werden: Durch eine im Raume gegebene Gerade lauter Ebenen zu legen, die miteinander gegebene Winkel bilden, und diese Ebenen mit der Tafel oder mit irgendeiner anderen gegebenen Ebene zu schneiden

Ein auf einer Flache fest angebrachter Stab wirft, von der Sonne beleuchtet, zu verschiedenen Tageszeiten verschiedene Schatten auf die Flache. Aber von Tag zu Tag werden die Schatten zur selben Tageszeit andere Lagen erhalten Um mit Hilfe der Lage des Schattens die Tageszeit zu bestimmen, kommt es darauf an, den Stab so anzubringen, daß er taglich zur selben Stunde einen Schatten in derselben Richtung wirft Die erforderliche Lage des Stabes ergibt sich so

Die Erde dreht sich im Laufe von je vierundzwanzig Stunden einmal gleichförmig um ihre Nord-Sud-Achse NS Von der Erde aus gesehen beschreibt daher die Sonne in dieser Zeit einmal gleichförmig einen Kreis, dessen Ebene zur Erdachse senkrecht ist und dessen Mittelpunkt auf der Erdachse liegt. Da der Radius der Erde gegenuber der Entfernung der Sonne verschwindend gering ist, darf man ohne weiteres annehmen, daß der Mittelpunkt der scheinbaren kreisformigen Sonnenbahn an irgendeiner Stelle auf der Erde liege. Wenn man also in einem Punkte A auf der Erde einen zur Erdachse parallelen Stab w anbringt, wird sich die Ebene durch den Stab und die Sonne, d h die Ebene derjenigen Sonnenstrahlen, die den Stab treffen und vom Stabe aufgefangen werden, also die Ebene, worin der Schatten des Stabes liegt, im Lauf von je vierundzwanzig Stunden einmal gleichförmig um w drehen Wäre der Stab w nicht zur Erdachse parallel, so würde die Lichtebene in den vierundzwanzig Stunden eine ungleichförmige Umdrehung um w machen Dies würde an sich die Herstellbarkeit einer Sonnenuhr nicht stören, wenn nicht oben die Geschwindigkeit von Tag zu Tag einem anderen Gesetz unterworfen ware. Die Ursache liegt darin, daß die Erde um die Sonne im Laufe des Jahres eine Bahn beschreibt, deren Ebene schrag zur Erdachse liegt. Folglich eignet sich nur ein zur Erdachse paralleler Stab w als sogenannter Weiser oder Gnomon einer Sonnenuhr. Diese Annahme machen wir daher bestandig.

Der Weiser w befindet sich in der Ebene durch den Ort A und die Erdachse NS, also in der Mittags- oder Meridianebene von A. Diese Ebene sei die der Zeichnung in Fig. 62. Die wagerechte oder

Horizontalebene von A ist die Tangentialebene der Erdkugel. Sie steht auf der Ebene der Zeichnung senkrecht längs der Tangente des Meridiankreises im Punkte A. Liegt A unter $\beta°$ nördlicher Breite, so bildet der Weiser w mit der Horizontalebene denselben Winkel. Der Weiser zeigt nach dem Nordpol des Himmels (in der Nahe des Polarsterns) und deshalb heißt der Winkel β auch die Polhöhe des Ortes A. Ist der Weiser w auf irgendeiner Fläche befestigt, und verzeichnet man seine Schatten auf der Flache etwa von Stunde zu Stunde, so entsteht das aus diesen Stundenlinien bestehende Ziffernblatt der Sonnenuhr. Als die Flache dient meistens eine Ebene, und wir wollen uns auf diesen Fall beschränken Die zu losende Aufgabe ist nun die folgende: Eine Ebene, die um 12^h mittags mit der Meridian- oder Nord-Süd-Ebene zusammenfällt, wird Schritt für Schritt um den in ihr enthaltenen Weiser w durch je $360° \cdot 24$, also durch je $15°$ gedreht; die jeweilige Schnittgerade der Ebene mit der Ebene des Ziffernblattes ist zu bestimmen Diese Schnittgeraden, die Stundenlinien, gehen sämtlich durch den Schnittpunkt des Weisers mit der Ebene des Ziffernblattes.

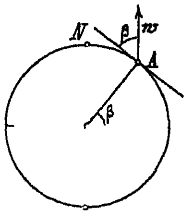


Fig. 62

40. Äquatorialuhr. Der wesentliche Unterschied zwischen verschiedenen Sonnenuhren beruht nur auf der verschiedenen Stellung des Ziffernblattes. Man benennt die verschiedenen Arten deshalb nach der Lage dieser Ebene So spricht man von einer Horizontal- oder Vertikaluhr, wenn das Ziffernblatt wagerecht oder lotrecht ist Dementsprechend bezeichnen wir als Äquatorialuhr diejenige, deren Ziffernblatt zum Weiser senkrecht und daher zur Ebene des Äquators parallel, also die sogenannte Äquatorebene des Ortes ist.

Die Stundenlinien der Äquatorialuhr bilden je $15°$ miteinander, sind also doppelt so eng wie die unserer mechanischen Uhren. Jede von 15 zu $15°$ eingeteilte Kreisscheibe mit dem durch ihre Mitte gesteckten und zu ihrer Ebene senkrechten Weiser ist eine Äquatorialuhr; um sie zu benutzen, muß man dem Weiser die Richtung nach dem Nordpol geben und die Kreisscheibe so weit um ihn drehen, bis die 12^h-Linie in der Nord-Süd-Ebene liegt. Da man sie unter allen geographischen Breiten benutzen kann, ist sie auch als Universaluhr bezeichnet worden. Das Ziffernblatt wird wahrend eines halben Jahres von oben, während des anderen halben Jahres von unten beleuchtet und muß deshalb auf beiden Seiten mit den Stundenlinien versehen werden. Zur Zeit der Nachtgleichen oder Äquinoktien (ungefähr 21. Marz und 23. September) ist die Äquatorialuhr unbrauchbar, da sich die Sonne dann in der Ebene des Ziffernblattes befindet, so daß der Schatten des Weisers nicht zu erkennen ist.

Anmerkung Die Sonnenuhren sind die ersten von den Menschen erfundenen Uhren Herodot (um 450 v. Chr) berichtet im 2 Buch Nr. 109 seiner „Geschichten", daß die Hellenen die Sonnenuhr und das Gnomon, den Weiser, sowie die Einteilung des Tages in zweimal zwolf Stunden von den Babyloniern (Chaldäern) erhalten haben. Anaximandros (wahrscheinlich 611 v. Chr geboren) hat in Sparta ein Gnomon aufgestellt. Der beruhmte Astronom Claudius Ptolemaus (um 150 n. Chr. in Alexandria) schrieb „uber Analemma" (d. h Hilfsfiguren), worin die Verzeichnung von Sonnenuhren gelehrt wurde. Auf diesem Werke, von dem Bruchstucke erhalten sind, beruhen die Sonnenuhren der Araber und Spanier im Mittelalter. Die mathematischen Lehrbücher bis zum

Ausgang des 18 Jahrhunderts widmen meistens der Gnomonik (d. h. Lehre von den Sonnenuhren) einen besonderen Abschnitt. Wir nennen die anspruchslose, aber klare Schrift von Joh. Friedrich Penther, Gräflich-Stolbergischem Kammerrat: „Gnomonica fundamentalis et mechanica, worinnen gewiesen wird, wie man sowol grundlich, als auf mechanische Art, allerhand Sonnen-Uhren regulaire, irregulaire, mit Minuten und himmlischen Zeichen, auf allerhand Flächen, sie mogen gleich oder hockericht, beweglich oder unbeweglich seyn, verfertigen solle u s w.“, Augsburg 1760, ferner das Buch von De la Prise: „Méthode nouvelle et générale pour tracer facilement des cadrans solaires (d i. Sonnenuhren) sur toutes surfaces planes, en situation quelconque, sans calcul ni embarras d'instrumens etc.“, Caen 1781. Hierin findet man im wesentlichen die im folgenden zu entwickelnden Konstruktionen in großer Vollstandigkeit. In unserer Zeit der genauen mechanischen Uhren ist die Wertschatzung der Sonnenuhren sehr gesunken.

Die Äquatorialuhr wurde meistens Äquinoktialuhr genannt. Dies kommt daher, daß man den Äquatorkreis fruher auch als Äquinoktialkreis bezeichnete.

41. Ziffernblätter verschiedener Sonnenuhren mit demselben Weiser. Unter E_1 und E_2 seien die Ebenen der Ziffernblatter zweier Sonnenuhren mit demselben Weiser w verstanden, siehe Fig. 63. Die Schnittgerade beider Ebenen sei s, der Weiser treffe E_1 in W_1 und E_2 in W_2. Die Ebene durch die Sonne und den Weiser schneidet zu einer bestimmten Stunde die Gerade s in einem bestimmten Punkt P. Dann sind W_1P und W_2P die Schatten, die der Weiser auf E_1 und E_2 wirft Demnach treffen sich entsprechende Stundenlinien zweier Sonnenuhren mit demselben Weiser auf der Schnittgeraden ihrer Ziffernblattebenen Ist das eine Ziffernblatt bekannt, so kann man folglich das andere daraus sofort ableiten. Insbesondere kann man alle Sonnenuhren aus der Äquatorialuhr ableiten Dabei bedarf man der Schnittgeraden der Äquatorebene mit der betreffenden Ziffernblattebene So z B kann man die Horizontaluhr herstellen, indem man als Ebene des Ziffernblattes eine wagerechte Ebene benutzt und die Spur s der Äquatorebene auf dieser Tafel herstellt (Nr 42) Da die Aquatorebene unbequem liegt, dagegen die wagerechte Ebene gern als Tafel der Zeichnung verwendet wird, ist es weiterhin bequemer, alle ubrigen Sonnenuhren aus der Horizontaluhr abzuleiten

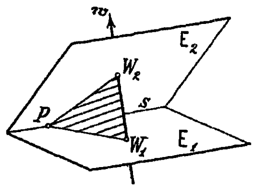


Fig 63

Hierbei ist die zu ermittelnde Schnittgerade s stets die Spur der Ebene des neuen Ziffernblattes. Da man ferner die wahre Gestalt dieses neuen Ziffernblattes haben will, wahrend an seiner senkrechten Projektion nichts gelegen ist, wird man die Ebene um die Spur s in die Tafel umlegen.

42. Horizontaluhr. Wie gesagt nennt man so die Sonnenuhr mit horizontalem Ziffernblatt. Auf der Tafel, die das Ziffernblatt darstellt, wird eine Nord-Süd-Linie gezeichnet, siehe Fig. 64, auf dieser Geraden liege der Punkt W, in dem der Weiser w die Tafel durchbohrt, so daß auch die senkrechte Projektion von w längs der Nord-Sud-Linie liegt. Die geographische Breite β, für die man die Uhr entwerfen will, muß gegeben sein (in Fig. 68 ist $\beta = 52°$ angenommen). Man braucht nun eine Aquatorebene, d. h. eine zu w senkrechte Ebene; sie schneide den Weiser in A. Man denke sich also dem Weiser irgendeine bestimmte Länge WA gegeben. Dann findet man die Spur s der Äquatorebene, die

nach Nr. 18 von Ost nach West gehen muß, indem man zunächst den Spurpunkt B der von A ausgehenden Fallinie der Äquatorebene bestimmt. Diese Fallinie liegt in der längs der Nord-Süd-Linie auf der Tafel senkrecht stehenden Ebene, d. h. in der Meridianebene von W, die man in der Umlegung zeichnet. Die in ihr gelegene Gerade w bildet in der Umlegung (w) mit der Nordrichtung den Winkel β; im umgelegten Punkt (A) wird das Lot auf (w) errichtet. Es schneidet die Nord-Süd-Linie in B. Die Ost-West-Linie durch B ist die Spur s der Äquatorebene.

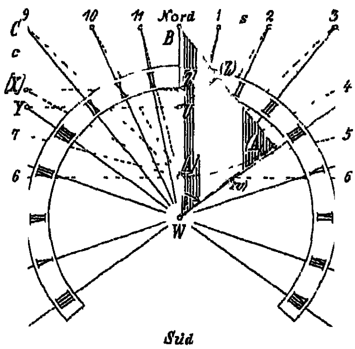


Fig 64

Nun muß man das Ziffernblatt in der Äquatorebene zeichnen, die man zu diesem Zwecke um ihre Spur s umlegt. Dabei gelangt A nach dem Punkt $[A]$, wobei $B(A) = B[A]$ ist. Mit dem Strahl von $[A]$ nach B beginnend, zieht man von $[A]$ aus alle Strahlen, die je 15° miteinander bilden. Sie schneiden s in gewissen Punkten, und die Stundenlinien der Horizontaluhr sind nach Nr. 41 die von W nach diesen Punkten gehenden Strahlen.

Die Schnittpunkte der von $[A]$ aus gezogenen Stundenlinien der Äquatorialuhr mit s sind zum Teil unerreichbar. Deshalb beachte man: Ist c irgendeine zu s senkrechte Gerade, die s in C schneide, und trifft eine von $[A]$ ausgehende Stundenlinie der Äquatorialuhr die Gerade c in $[X]$, so wird die entsprechende Stundenlinie der Horizontaluhr die Gerade c in einem Punkte Y derart schneiden, daß

$$\frac{CY}{C[X]} = \frac{BW}{B[A]}$$

ist. Um Y zu finden, zieht man also die durch $[X]$ gehende Ost-West-Linie, die WB in $[Z]$ treffe, dann dreht man $B[Z]$ um B in die Lage $B(Z)$ auf $B(A)$, errichtet in (Z) das Lot auf $B(A)$, das BW in U schneide, und bekommt schließlich Y als den Schnittpunkt von c mit der durch U gehenden Ost-West-Linie.

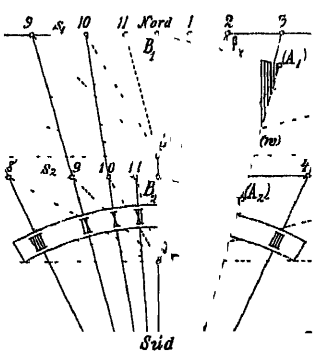


Fig 65.

Bisher war angenommen worden, der Punkt W, in dem der Weiser die Tafel schneidet, sei erreichbar. Aber für einen Ort mit geringer geographischer Breite würde der Weiser, falls W erreichbar angenommen wäre, allzu dicht über der Tafel liegen. Eine bessere Anordnung ergibt sich in diesem Fall, wenn man den Weiser höher anbringt und mittels zweier Stützen auf der wagerechten Ebene befestigt. Man zeichnet hier so, wie es Fig. 65 (entworfen für $\beta = 15°$ n. Br., also ungefähr für Khartum oder Guatemala) zeigt: In der um die Nord-Süd-Linie umgelegten Meridianebene zeichnet man den umgelegten Weiser (w) so, daß er mit der Nord-Süd-Linie den Winkel β bildet, und wählt auf ihm zwei Punkte (A_1) und (A_2). Nun benutzt

man zwei Äquatorebenen, die durch A_1 und durch A_2. Man bestimmt ihre Spurgeraden s_1 und s_2, legt die Ebene um s_1 bzw. s_2 in die Tafel um, wobei A_1 nach $[A_1]$ und A_2 nach $[A_2]$ gelangt, zieht wie vorhin von $[A]$ aus jetzt sowohl von $[A_1]$ als auch von $[A_2]$ aus die Strahlen unter je 15° und bestimmt ihre Schnittpunkte mit s_1 bzw. s_2. Die Verbindungslinien entsprechender Schnittpunkte sind dann die Stundenlinien der Horizontaluhr Sie gehen nach dem unerreichbaren Schnittpunkt des Weisers mit der Tafel.

43. Sonnenuhren für mitteleuropäische Zeit. Ehe wir in der Konstruktion der Sonnenuhren fortfahren, sei der Abänderung gedacht, die aus der Berücksichtigung der mitteleuropäischen Zeit (MEZ) folgt.

Die bisher besprochenen Sonnenuhren geben die Ortszeit an Dagegen ist die in Deutschland benutzte MEZ die Ortszeit von 15° östl. Länge von Greenwich. An einem Ort von λ° östl. Länge geht die Ortszeit gegenüber der MEZ vor oder nach, je nachdem die Differenz $\delta = \lambda - 15$ positiv oder negativ ist. Da auf 15° je eine Stunde kommt, entsprechen einem Winkelgrad vier Zeitminuten und einer Winkelminute vier Zeitsekunden. Für Berlin z B. ist $\lambda = 13° 24'$, also $\delta = -1° 36'$, so daß die Berliner Ortszeit gegenüber der MEZ um 6 Min 24 Sek nachgeht. Soll nun die Äquatorialuhr die MEZ angeben, so muß man ihre Stundenlinien um den Winkel δ drehen, und zwar in demselben Sinne, in dem sich die Sonne um den Weiser dreht, falls δ positiv ist, d h. im Sinne der Stundenangaben XII, I, II, III ..., sonst im entgegengesetzten Sinne. Dies zieht von selbst die bei der Horizontaluhr erforderliche Änderung der Stundenlinien nach sich, da sich diese mit denen der Äquatorialuhr auf der Spurgeraden s der Äquatorebene treffen müssen Da wir im folgenden alle anderen Sonnenuhren aus der Horizontaluhr ableiten werden, ergibt sich dadurch auch für alle anderen die entsprechende Einrichtung in MEZ

Allerdings läßt sich die Abänderung in unseren kleinen Zeichnungen nicht kenntlich machen, da sie ungefähr für die Gegend von Berlin entworfen sind und der hier zu benutzende Winkel $\delta = -1° 36'$ zu klein ist

44. Vertikaluhren. Das sind die Sonnenuhren mit Zifferblättern in lotrechten Ebenen, wie z B. an Hausmauern. Hat man eine Horizontaluhr wie in Fig 64 von Nr 42 entworfen, also ihre Stundenlinien *5*, *6*, *7* usw. von W aus gezeichnet, siehe Fig. 66, so sei eine durch ihr Ziffernblatt gehende Gerade t die Spurgerade der lotrechten Ebene. Sie treffe die Nord-Süd-Linie durch W in B. Nun muß man den Punkt D ermitteln, in dem der Weiser die lotrechte Ebene trifft. Dazu wendet man wieder die Umlegung der Nord-Süd-Ebene an, die ja den Weiser enthält. Man bekommt dann die Höhe $B(D)$ des Punktes D über der Tafel. Die Stundenlinien der Vertikaluhr gehen von D nach denjenigen Punkten, in denen die der Horizontaluhr die Spurlinie t schneiden. Gezeichnet ist das Ziffernblatt der Vertikaluhr in der um t

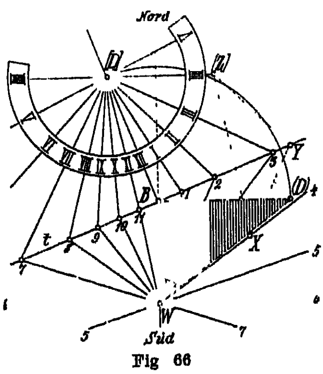


Fig 66

umgelegten Ebene. Bei dieser Umlegung gelangt D nach $[D]$, wobei $B[D] = B(D)$ und $B[D] \perp t$ ist.

Gewisse Stundenlinien der Horizontaluhr treffen t in unerreichbaren Punkten. Die dadurch entstehende Schwierigkeit ist leicht zu beseitigen. Ist z. B. X irgendein Punkt auf einer derartigen Stundenlinie, so zieht man XY parallel zu einer anderen Stundenlinie, etwa $W2$, bis zum Schnitt Y mit t, dann durch X die Parallele zu $W[D]$ und durch Y die Parallele zu $[D]2$. Diese beiden Geraden schneiden sich offenbar in einem Punkte $[Z]$ der gesuchten Stundenlinie.

Zu gewissen Jahres- und Tageszeiten ist die Vertikaluhr nur dann brauchbar, wenn auch auf ihrer Rückseite die Stundenlinien zu sehen sind und der Weiser über D fortgesetzt wird.

45. Sonnenuhren auf Ebenen von beliebiger Stellung. Soll das Zifferblatt einer Sonnenuhr auf schräger Dachfläche hergestellt werden, so wird die Traufe t (Nr. 25) und der Neigungswinkel α des Daches sowie derjenige Punkt D gegeben sein, in dem der Weiser w das Dach trifft. Bei der Konstruktion diene die wagerechte Ebene durch die Traufe t als Tafel, dann mag die senkrechte Projektion D' von D gegeben sein, siehe Fig. 67. Man bekommt die Höhe von D, indem man durch D die zur Spurgeraden t senkrechte Ebene annimmt und das in ihr enthaltene Stützdreieck $D'FD$ in die Tafel um die zu t senkrechte Kathete $D'F$ umlegt, denn der bei F liegende Dreieckswinkel ist die gegebene Neigung α des Daches, so daß man das umgelegte Dreieck $D'F(D)$ sofort bekommt. Die Kathete $D'(D)$ gibt die Höhe von D an. Nun denken wir uns weiterhin die Nord-Süd-Ebene durch D gelegt. Sie enthält die Höhe $D'D$ von D sowie den Weiser WD,

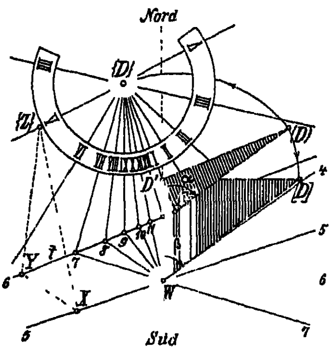


Fig. 67.

und das von ihnen bestimmte rechtwinklige Dreieck $D'WD$ läßt sich in der Umlegung $D'W[D]$ sofort zeichnen, da $D'[D] = D'(D)$ und $\sphericalangle D'W[D]$ gleich der geographischen Breite β sein muß. Hierdurch ergibt sich der Spurpunkt W des Weisers. Schließlich wird man noch die Dachebene um die Traufe t in die Tafel umlegen, wenn man das Zifferblatt in seiner wahren Gestalt haben will. Bei diesem Umlegen gelangt D nach $\{D\}$, dem Endpunkte des in F auf t errichteten Lotes durch D' von der Länge $F(D)$. Wenn man nun auf der Tafel die zur Horizontaluhr gehörigen Stundenlinien zieht und sie mit t zum Schnitte bringt, sind die von $\{D\}$ nach den Schnittpunkten gehenden Geraden die gesuchten Stundenlinien. Wie man die Schwierigkeit bei unerreichbaren Schnittpunkten überwindet, zeigt die Hilfskonstruktion $XY\{Z\}$; es geschieht wie in voriger Nummer: XY und $Y\{Z\}$ sind zu schon konstruierten zusammengehörigen Stundenlinien (für 8 Uhr) parallel und $X\{Z\}$ ist zu $W\{D\}$ parallel.

Wenn der Neigungswinkel α der Dachebene geringer gewählt wird, kann es wohl vorkommen, daß W auf derselben Seite von t wie D' liegt. Dies beeinträchtigt die Konstruktion keineswegs. Allerdings wird man auf einer schwach geneigten Dachebene keine Sonnenuhr anbringen,

weil man sie nicht sehen kann; wohl aber liegt dieser Fall vor, wenn es sich um eine **Sonnenuhr auf einem schragen Fußboden** handelt. Man muß dann die Fortsetzung des Weisers über D hinaus zum Schattenwerfen einrichten, und die Stundenlinien sind demgemäß über (D) hinaus zu verlängern.

Auf andere Art als in Fig. 67 ist die Aufgabe in Fig. 68 gelöst: Hier ist wie vorher t die Traufe und α der Neigungswinkel des Daches. Der Weiser sitzt aber nicht an einer Stelle D auf dem Dache fest, sondern befindet sich weiter vom Dach entfernt. Dieser Fall tritt nämlich dann ein, **wenn die Richtung des Weisers beinahe zur Dachebene parallel ist,** denn dann bildet der Weiser einen so kleinen Winkel mit der Dachebene, daß man ihn höher anbringen muß, so daß er die Dachebene in einem unerreichbaren Punkte D trifft. Demnach wird man den Weiser in einiger Entfernung von der Dachebene mittels zweier Stutzen befestigen. Nun sei angenommen, der Weiser habe den Spurpunkt W auf der Tafel. In Fig. 68 ist außer der Tafel noch eine Höhenebene in beliebiger Hohe h benutzt Man braucht die Hohenlinie a der Dachebene in der Hohe h sowie den Punkt V, in dem der Weiser die Hohenebene durchsetzt Die Projektion a' der Hohenlinie hat von t einen seitlichen Abstand, den man aus der Nebenfigur entnimmt Die Projektion V' von V liegt in der Nord-Sud-Ebene durch W. Da die Neigung β des Weisers die bekannte geographische Breite ist, entnimmt man die Strecke WV' ebenfalls aus der Nebenfigur Man denke sich nun sowohl die Tafel als auch die Hohenebene in der Hohe h als Zifferblatter von Horizontaluhren mit dem gemeinsamen Weiser WV. Die Stundenlinien beider Horizontaluhren sind einander parallel Die der ersten schneiden die Traufe t, die der zweiten die Hohenlinie a. Indem man einander entsprechende Schnittpunkte verbindet, bekommt man auf der Dachebene die gesuchten Stundenlinien. Ihre Projektionen sind jedoch in Fig 68 nicht eingezeichnet Da man namlich die wahre Gestalt des Zifferblattes auf der Dachebene haben will, wird man die Ebene um die Traufe t in die Tafel umlegen Dabei gelangt die Hohenlinie a in die Lage (a). Der Abstand von t bis (a) ist aus der Nebenfigur vom schragen Schenkel von α zu entnehmen. Die Entfernung des Punktes V von a ist zur Tafel parallel und also gleich der Entfernung von V' bis a'. Demnach bestimmt man (V) auf dem Lot von V' auf (a) so, daß (V) von (a) dieselbe Entfernung hat wie V' von a'. Nachdem dies geschehen ist, zieht man erstens von W aus die Stundenlinien der Horizontaluhr auf der Tafel und zweitens von (V) aus die dazu parallelen Linien. Schließlich werden die Schnittpunkte der ersteren Linien mit t und die Schnittpunkte der entsprechenden Parallelen durch (V) mit (a) verbunden. So gehen die Stundenlinien des umgelegten Zifferblattes auf der Dachebene hervor. Gehörig verlangert müssen sie alle durch einen gewissen Punkt (D) gehen, nämlich durch die Umlegung des Schnittpunktes D des Weisers mit der Dachebene. Aber diese Stelle braucht nicht erreichbar

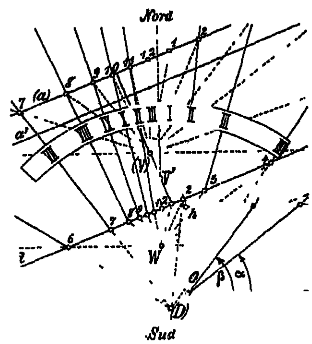


Fig 68.

zu sein. In Fig. 68 ist sie allerdings noch erreichbar. Jedenfalls wird sie nicht zur Konstruktion benutzt.

Die Sonnenuhren auf Dachern in Fig. 67 und 68 sind zu gewissen Jahres- und Tageszeiten nicht brauchbar.

46. Berücksichtigung der Zeitgleichung. In Nr 43 wurde gezeigt, wie man die Äquatorialuhr und infolgedessen auch jede andere Sonnenuhr für mitteleuropäische Zeit einrichten kann. Jetzt ist noch einer anderen Verbesserung zu gedenken: Da die Erdachse zur Ebene des Umlaufs der Erde um die Sonne, zur sogenannten Ekliptik, geneigt ist und die Erde während eines Tages weiter wandert, beschreibt die Sonne in ihrem scheinbaren täglichen Lauf nicht genau einen Kreis. Da überdies die Erdbahn nur angenähert ein Kreis um die Sonne ist, beträgt die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden astronomischen Mittagen nicht immer genau vierundzwanzig Stunden. Deshalb bedient man sich im Gegensatz zur eigentlichen Sonnenzeit, bei deren Anwendung die Tage verschieden lang waren, der sogenannten bürgerlichen Zeit, die durch eine Ausgleichung der Tage fürs ganze Jahr gewonnen wird. Die Folge davon ist, daß die von der Sonnenuhr gezeigte Zeit von der Ortszeit, die bürgerliche Zeit ist, Tag für Tag um einige Minuten abweicht Diese Abweichung bleibt auch bestehen, wenn man nach Nr 43 die Sonnenuhr für MEZ einrichtet, denn MEZ ist die Ortszeit für 15° östl. Länge von Greenwich Der Unterschied heißt die Zeitgleichung (gemeint ist Zeitausgleichung) Er ändert sich mit den Jahren, wenn auch nur geringfügig Dies beruht hauptsächlich darauf, daß der Frühlingspunkt, nämlich die Stelle, wo sich die Erde zur Frühjahrs-Nachtgleiche befindet, von Jahr zu Jahr ein wenig weiterwandert, ferner auch auf anderen kleinen Unregelmäßigkeiten, z. B. auf der schwankenden Neigung der Erdachse zur Ekliptik. Die Zeitgleichung findet man in den besseren Kalendern angegeben Statt in tabellarischer Übersicht stellen wir sie in Fig. 69 graphisch dar. Auf der mehrfach verschlungenen krummen Linie gehören die hervorgehobenen Punkte zum 1., 10. und 20 Tage eines jeden Monats. Die Entfernung vom Mittelpunkt der konzentrischen Kreise gibt die Anzahl der Minuten der Zeitgleichung an, die man also mit Hilfe der Kreise leicht ablesen kann. Dabei ist zu beachten. Je nachdem das Datum der ausgezogenen oder der gestrichelten krummen Linie angehört, ist die zugehörige Minutenzahl zu der von der Sonnenuhr angegebenen Zeit zu addieren oder von ihr zu subtrahieren, damit die richtige bürgerliche Zeit hervorgehe.

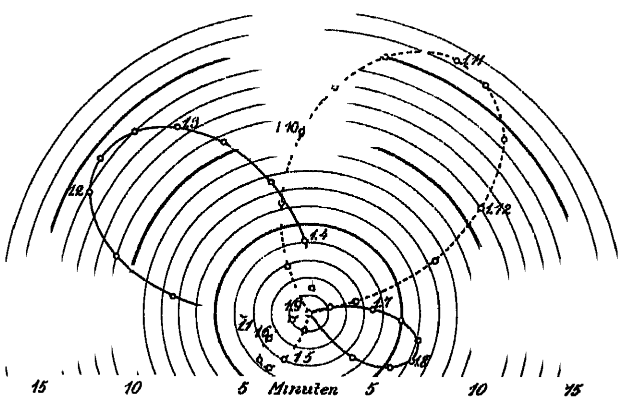


Fig 69.

Mit Berücksichtigung der Zeitgleichung kann man also von einer genau hergestellten und genau gerichteten Sonnenuhr die bürgerliche Zeit bis auf die Minute ablesen Man kann auf diese Art sogar zu bis auf die Sekunde genauen Zeitangaben kommen, wenn man nur eine hinreichend ausführliche Tabelle der Zeitgleichung benutzt

Am 16. April, 15. Juni, 2 September und 25. Dezember ist die Sonnenuhr bis auf die Sekunde genau. Am 12. Februar und 27. Juli geht sie am meisten nach, am 14. Mai und 3 November am meisten vor. Insgesamt schwankt die Differenz zwischen +14 Min 24 Sek. und −16 Min. 22 Sek.

47. Nachträgliche Bemerkungen über Sonnenuhren. Die Horizontaluhren sind die einzigen, die zu jeder Tageszeit bei Sonnenschein benutzt werden können Die anderen Sonnenuhren dagegen sind zu gewissen Tageszeiten nur dann brauchbar, wenn man auch auf der Rückseite des Zifferblattes die Stundenlinien anbringt und den Weiser durch das Zifferblatt hindurch fortsetzt. Sie versagen immer dann, wenn die Sonne gerade in der Ebene des Zifferblattes steht

Um für alle Tageszeiten ablesbare Sonnenuhren zu bekommen, die keine Horizontaluhren sind, hat man deshalb auch mehrere Sonnenuhren starr verbunden, z B mehrere Seiten eines Steinblocks als Zifferblätter benutzt. Die zugehörigen Weiser sind als Parallele zur Erdachse samtlich zueinander parallel Daraus folgt Auch dann, wenn ein derartiger Block nicht richtig aufgestellt worden ist, zeigen alle Schatten die gleiche, allerdings falsche Stunde an

Hat man eine Sonnenuhr für einen bestimmten Ort hergestellt, so kann man sie auch an jeder anderen Stelle desselben Breitenkreises benutzen, wenn man sie nur gehörig richtet

Die Schatten des Weisers geben durch ihre Richtungen die Tageszeiten an Man kann auch ihre Längen berücksichtigen Da sich diese von Tag zu Tag ändern, kann man mit ihrer Hilfe auch das Datum erkennen. Aber wir wollen hier auf diesen Umstand nicht näher eingehen

Wir haben im vorhergehenden gezeigt, wie man die Stundenlinien einer Sonnenuhr für jede denkbare Annahme durch Zeichnung ermitteln kann Selbstverständlich lassen sie sich auch durch trigonometrische Berechnung finden Ein dritter Weg, der gar keine besonderen Kenntnisse erfordert, besteht darin, daß man den Weiser und die Ebene des Zifferblattes richtig anbringt und dann die Sonne selbst die Schatten auf das Blatt werfen läßt. Hat man eine richtiggehende mechanische Uhr zur Hand, so kann man dann für jede Stunde die Schattenlinie nachzeichnen. Dabei darf man, wenn man auf größere Genauigkeit Gewicht legt, die Zeitgleichung für den betreffenden Tag, an dem man dies verrichtet, nicht außer acht lassen.

48. Übungen. 1) In dem vierbändigen Werk: „Recréations mathématiques et physiques" von Jacques Ozanam (geb 1640, gest. 1717 als Professor der Mathematik in Paris), 2 Aufl., Paris 1735/36, findet sich im 2. Bd. 1736, S. 2 u. f, die folgende Konstruktion einer Horizontaluhr und Vertikaluhr, siehe Fig. 70. Um den mit XII bezeichneten Punkt der Nord-Süd-Linie wird ein Kreis von beliebigem Radius geschlagen; er schneidet die mit t bezeichnete, durch XII von

Ost nach West gehende Gerade in den Punkten IX und III, die Nord-Süd-Linie in P und Q. Der Kreis um P, der durch Q geht, schneidet t in den Punkten $VIII$ und $IIII$. Mit demselben Radius PQ werden die Kreise um $VIII$ und $IIII$ gelegt; sie schneiden t in den Punkten VII und I bzw. V und XI. Die Verbindenden von Q mit den Kreisschnittpunkten U und V schneiden t in den Punkten X und II. Schließlich wird der Radius $XII\,P$ des ersten Kreises um ein Drittel bis W und der Radius $XII\,Q$ um die Hälfte bis (D) verlängert. Alsdann sollen die Geraden von W nach den Punkten VII, $VIII$ ... V sowie die Parallele zu t durch W die

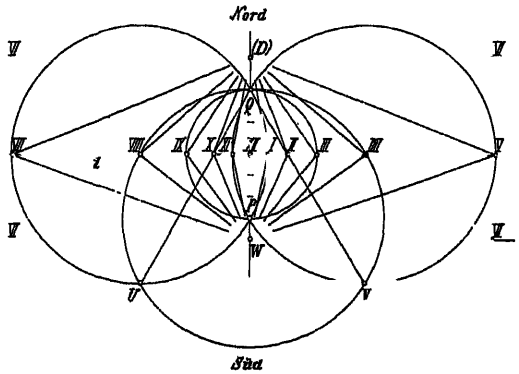


Fig. 70.

Stundenlinien der Horizontaluhr sein, ferner sollen die entsprechend von (D) statt von W aus gezogenen Geraden in der Umlegung die Stundenlinien derjenigen Vertikaluhr sein, deren Ebene längs t auf der Tafel senkrecht steht. Der Weiser soll die Gerade von W aus nach dem Punkte D sein, in den (D) gelangt, wenn man die Vertikalebene in die richtige Lage bringt. Die Frage ist, ob und für welche geographische Breite β diese Sonnenuhren richtig sind.

2) Man stelle diejenige Sonnenuhr her, deren Zifferblatt auf einer zum Weiser parallelen Ebene liegt. Die Schnittgerade dieser Ebene mit der wagerechten Tafel habe eine gegebene Himmelsrichtung und die geographische Breite β einen gegebenen Wert.

3) Wie verlaufen die Stundenlinien der Horizontaluhr für einen Punkt des Äquators?

4) Ein Würfel steht auf wagerechter Grundebene so, daß die eine Diagonale seiner Grundfläche von Nord nach Süd geht. Auf den beiden nach Süden gerichteten Seitenflächen sollen Sonnenuhren für eine gegebene geographische Breite hergestellt werden.

5) Auf einer genau nach Süden blickenden Hausfront wird als Zifferblatt einer Sonnenuhr eine Ebene angebracht, die um 10° nach vorn übergeneigt ist, so daß sie mit der wagerechten Ebene nur 80° bildet. Die zu einer gegebenen geographischen Breite β gehörigen Stundenlinien sind zu zeichnen.

6) Dieselbe Aufgabe mit der Abänderung, daß die Hauswand nicht genau von Ost nach West geht, sondern mit der Ost-West-Linie einen gegebenen Winkel bildet.

§ 5. Rechtwinklige Achsenkreuze.

49. Spurdreieck. Länge, Breite und Höhe werden in drei zueinander senkrechten Richtungen gemessen. Man legt deshalb den Messungen im Raum ein rechtwinkliges Achsenkreuz zugrunde, nämlich den Inbegriff von drei Geraden oder Achsen x, y, z, die durch einen gemein-

samen Punkt, den **Anfangspunkt** oder **Mittelpunkt** des Achsenkreuzes, gehen und zu je zweien einen rechten Winkel bilden. Den Anfangspunkt pflegt man mit O (origo = Ursprung) zu bezeichnen. Die Ebenen je zweier Achsen, die **Achsenebenen** yz, zx, xy, teilen den ganzen Raum in acht kongruente Teile, die man die **Oktanten** nennt.

Hat das Achsenkreuz eine beliebige Lage gegenüber der Tafel, so werden die Achsen die Tafel in Spurpunkten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ treffen, die ein Dreieck, das **Spurdreieck**, bilden. Nur dann, wenn mindestens eine Achse zur Tafel parallel ist oder wenn der Anfangspunkt O auf der Tafel liegt, artet dies Dreieck aus. Der zweite Fall wird vermieden, indem man die Tafel durch eine Höhenebene ersetzt Der erste Fall wird gelegentlich erörtert werden. Ist das Spurdreieck nicht ausgeartet, so hat man, da $\sphericalangle\mathfrak{Y}O\mathfrak{Z}$, $\sphericalangle\mathfrak{Z}O\mathfrak{X}$, $\sphericalangle\mathfrak{X}O\mathfrak{Y}$ rechte Winkel sind.

$$\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}^2 = O\mathfrak{Y}^2 + O\mathfrak{Z}^2, \quad \mathfrak{Z}\mathfrak{X}^2 = O\mathfrak{Z}^2 + O\mathfrak{X}^2, \quad \mathfrak{X}\mathfrak{Y}^2 = O\mathfrak{X}^2 + O\mathfrak{Y}^2,$$

also

$$\mathfrak{Z}\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{X}\mathfrak{Y}^2 = 2\,O\mathfrak{X}^2 + O\mathfrak{Y}^2 + O\mathfrak{Z}^2 > \mathfrak{Y}\mathfrak{Z}^2$$

So beweist man überhaupt die drei Ungleichheiten:

$$\mathfrak{Z}\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{X}\mathfrak{Y}^2 > \mathfrak{Y}\mathfrak{Z}^2, \quad \mathfrak{X}\mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Y}\mathfrak{Z}^2 > \mathfrak{Z}\mathfrak{X}^2, \quad \mathfrak{Y}\mathfrak{Z}^2 + \mathfrak{Z}\mathfrak{X}^2 > \mathfrak{X}\mathfrak{Y}^2.$$

Sie besagen, **daß das Spurdreieck stets spitzwinklig ist**

Statt vom Achsenkreuz im Raum gehen wir jetzt von irgendeinem gegebenen spitzwinkligen Dreieck $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ auf der Tafel aus Dann erhebt sich die Frage, ob es ein rechtwinkliges Achsenkreuz gibt, dessen Spurdreieck dies Dreieck ist. Wir werden sehen, daß es in der Tat sogar zwei gibt.

Gesucht wird der Punkt O, an ihn hat man drei Forderungen zu. stellen $\sphericalangle\mathfrak{Y}O\mathfrak{Z}$, $\sphericalangle\mathfrak{Z}O\mathfrak{X}$, $\sphericalangle\mathfrak{X}O\mathfrak{Y}$ sollen rechte Winkel sein Statt dessen kann man auch fordern $O\mathfrak{X}$ soll zur Ebene $\mathfrak{Y}O\mathfrak{Z}$ senkrecht sein, ebenso $O\mathfrak{Y}$ zur Ebene $\mathfrak{Z}O\mathfrak{X}$ und $O\mathfrak{Z}$ zur Ebene $\mathfrak{X}O\mathfrak{Y}$. Da nun $\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ die Spuren der drei Achsenebenen sein sollen, muß $O'\mathfrak{X}\perp\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$, $O'\mathfrak{Y}\perp\mathfrak{Z}\mathfrak{X}$, $O'\mathfrak{Z}\perp\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ sein (Nr. 18), wenn O' die senkrechte Projektion von O bedeutet, d h **Die senkrechte Projektion O' von O muß der Schnittpunkt der Höhen des Spurdreiecks $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ sein**, siehe Fig 71. Die Höhenfußpunkte seien mit H_x, H_y, H_z bezeichnet Wählt man nun O irgendwo auf dem Lot, das man im Höhenschnittpunkt O' auf der Tafel errichten kann,

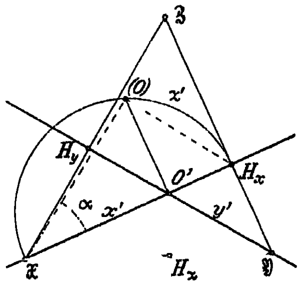


Fig 71

so sind die Ebenen $OO'\mathfrak{X}$, $OO'\mathfrak{Y}$, $OO'\mathfrak{Z}$ jeweils senkrecht zu den Geraden $\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, woraus folgt, daß die Geraden $O\mathfrak{X}$, $O\mathfrak{Y}$, $O\mathfrak{Z}$ oder x, y, z jeweils die Spuren $\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ senkrecht kreuzen. Aber dies genügt noch nicht, vielmehr wird gefordert, daß $O\mathfrak{X}$ auf der Ebene $\mathfrak{Y}O\mathfrak{Z}$ senkrecht stehe, $O\mathfrak{Y}$ auf der Ebene $\mathfrak{Z}O\mathfrak{X}$ und $O\mathfrak{Z}$ auf der Ebene $\mathfrak{X}O\mathfrak{Y}$. Nun wird $O\mathfrak{X}$ zur Ebene $\mathfrak{Y}O\mathfrak{Z}$ senkrecht, wenn man O auf dem in O' auf die Tafel errichteten Lot insbesondere so annimmt, daß $O\mathfrak{X}$ mit OH_x einen rechten Winkel bildet, also so, daß O auf dem Kreise liegt, der $\mathfrak{X}H_x$ zum Durchmesser hat und dessen Ebene auf der Tafel senkrecht steht. Man zeichnet diesen Kreis, indem man ihn

um die Spur $\mathfrak{X}H_x$ seiner Ebene in die Tafel umlegt. Dann bringt man das Lot zu $\mathfrak{X}H_x$ von O' aus mit dem umgelegten Kreis in (O) zum Schnitt. Die Höhe des gesuchten Punktes O muß nun gleich $O'(O)$ sein. Wird O dementsprechend angenommen, so steht die Gerade $O\mathfrak{X}$ auf der Ebene $\mathfrak{Y}O\mathfrak{Z}$ senkrecht, so daß $O\mathfrak{X} \perp O\mathfrak{Y}$ und $\perp O\mathfrak{Z}$ ist. Ferner wissen wir, daß $O\mathfrak{Y}$ die Gerade $\mathfrak{Z}\mathfrak{X}$ und $O\mathfrak{Z}$ die Gerade $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ senkrecht kreuzt. Da also $O\mathfrak{Y} \perp O\mathfrak{X}$ und $O\mathfrak{Y} \perp \mathfrak{Z}\mathfrak{X}$ ist, steht $O\mathfrak{Y}$ auf der Ebene $\mathfrak{Z}O\mathfrak{X}$ senkrecht. Da ferner $O\mathfrak{Z} \perp O\mathfrak{X}$ und $O\mathfrak{Z} \perp \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ ist, steht auch $O\mathfrak{Z}$ auf der Ebene $\mathfrak{X}O\mathfrak{Y}$ senkrecht. Demnach bilden $O\mathfrak{X}$, $O\mathfrak{Y}$, $O\mathfrak{Z}$ ein rechtwinkliges Achsenkreuz.

Beim Beweis ist es einerlei, ob die Höhe $O'(O)$ von O positiv oder negativ angenommen wird. Deshalb gibt es zwei zur Tafel symmetrisch gelegene Anfangspunkte O. Die beiden zugehörigen Achsenkreuze liegen zur Tafel symmetrisch; das eine geht durch Spiegelung an der Tafel in das andere über. Wählt man die Höhe $O'(O)$ positiv, so blickt man auf das Äußere des von $O\mathfrak{X}$, $O\mathfrak{Y}$, $O\mathfrak{Z}$ bestimmten Oktanten, andernfalls in sein Inneres.

Wäre das Dreieck $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ nicht spitzwinklig angenommen worden, so wäre der Höhenschnittpunkt O' außerhalb des Dreiecks gelegen. Dies zeigt aufs neue, daß das Spurdreieck spitzwinklig sein muß.

Die Höhe von O hätte man auch statt durch Umlegen der Ebene $\mathfrak{X}OH_x$ durch Umlegen der Ebene $\mathfrak{Y}OH_y$ oder $\mathfrak{Z}OH_z$ finden können. Da nun $O'(O)^2 = \mathfrak{X}O' \cdot O'H_x$ ist, folgt daraus:

$$O'O^2 = \mathfrak{X}O' \cdot O'H_x = \mathfrak{Y}O' \cdot O'H_y = \mathfrak{Z}O' \cdot O'H_z .$$

Demnach liefert diese Betrachtung den planimetrischen Satz, daß das Produkt der Höhenabschnitte im Dreieck $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ für jede der drei Höhen denselben Wert hat.

50. Neigungswinkel der Achsen. Die spitzen Winkel, die $O\mathfrak{X}$, $O\mathfrak{Y}$, $O\mathfrak{Z}$ mit der Tafel bilden, seien mit α, β, γ bezeichnet. Es ist (vgl. α in Fig. 71 in der Umlegung):

$$\sin\alpha = \frac{O'O}{O\mathfrak{X}}, \qquad \sin\beta = \frac{O'O}{O\mathfrak{Y}}, \qquad \sin\gamma = \frac{O'O}{O\mathfrak{Z}}.$$

Zwischen diesen drei Sinus besteht nun eine Gleichung. Um sie abzuleiten, gehen wir davon aus, daß die Dreiecksfläche

$$\triangle\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z} = \triangle\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}O' + \triangle\mathfrak{Z}\mathfrak{X}O' + \triangle\mathfrak{X}\mathfrak{Y}O'$$

ist, woraus folgt

$$2\triangle\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z} = \mathfrak{Y}\mathfrak{Z} \cdot O'H_x + \mathfrak{Z}\mathfrak{X} \cdot O'H_y + \mathfrak{X}\mathfrak{Y} \cdot O'H_z$$

Der erste Summand rechterhand läßt sich durch Multiplikation und Division mit $O'\mathfrak{X} \cdot H_x\mathfrak{X}$ auf die Form bringen:

$$\frac{\mathfrak{Y}\mathfrak{Z} \cdot H_x\mathfrak{X} \cdot O'H_x \cdot O'\mathfrak{X}}{O'\mathfrak{X} \cdot H_x\mathfrak{X}}.$$

Hierin ist $\mathfrak{Y}\mathfrak{Z} \cdot H_x\mathfrak{X} = 2\triangle\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$, ferner $O'H_x \cdot O'\mathfrak{X} = O'O^2$ und $O'\mathfrak{X} \cdot H_x\mathfrak{X} = O\mathfrak{X}^2$, so daß dieser Summand den Wert hat:

$$2\triangle\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z} \cdot \frac{O'O^2}{O\mathfrak{X}^2}.$$

Da $O'O : O\mathfrak{X} = \sin\alpha$ ist, wird der Summand gleich $2\triangle\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\cdot\sin^2\alpha$. Entsprechend lassen sich die beiden anderen Summanden umrechnen, und man bekommt:

$$2\triangle\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z} = 2\triangle\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\cdot\sin^2\alpha + 2\triangle\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\cdot\sin^2\beta + 2\triangle\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}\cdot\sin^2\gamma\,.$$

Folglich ist

$$1 = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$$

Dies ist die gesuchte Formel. Wenn man die Kosinus der Winkel einführt, geht sie in diese über:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos\gamma^2 = 2\,.$$

Die Kosinus der Neigungswinkel eines rechtwinkligen Achsenkreuzes zur Tafel haben somit die Quadratsumme Zwei.

51. Kennzeichen für die senkrechte Projektion eines rechtwinkligen Achsenkreuzes. Im spitzwinkligen Dreieck geht jede Höhe durch die beiden stumpfen Winkelfelder, die von den beiden anderen Höhen bestimmt werden. Im stumpfwinkligen Dreieck gilt dies nur für zwei Höhen. Da das Spurdreieck $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ nach Nr. 49 spitzwinklig ist, geht die Projektion jeder Achse durch die stumpfen Winkelfelder der Projektionen der beiden anderen Achsen.

Nun sei das Spurdreieck nicht gegeben, dagegen seien auf der Tafel von einem Punkt O' aus drei verschiedene Geraden x', y', z' so angenommen, daß keine zwei miteinander rechte Winkel bilden und jede durch die stumpfen Winkelfelder der beiden anderen geht. Dann läßt sich ein Dreieck $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ zeichnen, das x', y', z' zu Höhen hat und spitzwinklig ist. Man ziehe nämlich eine beliebige Senkrechte zu x'. Sie schneide y' und z' in $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$. Das Lot von $\mathfrak{Y}$ auf z' treffe x' in $\mathfrak{X}$. Nun hat $\triangle\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ die Höhen x' und z', also den Höhenschnittpunkt O', so daß $O'\mathfrak{Y}$ oder y' seine dritte Höhe sein muß, und da das Dreieck spitzwinklig ist, stellt es nach Nr. 49 das Spurdreieck eines rechtwinkligen Achsenkreuzes dar, x', y', z' sind die senkrechten Projektionen der Achsen.

Jetzt seien noch die Sonderfälle erörtert. Wenn eine Achse, z. B. x, zur Tafel parallel liegt, fällt ihr Spurpunkt $\mathfrak{X}$ ins Unendlichferne. Dann liegen y' und z' auf einer Geraden, und x' ist zu dieser Geraden senkrecht. Wenn zwei Achsen, z. B. x und y, zur Tafel parallel liegen, also eine Achsenebene zur Tafel parallel ist, fallen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ ins Unendlichferne. Dann ist die Projektion von z bloß ein Punkt, nämlich der Schnittpunkt von x' und y', und die Projektionen x' und y' sind zueinander senkrecht.

Demnach lassen sich alle Möglichkeiten wie folgt zusammenfassen:

Die senkrechte Projektion eines rechtwinkligen Achsenkreuzes besteht, falls keine Achse zur Tafel parallel liegt, aus irgend drei verschiedenen durch einen gemeinsamen Punkt gehenden Geraden, von denen keine zwei miteinander rechte Winkel bilden und jede durch die stumpfen Winkelfelder der beiden anderen geht. Falls eine Achse, aber keine Achsenebene zur Tafel parallel liegt, besteht die Projektion aus zwei zueinander senkrechten Geraden, von denen die eine die Projektion zweier Achsen und die andere die Projektion der zur Tafel parallelen Achse ist. Falls eine

Achsenebene zur Tafel parallel liegt, besteht die Projektion ebenfalls aus zwei zueinander senkrechten Geraden, aber in diesem Falle erscheint die zur Tafel senkrechte Achse bloß als der Schnittpunkt der beiden Geraden.

Ist keine Achse zur Tafel parallel, so kann man auf die vorhin angegebene Art unendlich viele Spurdreiecke $\mathfrak{XYZ}$ herstellen, da $\mathfrak{YZ}$ beliebig senkrecht zu x' gezogen wurde. Alle diese Spurdreiecke sind einander ähnlich und ähnlich gelegen mit dem Ähnlichkeitspunkt O'. Die zu zweien dieser Spurdreiecke gehörigen Achsenkreuze im Raum sind deshalb ebenfalls zueinander ähnlich gelegen mit dem Ähnlichkeitspunkt O'. Es kann aber auch eines von ihnen durch das hinsichtlich der Tafel zu ihm symmetrisch gelegene, also durch das an der Tafel gespiegelte Achsenkreuz ersetzt werden. Für alle diese Achsenkreuze sind die Neigungswinkel α, β, γ der Achsen zur Tafel dieselben

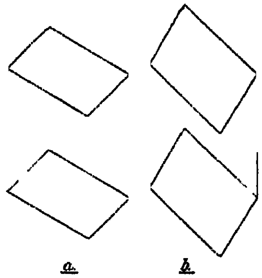
Sobald also die senkrechte Projektion eines rechtwinkligen Achsenkreuzes durch drei verschiedene von einem Punkt ausgehende Geraden x', y', z' gegeben sind, von denen keine zwei miteinander rechte Winkel bilden und jede durch die stumpfen Winkelfelder der beiden anderen geht, das Achsenkreuz demnach keine zur Tafel parallele Achse hat, sind die Neigungswinkel der Achsen zur Tafel vollkommen bestimmt

Man kann diese Winkel α, β, γ so ermitteln, wie es in Fig 71 von Nr 49 insbesondere fur α gezeigt ist

Noch sei hervorgehoben. Da die Achse x zur Achsenebene $y\,z$ senkrecht ist, erscheinen alle Höhenlinien der Ebene $y\,z$ als Senkrechte zu x' (Nr. 18) Ebenso erscheinen alle Höhenlinien der Ebene $z\,x$ als Senkrechte zu y' und alle Höhenlinien der Ebene $x\,y$ als Senkrechte zu z'.

In dem Sonderfall, wo eine Achse, z. B. x, aber keine Achsenebene zur Tafel parallel liegt, kann man aus den gegebenen Projektionen x', y', z', wovon jetzt y' mit z' zusammenfallt und $x' \perp y'$ ist, nicht entnehmen, welche Neigungen die Achsen y und z haben

52. Rechtflache. Fügt man zu drei Ebenen, die aufeinander senkrecht stehen, drei parallele Ebenen hinzu, so umschließen alle sechs einen Raumteil, der ein dreifach rechtwinkliges Parallelepipedon genannt wird, den wir jedoch kürzer ein Rechtflach nennen wollen Man sagt auch Quader. Die sechs rechteckigen Flächen des Körpers erscheinen im Bilde als ein Netz von Parallelogrammen, die zu je dreien eine Ecke gemein haben und die einen Teil der Ebene doppelt uberdecken. In Fig 72 sind zwei derartige Netze gezeichnet, die Frage ist, ob sie wirklich senkrechte Projektionen von Rechtflachen sind Dafür ist notwendig und hinreichend, daß die drei von irgendeinem gemeinsamen Punkt ausgehenden Parallelen zu den drei Richtungen, die im Netz vorkommen, die senkrechte Projektion eines rechtwinkligen Achsenkreuzes ausmachen. Daher liefert die letzte Nummer den Satz:



a b

Fig 72

Ein ebenes Netz von sechs Parallelogrammen, die zu je dreien eine Ecke gemein haben, ist dann, aber auch nur dann die senkrechte Projektion eines Rechtflachs, wenn in der Zeichnung entweder die drei Kanten, die von einer ausgewählten Ecke ausgehen, auf drei verschiedenen Geraden liegen, von denen keine zwei miteinander rechte Winkel bilden und von denen jede durch die stumpfen Winkelfelder der beiden anderen geht, oder zwei dieser drei Kanten in gerader Linie liegen und die dritte dazu senkrecht ist oder schließlich eine der drei Kanten die Länge Null hat und die beiden anderen zueinander senkrecht sind.

Der erste Fall ist der allgemeine, in dem keine Kante des Rechtflachs zur Tafel parallel liegt Er trifft fur Fig 72a zu, dagegen nicht für Fig 72b, die also falsch ist Aus dem vorgelegten Bild in Fig. 72a kann man nach den Ergebnissen der vorigen Nummer die wahren Längen der Kanten des Rechtflachs entnehmen. Dies ist in Fig. 73 geschehen Man zeichnet namlich, nachdem man drei von einem Eckpunkt O' ausgehende Kanten $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ des Bildes ausgewählt hat, irgendein Dreieck $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$, dessen Höhen auf diesen Kanten liegen, faßt das Dreieck als Spurdreieck auf und bedenkt, daß dann $\triangle\mathfrak{Y}O\mathfrak{Z}$, $\triangle\mathfrak{Z}O\mathfrak{X}$, $\triangle\mathfrak{X}O\mathfrak{Y}$ bei O rechtwinklig sind Infolgedessen namlich kann man die Umlegungen dieser Dreiecke um ihre Hypotenusen $\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ sofort finden Denn dabei gelangt O in solche Lagen (O), daß einerseits $O'(O)$ zur Drehgeraden senkrecht steht und (O) andererseits wegen des rechten Winkels ein Punkt auf dem Kreis mit dem Durchmesser $\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ oder $\mathfrak{Z}\mathfrak{X}$ oder $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ wird Da die Punkte X', Y', Z' bei den Umlegungen ebenfalls Lote zu den Drehgeraden beschreiben, sind die Umlegungen (X), (Y), (Z) zu ermitteln Man bemerkt, daß jeder der drei Punkte X, Y, Z in zwei Umlegungen vorkommt, jede Kantenlange a, b, c daher doppelt bestimmt wird Daß in Fig 73 der Punkt Z' auf der Verlangerung von $O'\mathfrak{Z}$ über $\mathfrak{Z}$ hinaus liegt, besagt, daß das Rechtflach eine Kante OZ hat, die die Tafel durchbohrt O und Z liegen auf verschiedenen Seiten der Tafel Nebenbei bemerkt. Die Hilfskreise gehen, wenn man sie fortsetzt, durch je zwei Hohenfußpunkte des Spurdreiecks $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$.

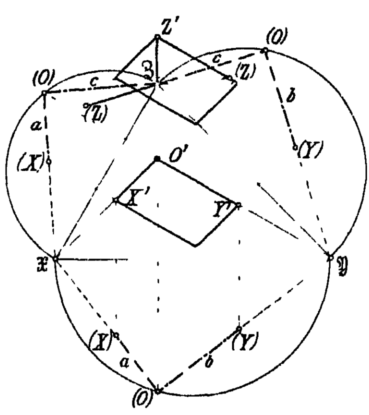


Fig 73

Ist eine Kante, aber keine Ebene des Rechtflachs zur Tafel parallel, so erscheint seine Projektion wie in Fig. 74 links, ist eine Ebene des Rechtflachs zur Tafel parallel, so erscheint sie wie in Fig. 74 rechts. Wir haben hier das Rechtflach mit den in Fig. 73 ermittelten Kantenlängen a, b, c dargestellt, müssen aber hervorheben, daß die Bilder in Fig. 74 auch andere Rechtflache vorstellen können,

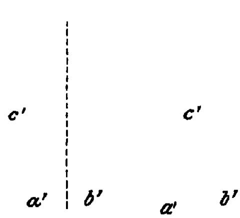


Fig. 74.

denn diese Bilder bestimmen nur die Längen derjenigen Kanten, die zur Tafel parallel sind.

53. Rechtwinklige Achsenkreuze mit gleichlangen Achsen. Eine Strecke von bestimmter Länge w werde auf jeder der drei Achsen des rechtwinkligen Achsenkreuzes vom Anfangspunkt O aus in einem der beiden möglichen Sinne aufgetragen. Dadurch ergeben sich drei Endpunkte, die wir mit X, Y, Z (zum Unterschiede von den Spurpunkten 𝔛, 𝔜, ℨ) bezeichnen. Diese Endpunkte heißen die Einheitspunkte der Achsen, wenn die Strecke w als die Einheit der Länge gewählt wird. Die unbegrenzten Achsen heißen positiv im Sinne von O nach X, von O nach Y und von O nach Z, negativ im entgegengesetzten Sinne

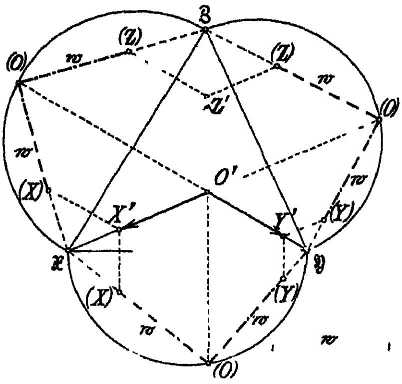


Fig 75

Um die senkrechte Projektion eines rechtwinkligen Achsenkreuzes mit gleichlangen Achsen zu bekommen, geht man umgekehrt wie in der letzten Nummer vor: Nachdem man ein spitzwinkliges Spurdreieck 𝔛𝔜ℨ nach Belieben gewahlt hat, siehe Fig. 75, bestimmt man den Höhenschnittpunkt O', der die Projektion des Anfangspunktes O des Achsenkreuzes ist, und legt die rechtwinkligen Dreiecke 𝔜Oℨ ℨO𝔛, 𝔛O𝔜 um ihre Hypotenusen in die Tafel um, wobei O in die drei Lagen (O) gelangt. Nun trägt man w auf den von (O) ausgehenden Strecken bis zu den mit (X), (Y), (Z) bezeichneten Punkten ab und ermittelt die Stellen X', Y', Z' auf O'𝔛, O'𝔜, O'ℨ durch Zurückdrehen der Dreiecke in ihre alten Lagen. Nach Nr 49 darf man nach Willkur annehmen, daß O über oder unter der Tafel liege. Im ersten Fall blickt man auf, im zweiten in den von OX, OY, OZ bestimmten Oktanten.

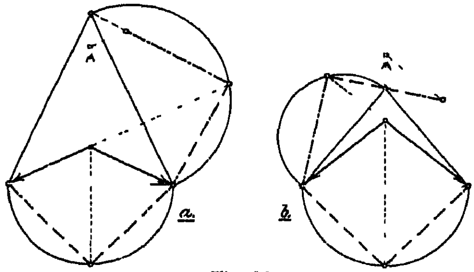


Fig 76

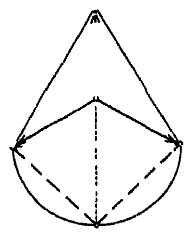


Fig. 77

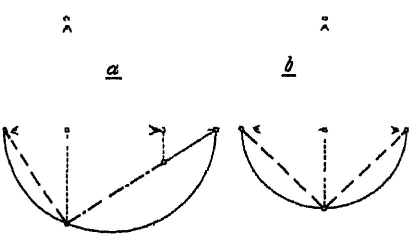


Fig. 78.

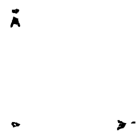


Fig 79

Nur dann, wenn das Spurdreieck gleichschenklig ist, erscheinen zwei der Achsen OX, OY, OZ im Bilde gleich lang, siehe Fig. 76. Nur wenn das Spurdreieck gleichseitig ist, erscheinen alle drei gleich lang, siehe Fig. 77. In diesem Falle sind sie offenbar gleich $w\sqrt{2:3}$.

Wenn eine Achse, jedoch keine Achsenebene zur Tafel parallel liegt, haben wir Fig. 78a, wo jene eine Achse in wahrer Länge erscheint. Offenbar ist hier die Summe der Quadrate der Projektionen der beiden anderen Achsen gleich dem Quadrat der wahren Achsenlänge w. Insbesondere, siehe Fig. 78b, können diese beiden Projektionen gleich lang sein, so daß jede gleich $\frac{1}{2} w \sqrt{2}$ ist. Wenn schließlich eine Achsenebene zur Tafel parallel liegt, entsteht das Bild in Fig. 79, wo zwei Achsen in wahrer Länge erscheinen und die dritte in der Länge Null.

54. Würfel. Hiernach bekommt man nun auch sofort die verschiedenen Arten der senkrechten Projektion eines Würfels. Die Bilder in Fig. 80 entsprechen den in Fig. 75 bis 79 erhaltenen Achsenkreuzen. Zur Erhöhung der Anschaulichkeit ist der Würfel als Kasten ohne Deckel dargestellt worden.

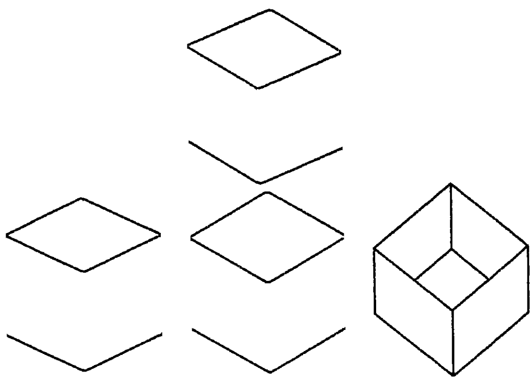


Fig. 80

Bemerkenswert ist die Darstellung in dem mittelsten Bilde. Hier haben alle Würfelkanten im Bilde dieselbe Länge $w\sqrt{2/3}$, wenn w die wahre Kantenlänge bedeutet. Der Umriß des Würfels, der im allgemeinen Fall ein Sechseck mit parallelen Seitenpaaren ist, stellt sich hier insbesondere als regelmäßiges Sechseck dar. Im letzten Bilde ist der Umriß ein Quadrat, dessen Kante gleich der wahren Kantenlänge w ist. Diese beiden besonderen Formen des Würfelbildes gestatten nebenbei eine Folgerung. Der Radius des dem regelmäßigen Sechseck eingeschriebenen Kreises ist gleich $\frac{1}{2} w \sqrt{2}$ und also gleich dem Radius des dem Quadrat umschriebenen Kreises. Deshalb kann man beide Figuren so in Fig. 81 aufeinanderlegen, daß das Quadrat vollständig im Innern des Sechsecks enthalten ist. Dies besagt: Man kann einen Würfel so durchbohren, daß ein ebenso großer Würfel hindurchgleiten kann.

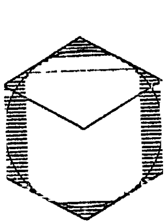


Fig. 81.

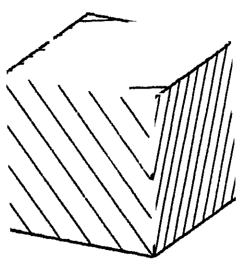


Fig. 82

Die Höhenlinien auf den Würfelflächen sind zu den zugehörigen Spurlinien parallel. Diese aber sind senkrecht zu den jeweils gegenüberliegenden Würfelkanten. Die Höhenschnitte in Schichten von gleichen Höhen über der Tafel sehen demnach wie in Fig. 82 aus. Die Schraffen auf jeder Ebene sind senkrecht zu derjenigen Kante, die der Ebene nicht angehört.

Vergleicht man die Darstellung des Würfels in dem allgemeinen Fall mit der Darstellung des Rechtflachs in Fig 72a oder 73 von Nr. 52, so erhebt sich die Frage nach einem einfachen Kennzeichen dafur, daß die senkrechte Projektion eines Rechtflachs insbesondere einen Würfel darstellt. Gewiß kann man die Frage bei vorgelegter Zeichnung so wie in Fig 73 entscheiden, indem man die wahren Kantenlängen ermittelt und untersucht, ob sie gleich groß ausfallen. Wir werden jedoch in Nr. 58 ein einfacheres Kennzeichen finden

55. Quadratische Momente bei rechtwinkligen Achsenkreuzen mit gleichen Achsenlängen. Zur Beantwortung der aufgeworfenen Frage ist es zweckmaßig, den Begriff des quadratischen Momentes, der in der Mechanik gebraucht wird, auch hier, aber in rein geometrischer Deutung, zu benutzen·

Unter dem quadratischen Moment mehrerer Punkte, sagen wir einer Punktgruppe, in bezug auf einen Punkt O oder in bezug auf eine Gerade l oder schließlich in bezug auf eine Ebene E soll die Summe der Quadrate der Abstande aller Punkte der Punktgruppe vom Punkte O oder von der Geraden l oder schließlich von der Ebene E verstanden werden. Nebenbei bemerkt sind diese Momente die Tragheitsmomente in der Mechanik, wenn man jeden Punkt der Punktgruppe mit der Masse Eins belegt.

Wir werden nun die quadratischen Momente der Einheitspunkte X, Y, Z eines rechtwinkligen Achsenkreuzes mit gleichlangen Achsen OX, OY, OZ benutzen. Ist wie bisher w die wahre Achsenlange, so ist das quadratische Moment der Einheitspunkte X, Y, Z in bezug auf den Anfangspunkt O des Achsenkreuzes gleich $3\,w^2$

Durch O sei eine beliebige Gerade g gezogen Wird auf ihr die Strecke w von O aus bis G abgetragen und werden durch G die zu den Achsenebenen parallelen Ebenen gelegt, so schließen diese Ebenen zusammen mit den Achsenebenen ein Rechtflach mit der Diagonale $OG = w$ ein. Das Quadrat der Diagonale ist gleich der Summe der Quadrate der drei Kantenlangen In G stoßen nun drei Rechtecke des Rechtflachs zusammen Die von G ausgehenden Diagonalen dieser Rechtecke sind die Abstande des Punktes G von den Achsen. Da das Quadrat jeder dieser Rechtecksdiagonalen gleich der Summe der Quadrate der beiden Rechteckskanten ist, erhellt: Die Summe der Quadrate der Abstande des Punktes G von den Achsen ist doppelt so groß wie die Summe der Quadrate der Kanten, d. h wie das Quadrat der Diagonale OG des Rechtflachs, also gleich $2\,w^2$. Da $OX = OG = w$ ist, hat aber G von der Achse x denselben Abstand wie X von der Geraden g. Entsprechendes gilt in bezug auf die beiden anderen Achsen Demnach haben die Abstände der drei Einheitspunkte X, Y, Z von der Geraden g dieselbe Quadratsumme wie die Abstände des Punktes G von den drei Achsen. Mit anderen Worten: Das quadratische Moment der Einheitspunkte X, Y, Z in bezug auf irgendeine durch den Anfangspunkt O gehende Gerade g ist gleich $2\,w^2$.

Schließlich sei irgendeine Ebene E durch O gelegt. Wird das in O auf E errichtete Lot mit g bezeichnet, so leuchtet ein, daß die Quadratsumme der Abstande irgendeines Punktes von der Ebene E und von der Geraden g gleich dem Quadrat der Entfernung desselben Punktes von O

ist. Wendet man diese Bemerkung auf die Einheitspunkte X, Y, Z an, so folgt: Die Quadratsumme der Abstände dieser Punkte von der Ebene E gibt, zur Quadratsumme der Abstande derselben Punkte von der Geraden g addiert, die Quadratsumme der Abstande derselben Punkte von O. Die zweite Quadratsumme ist gleich $2\,w^2$ und die dritte gleich $3\,w^2$, also die erste gleich w^2. Mit anderen Worten: **Das quadratische Moment der Einheitspunkte X, Y, Z in bezug auf irgendeine durch den Anfangspunkt O gehende Ebene E ist gleich w^2.**

Nun werde das Achsenkreuz mit den gleichlangen Achsen OX, OY, OZ senkrecht auf die Tafel projiziert. Dadurch gehen drei von O' ausgehende Strecken $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ hervor Wird unter E eine Ebene verstanden, die das Lot OO' enthält und daher langs einer durch O' gehenden Geraden s der Tafel auf der Tafel senkrecht steht, so ist das quadratische Moment von X, Y, Z in bezug auf E gleich w^2. Aber die Abstande der Einheitspunkte X, Y, Z von der Ebene E sind zur Tafel parallel und demnach gleich den Abstanden der Projektionen X', Y', Z' von der Spurgeraden s der Ebene E. Daraus folgt:

Ist $O'X'Y'Z'$ die senkrechte Projektion eines rechtwinkligen Achsenkreuzes mit gleichlangen Achsen OX, OY, OZ von der Lange w, so ist das quadratische Moment der projizierten Punkte X', Y', Z' in bezug auf irgendeine durch O' gehende Gerade s der Tafel gleich w^2

56. Hilfssatz uber quadratische Momente. Im folgenden mussen wir uns eines einfachen Satzes bedienen, der hier vorweg aufgestellt und bewiesen werden mag

Sind AB und AC zwei zueinander senkrechte Strecken, so liegt der Wert des quadratischen Moments des Punktepaares B, C in bezug auf eine durch A gehende Gerade l der Ebene ABC zwischen AB^2 und AC^2.

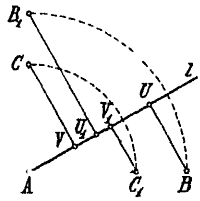


Fig 83

Zum Beweis werde AB auf AC von A aus bis B_1 abgetragen, ebenso AC auf AB von A aus bis C_1, siehe Fig. 83 Sind alsdann U, V und U_1, V_1 die Fußpunkte der Lote von B, C und von B_1, C_1 auf l, so ist $BU = AU_1$ und $CV = AV_1$. Wenn nun etwa $AB \geqq AC$ ist, hat man $AU \geqq AV_1$ und $AU_1 \geqq AV$, demnach

$$BU^2 + CV^2 = BU^2 + AV_1^2 \leqq BU^2 + AU^2 = AB^2,$$
$$BU^2 + CV^2 = AU_1^2 + CV^2 \geqq AV^2 + CV^2 = AC^2.$$

Also ist, wie behauptet wurde:

$$AB^2 \geqq BU^2 + CV^2 \geqq AC^2$$

Man kann hinzufügen. **Nur wenn $AB = AC$ ist, wird das quadratische Moment der Punkte B und C fur alle Geraden l gleich AB^2. Ist $AB > AC$, so erreicht es seinen großten Wert, namlich AB^2, wenn l mit AC zusammenfallt, und seinen kleinsten Wert, nämlich AC^2, wenn l mit AB zusammenfällt.**

57. Kennzeichen für die senkrechte Projektion eines rechtwinkligen Achsenkreuzes mit gleichlangen Achsen. Wir wollen zeigen, daß der am

Schluß von Nr. 55 aufgestellte Satz umgekehrt werden kann. Angenommen sei, daß auf der Tafel drei von einem Punkte O' ausgehende Strecken $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ vorliegen, die verschiedene Richtungen haben. Angenommen sei ferner, daß die Punkte X', Y', Z' in bezug auf die drei Geraden $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ dasselbe quadratische Moment haben.

Von den Strecken $O'X'$ und $O'Y'$ sei etwa $O'X'$ die längere, siehe Fig. 84. Auf der Geraden $O'Z'$ werde P so gewählt, daß $O'P = O'X$ ist. Dann ist das Lot von X' auf $O'Z'$ gleich dem Lot PQ von P auf $O'X'$. Andererseits ist das Lot von Y' auf $O'Z'$ nicht länger als das Lot PR von P auf $O'Y'$, weil $O'Y' \leqq O'X'$ ist. Da ferner Z' von der Geraden $O'Z'$ die Entfernung Null hat, haben also die drei Punkte X', Y', Z' in bezug auf die Gerade $O'Z'$ ein quadratisches Moment, das nicht größer als $PQ^2 + PR^2$ ist. Nun bedeute S den Fußpunkt des Lotes von X' auf $O'Y'$. Die Punkte X', Y', Z' haben in bezug auf die Gerade $O'Y'$ ein quadratisches Moment, das größer als $X'S^2$ ist. Da die Punkte X', Y', Z' aber nach Voraussetzung in bezug auf die Gerade $O'X$ dasselbe quadratische Moment wie in bezug auf die Gerade $O'Y'$ haben, folgt daraus

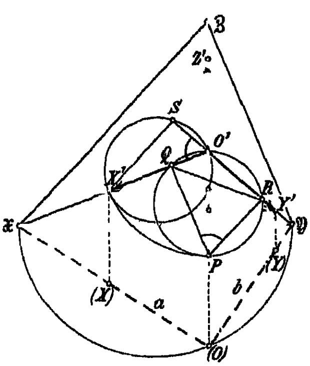


Fig. 84

$$PQ^2 + PR^2 > X'S^2 .$$

Die Strecke $X'S$ ist eine Sehne des Kreises mit dem Durchmesser $O'X'$; der zugehörige Peripheriewinkel ist $\sphericalangle SO'X'$. Die Strecke QR ferner ist Sehne des Kreises mit dem Durchmesser $O'P$; der zugehörige Peripheriewinkel ist $\sphericalangle QPR$. Weil beide Durchmesser gleich lang und beide Peripheriewinkel gleich groß sind, da die Schenkel des einen auf denen des anderen senkrecht stehen, ist daher $X'S = QR$. Somit ergibt sich.

$$PQ^2 + PR^2 > QR^2 .$$

Mithin hat das Dreieck PQR bei P einen spitzen Winkel. Also ist der Supplementwinkel $\sphericalangle X'O'Y'$ stumpf Die Gerade $O'Z'$ geht demnach durch die stumpfen Winkelfelder der beiden Geraden $O'X'$ und $O'Y'$

Ebenso beweist man, daß die Gerade $O'X'$ durch die stumpfen Winkelfelder der beiden Geraden $O'Y'$ und $O'Z'$ geht, sowie daß die Gerade $O'Y'$ durch die stumpfen Winkelfelder der beiden Geraden $O'X'$ und $O'Z'$ geht. Deshalb sind $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ nach Nr. 51 die senkrechten Projektionen dreier zueinander senkrechter Strecken OX, OY OZ im Raum.

Weiterhin ist noch nachzuweisen, daß diese Strecken OX, OY, OZ einander gleich sind: Nach Nr. 52, siehe Fig. 73, ermittelt man die wahren Längen, indem man irgendein Spurdreieck $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ wählt, dessen Höhen mit den Geraden $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ zusammenfallen. In Fig. 84 ist nur die Umlegung des Dreiecks $\mathfrak{X}O\mathfrak{Y}$ um die zu $O'Z'$ senkrechte Spurgerade $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ dargestellt. Wir wollen die Längen OX oder $(O)(X)$ und OY oder $(O)(Y)$, von denen erst noch zu beweisen ist, daß sie übereinstimmen, vorläufig mit a und b bezeichnen. Die Länge OZ sei c genannt. Nun betrachten wir das quadratische Moment der Punkte X', Y', Z' in bezug auf die Gerade $O'Z'$. Die Abstände der Punkte X' und Y' von $O'Z'$

sind gleich denen der Punkte (X) und (Y) von $O'Z'$, und der Punkt Z' hat von $O'Z'$ den Abstand Null. Das quadratische Moment ist daher gleich der Quadratsumme der Abstande der Punkte (X) und (Y) von $O'Z'$. Sein Wert liegt nach dem Hilfssatz der letzten Nummer zwischen den Werten von $(O)(X)^2$ und $(O)(Y)^2$, d h. zwischen a^2 und b^2, und zwar ist es nach der letzten Bemerkung jener Nummer weder gleich a^2 noch gleich b^2, es sei denn, daß $a = b$ ist. Da nun X', Y', Z' in bezug auf alle drei Geraden $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ nach Voraussetzung dasselbe quadratische Moment haben, liegt der Wert des Moments sowohl zwischen a^2 und b^2 als auch zwischen b^2 und c^2 als auch zwischen c^2 und a^2, und zwar ist es keinem dieser Werte a^2, b^2, c^2 gleich, falls nicht zwei von ihnen übereinstimmen.

Waren nun a, b, c alle drei verschieden und etwa b die mittlere der drei Strecken, so müßte der Wert des Moments, da er zwischen a^2 und b^2 aber auch zwischen b^2 und c^2 liegt, gleich b^2 selbst sein, was zu einem Widerspruch führt. Mithin sind a, b, c nicht alle drei verschieden lang Ware $a = b$, aber $c \neq a$, so mußte der Wert des Moments gleich a^2 sein Da er aber auch zwischen a^2 und c^2 liegt, mußte also doch wieder gegen die Voraussetzung $c = a$ sein Somit bleibt nur eine Moglichkeit ubrig. Alle drei Strecken a, b, c sind gleich lang. Hiermit ist bewiesen

Drei auf der Tafel von einem Punkt O' nach drei verschiedenen Richtungen ausgehende Strecken $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ stellen dann, aber auch nur dann die senkrechte Projektion eines rechtwinkligen Achsenkreuzes mit gleichlangen Achsen OX, OY, OZ dar, wenn die drei Punkte X', Y', Z' in bezug auf jede der drei Geraden $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ dasselbe quadratische Moment haben Dies Moment ist alsdann gleich dem Quadrat der wahren Achsenlange

Nach dem letzten Satz von Nr 55 kann man hinzufugen: Alsdann haben die drei Punkte X', Y', Z' in bezug auf jede durch O' gehende Gerade der Tafel dasselbe quadratische Moment

In dem bisher ausgeschlossenen Fall, wo die Richtungen der Geraden $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ nicht alle drei verschieden sind, kommen fur die senkrechte Projektion eines rechtwinkligen Achsenkreuzes nur die in Fig 78 und 79 von Nr 53 angegebenen Gestalten in Betracht Man sieht leicht, daß es hier nicht ausreichen wurde, zu fordern, daß X', Y', Z' in bezug auf die Geraden $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ dasselbe quadratische Moment haben. Dagegen ist ein auch diese Ausnahmefalle umfassender Satz der folgende

Drei auf der Tafel von einem Punkt O' ausgehende Strecken $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ stellen dann, aber auch nur dann die senkrechte Projektion eines rechtwinkligen Achsenkreuzes mit gleichlangen Achsen OX, OY, OZ dar, wenn die drei Punkte X', Y', Z' in bezug auf jede durch O' gehende Gerade der Tafel dasselbe quadratische Moment haben. Dies Moment ist alsdann gleich dem Quadrat der wahren Achsenlänge.

Anmerkung: Auch in den Ausnahmefallen wurde es genugen, zu fordern, daß X', Y', Z' in bezug auf drei verschiedene durch O' gehende Geraden der Tafel dasselbe quadratische Moment haben. Denn man kann beweisen, daß dann das quadratische Moment von X', Y', Z' in bezug auf jede durch O' gehende Gerade der Tafel denselben Wert hat, siehe die Anmerkung zu Nr. 98.

58. Kennzeichen für die senkrechte Projektion eines Würfels. Mit Hilfe des ersten in der vorhergehenden Nummer aufgestellten Satzes prüft man die Richtigkeit der senkrechten Projektion eines Würfels, indem man einen Eckpunkt der Zeichnung als Punkt O' und die Endpunkte der von O' ausgehenden Kanten als Punkte X', Y', Z' benutzt. Das quadratische Moment von X', Y', Z' hinsichtlich der Geraden $O'Z'$ ist die Summe der Quadrate der Breiten derjenigen beiden Streifen, die von der Geraden $O'Z'$ und den Parallelen zu ihr durch X' und Y' gebildet werden, siehe Fig. 85. Diese beiden Breiten greift man mit dem Zirkel ab, ohne die Lote zu ihnen wirklich zu zeichnen, und mit Hilfe eines rechten Winkels ermittelt man die zugehörige Hypotenuse. Ebenso verfahrt man in bezug auf die Streifen von der Richtung $O'X'$ und auf die von der Richtung $O'Y'$. Nur wenn sich drei gleichlange Hypotenusen ergeben, ist die Zeichnung richtig. Die Hypotenuse stellt dann die wahre Kantenlänge des Würfels dar.

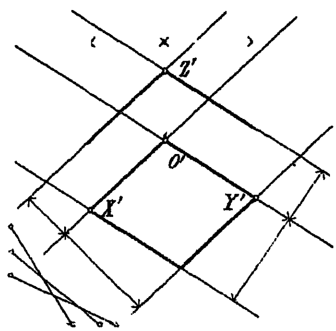


Fig. 85

Diese Prüfung gilt nicht in den Sonderfällen, wo Kanten oder Flächen des Würfels zur Tafel parallel sind, wo also entweder zwei von einer Ecke ausgehende Kanten in der Projektion eine gerade Linie bilden und die dritte dazu senkrecht erscheint oder eine der beiden ersten im Bilde die Länge Null hat, siehe die unteren Würfel in Fig. 80 von Nr. 54. Im ersten Fall besteht die Probe darin, daß die beiden ersten Kanten Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sein müssen, dessen Hypotenuse die dritte ist, und im zweiten Fall muß verlangt werden, daß die Projektion ein Quadrat sei.

Anmerkung. Für solche Leser, denen die in der Funktionentheorie angewandte komplexe Zahlenebene bekannt ist, sei erwähnt: Karl Friedrich Gauß, der große deutsche Mathematiker (geb. 1777 in Braunschweig, von 1807 an bis zu seinem Tod 1855 Professor der Mathematik an der Universität Göttingen) hat gelegentlich handschriftlich vermerkt und auch im Winter 1839/40 in einer Vorlesung gezeigt, daß, wenn die Tafel als komplexe Zahlenebene mit dem Nullpunkt O' benutzt wird, zu X', Y', Z' drei komplexe Zahlen gehören, deren Quadratsumme gleich Null ist, sobald $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ die senkrechten Projektionen dreier von der Ecke O ausgehenden Würfelkanten sind. Siehe „Carl Friedrich Gauß Werke", herausgeg. von der Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, 8. Bd. Leipzig 1900, S. 345—347. Die Gaußische Bedingung besagt, wie man leicht nachweist, dasselbe wie die, nach der X', Y', Z' in bezug auf alle durch O' gehende Geraden der Ebene dasselbe quadratische Moment haben müssen.

59. Ermittlung der wahren Achsenlänge aus den drei verkürzten Achsenlängen. Wenn $O'X'Y'Z'$ die senkrechte Projektion eines rechtwinkligen Achsenkreuzes mit gleichlangen Achsen OX, OY, OZ von der Länge w ist, mögen die Strecken im Bilde, nämlich

$$l = O'X', \quad m = O'Y', \quad n = O'Z',$$

die verkürzten Achsenlängen heißen. Bedeuten α, β, γ die spitzen Winkel, die OX, OY, OZ mit der Tafel bilden, so ist $l = w\cos\alpha$, $m = w\cos\beta$, $n = w\cos\gamma$. Nach der letzten Formel von Nr. 50 ergibt sich hieraus:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 2\,w^2.$$

Dasselbe folgt auch daraus, daß die Punkte X, Y, Z von der Geraden $O'O$ die Entfernungen l, m, n haben, und daß nach Nr. 55 das quadratische Moment der Punkte X, Y, Z in bezug auf jede Gerade durch O gleich $2\,w^2$ ist. Auf Grund der Formel kann man w ermitteln, falls l, m, n bekannte Längen sind; und zwar auch dann, wenn man noch nicht weiß, welche Lagen l, m, n oder $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ gegeneinander haben.

In Nr. 51 zeigte sich, daß, wenn nur die Richtungen von $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ bekannt sind, dadurch schon die Neigungswinkel der Achsen OX, OY, OZ zur Tafel bestimmt werden, so daß dann, wenn auch die wahre Achsenlänge w nicht gegeben sein sollte, doch immer die Verhältnisse

$$l : m : n = \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$$

der verkürzten Achsenlängen bestimmt werden. Dies legt die umgekehrte Fragestellung nahe. Angenommen, die Längen l, m, n seien irgendwie bestimmt gewählt, gibt es dann ein rechtwinkliges Achsenkreuz, dessen verkürzte Achsenlängen gleich l, m, n sind? Bejahendenfalls fragt es sich weiterhin, wie man die Zeichnung dieses Achsenkreuzes findet, d. h. wie man auf der Tafel die Richtungen von $l = O'X'$, $m = O'Y'$, $n = O'Z'$ gegeneinander bestimmt. Die Antwort wird in den nächsten Nummern gebracht werden. Vorher ist noch zu zeigen, weshalb man nicht alle drei Strecken l, m, n ganz beliebig lang annehmen darf.

Weil l, m, n die Bilder der wahren Achsenlänge w sein sollen, also $l \leq w$, $m \leq w$, $n \leq w$ sein muß, wird die rechte Seite der Formel

$$l^2 + m^2 + n^2 = 2\,w^2$$

höchstens verkleinert und jedenfalls nicht vergrößert, wenn man w durch l oder m oder n ersetzt. Mithin muß sein:

$$l^2 + m^2 + n^2 \geq 2\,l^2, \qquad l^2 + m^2 + n^2 \geq 2\,m^2, \qquad l^2 + m^2 + n^2 \geq 2\,n^2.$$

Diese Ungleichheiten kann man so schreiben, daß links allemal n^2 allein steht:

$$n^2 \geq l^2 - m^2, \qquad n^2 \geq m^2 - l^2, \qquad n^2 \leq l^2 + m^2.$$

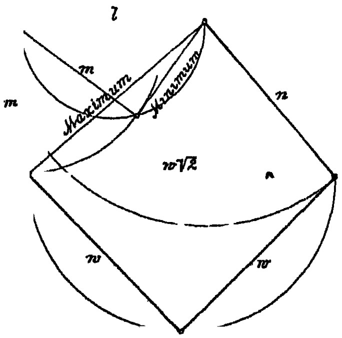


Fig. 86.

Nehmen wir an, zunächst seien die beiden Strecken l und m irgendwie gewählt worden, so besagen diese Bedingungen, daß die dritte Strecke n innerhalb gewisser Schranken gewählt werden muß. Eine der beiden Strecken l und m wird die längere sein, etwa l, oder beide sind gleich lang. Dann ist $m^2 - l^2$ negativ oder gleich Null, d. h. die zweite Bedingung $n^2 \geq m^2 - l^2$ wird stets erfüllt sein, wie lang auch n gewählt werden mag. Demnach bleiben für n nur die beiden durch

$$n^2 \geq l^2 - m^2, \qquad n^2 \leq l^2 + m^2$$

ausgedrückten Schranken übrig. Da $\sqrt{l^2 - m^2}$ die zweite Kathete des rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse l und der ersten Kathete m und $\sqrt{l^2 + m^2}$ die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den beiden Katheten l und m

ist, liefert die Konstruktion in Fig. 86 eine untere und eine obere Schranke für n. Die Strecke n muß zwischen diesem Minimum und Maximum gewählt werden. Ist dies geschehen, so ergibt sich auf Grund der Formel

$$l^2 + m^2 + n^2 = 2\,w^2$$

oder

$$\sqrt{l^2 + m^2}^{\,2} + n^2 = 2\,w^2$$

aus einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse $w\sqrt{2}$. Als Kathete des auf diese Hypotenuse gesetzten gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecks geht schließlich w hervor.

60. Verkürzungskreis. Bei der Beantwortung der in der letzten Nummer aufgeworfenen Frage, ob es zu bestimmt gewählten Längen l, m, n ein rechtwinkliges Achsenkreuz gibt, dessen verkürzte Achsenlängen gleich l, m, n sind, wird ein einfacher Satz über die Kugel gebraucht, den wir hier einschalten.

Der Mittelpunkt einer Kugel gehöre der Tafel an, so daß die Kugel die Tafel in einem Großkreise schneidet. Auf diesem Kreise sei ein Punkt $\mathfrak{X}$ gewählt, siehe Fig. 87. Gefragt werde dann nach den Endpunkten O aller derjenigen von $\mathfrak{X}$ ausgehenden Sehnen $\mathfrak{X}O$ der Kugel, die mit der Tafel einen vorgeschriebenen Winkel α bilden. Offenbar ist der Ort dieser Punkte O der Schnitt der Kugel mit einem in $\mathfrak{X}$ auf der Spitze stehenden geraden Kreiskegel, dessen Mantellinien mit der Tafel den Winkel α bilden. Man erkennt leicht, daß die Schnittlinie ungefähr die Form einer auf die Kugel geschriebenen Zahl Acht hat, deren Schleifenpunkt in $\mathfrak{X}$ liegt. Bemerkenswert einfach aber ist die senkrechte Projektion des Ortes. Ist nämlich O einer der Punkte, O' seine Projektion und K der zweite Endpunkt der von $\mathfrak{X}$ ausgehenden und O' enthaltenden Sehne des Großkreises, so gehört O demjenigen Kreis vom Durchmesser $\mathfrak{X}K$ an, in dem die Kugel durch die längs $\mathfrak{X}K$ auf der Tafel senkrecht stehende Ebene geschnitten wird. Er ist in der Umlegung $\mathfrak{X}(O)K$ gezeichnet. Nun ist $\sphericalangle\,(O)\mathfrak{X}K = \alpha$, folglich $\mathfrak{X}(O) = \mathfrak{X}K\cos\alpha$ und $\mathfrak{X}O' = \mathfrak{X}(O)\cos\alpha$, demnach $\mathfrak{X}O' = \mathfrak{X}K\cos^2\alpha$, d. h. $\mathfrak{X}O'$ steht zu $\mathfrak{X}K$ in dem konstanten Verhältnis $\cos^2\alpha : 1$. Man bekommt also alle Punkte O', wenn man alle von $\mathfrak{X}$ ausgehenden Sehnen $\mathfrak{X}K$ des Großkreises im Verhältnis $\cos^2\alpha : 1$ verkleinert. Daraus folgt:

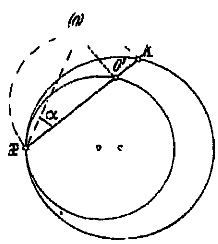


Fig. 87

Liegt der Mittelpunkt einer Kugel auf der Tafel und ist $\mathfrak{X}$ ein der Tafel angehöriger Punkt der Kugel, so ist der Ort der senkrechten Projektionen der Endpunkte aller von $\mathfrak{X}$ ausgehenden und mit der Tafel denselben Winkel α bildenden Kugelsehnen ein Kreis. Er geht aus dem Großkreis, in dem die Tafel die Kugel schneidet, durch Verkleinerung im Verhältnis $\cos^2\alpha \cdot 1$ vom Punkte $\mathfrak{X}$ aus hervor.

Dieser Ort der Punkte O' heißt ein Verkürzungskreis, und zwar aus folgendem Grunde: Anstatt zu fordern, daß die Sehne $\mathfrak{X}O$ der Kugel mit der Tafel einen gegebenen Winkel α bilde, kann man auch fordern: Die Sehne soll zur Tafel so geneigt sein, daß eine auf der Sehne auf-

getragene Strecke in einem vorgeschriebenen Verhaltnis $\cos\alpha : 1$ durch ihre Projektion auf die Tafel verkürzt werde, daß also eine von O aus auf $O\mathfrak{X}$ bis X aufgetragene gegebene Strecke $w = OX$ in der Projektion eine ebenfalls gegebene Länge $l = O'X'$ bekomme, indem dann $\cos\alpha = l : w$ ist. Der Verkurzungskreis ist also die Projektion des Ortes der Endpunkte aller derjenigen von $\mathfrak{X}$ ausgehenden Kugelsehnen, die vermöge der Projektion in demselben vorgeschriebenen Verhaltnis $l : w$ verkürzt werden.

Ist r der Radius der Kugel, so ist $r \cos^2\alpha$ oder $r\, l^2 : w^2$ der Radius des Verkürzungskreises.

61. Achsenkreuz mit vorgeschriebenen verkürzten Achsenlängen oder vorgeschriebenen Richtungen. Wir nehmen jetzt an, drei Strecken l, m, n seien zwar willkürlich, aber immerhin doch so gewahlt worden, wie es in Nr. 59 auseinandergesetzt wurde, d. h. nach willkurlicher Annahme von l und m sei die Länge n zwischen den dort bestimmten Schranken gewahlt. Wären nun l, m, n die verkürzten Achsenlangen eines rechtwinkligen Achsenkreuzes, so würde diejenige Strecke w, die in Nr. 59 konstruiert worden ist, die wahre Achsenlange sein. Es erübrigt noch zu zeigen, daß in der Tat ein zugehoriges rechtwinkliges Achsenkreuz vorhanden ist. Dies soll jetzt geschehen.

Weil man die Tafel durch irgendeine Hohenebene ersetzen kann (Nr. 12), laßt sich das noch unbekannte Spurdreieck $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ des fraglichen Achsenkreuzes durch geeignete Wahl dieser Hohenebene beliebig ahnlich vergrößern. Deshalb darf man eine Seite $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ dieses Dreiecks beliebig annehmen. Siehe Fig. 88, worin übrigens links oben das Wesentliche der Fig. 86 von Nr. 59 wiederholt worden ist. Alsdann ist zunachst zu fordern, daß der Mittelpunkt O des Achsenkreuzes auf der Kugel mit dem Durchmesser $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ liege, denn dann, aber auch nur dann ist $O\mathfrak{X}$ zu $O\mathfrak{Y}$ senkrecht. Ferner ist zu fordern: Wenn auf der Sehne $\mathfrak{X}O$ von O aus die Strecke $w = OX$ abgetragen wird, soll ihre Projektion $O'X'$ die Lange l haben. Mithin

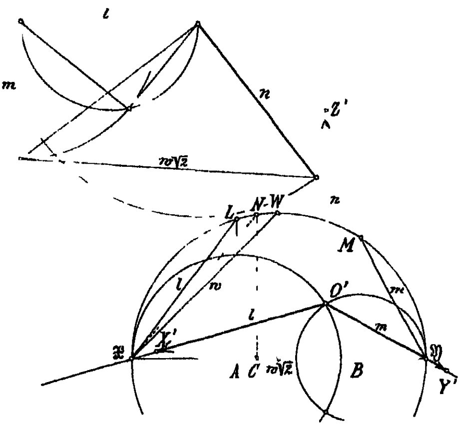


Fig. 88

muß O' nach der letzten Nummer auf dem Verkurzungskreis liegen, der aus dem Kreis mit dem Durchmesser $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ durch ahnliche Verkleinerung im Verhaltnisse $l^2 : w^2$ vom Ähnlichkeitspunkt $\mathfrak{X}$ aus entsteht. Ist A der Mittelpunkt dieses Verkürzungskreises, so ist der Radius $\mathfrak{X}A$ gleich $\frac{1}{2}\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, multipliziert mit $l^2 : w^2$. Wenn man die beliebig lang wählbare Strecke $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ gerade gleich der Strecke $w\sqrt{2}$ macht, die in Fig. 86 schon vorkam (auch in Fig. 88 oben ist sie angegeben), ist daher $\mathfrak{X}A \cdot \mathfrak{X}\mathfrak{Y} = l^2$. In Fig. 88 ist diese Annahme gemacht. Trägt man nun die Strecke l von $\mathfrak{X}$ aus bis L als Sehne in den Kreis vom Durchmesser $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ ein und fallt man das Lot LA auf $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, so ist in

dem rechtwinkligen Dreieck $\mathfrak{X} L \mathfrak{Y}$ augenscheinlich $\mathfrak{X}A \cdot \mathfrak{X}\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}L^2 = l^2$, wie verlangt wurde. Sobald nun O' auf dem Verkürzungskreis um A durch $\mathfrak{X}$ angenommen wird, liegt der zugehörige Punkt O der Kugel vom Durchmesser $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ so, daß $O\mathfrak{X}$ zu $O\mathfrak{Y}$ senkrecht ist und die auf $O\mathfrak{X}$ aufgetragene Strecke w in der Projektion die Länge l bekommt. Weiterhin soll nun die auf $O\mathfrak{Y}$ aufgetragene Strecke w in der Projektion die Länge m bekommen. Mithin muß O' auch auf einem zweiten Verkürzungskreis liegen. Sein Mittelpunkt B ergibt sich entsprechend, wenn man von $\mathfrak{Y}$ aus die Strecke m als Sehne $\mathfrak{Y}M$ in den Kreis vom Durchmesser $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ einträgt und das Lot MB auf $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ fällt, und außerdem geht dieser Kreis durch $\mathfrak{Y}$. Die Radien der beiden Verkürzungskreise sind:

$$\mathfrak{X}A = \frac{l^2}{w\sqrt{2}}, \qquad \mathfrak{Y}B = \frac{m^2}{w\sqrt{2}}$$

Daher ist die Zentrale AB beider Kreise, wegen $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = w\sqrt{2}$

$$AB = w\sqrt{2} - \frac{l^2}{w\sqrt{2}} - \frac{m^2}{w\sqrt{2}} = \frac{2w^2 - l^2 - m^2}{w\sqrt{2}} = \frac{n^2}{w\sqrt{2}},$$

denn es ist ja $2w^2 = l^2 + m^2 + n^2$ (Nr. 59). Da andererseits

$$\mathfrak{X}A + \mathfrak{Y}B = \frac{l^2 + m^2}{w\sqrt{2}}$$

und $n^2 \leqq l^2 + m^2$ (Nr. 59) ist, haben die beiden Verkürzungskreise sicher wenigstens einen Punkt O' gemein. Für den Punkt O, der auf der Kugel vom Durchmesser $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, liegt, ist jetzt erstens $O\mathfrak{X} \perp O\mathfrak{Y}$; zweitens hat die auf $O\mathfrak{X}$ von O bis X und drittens die auf $O\mathfrak{Y}$ von O bis Y aufgetragene Strecke w die Projektion $O'X' = l$ bzw. $O'Y' = m$, so daß man X' und Y' durch Auftragen von l und m auf $O'\mathfrak{X}$ und $O'\mathfrak{Y}$ findet. Nun läßt sich leicht einsehen, daß die zu $O\mathfrak{X}$ und $O\mathfrak{Y}$ senkrechte dritte Achse so gelegen ist, daß die auf ihr von O aus abgetragene Strecke $OZ = w$ in der Projektion $O'Z'$ die vorgeschriebene Länge n hat. Nach Nr. 59 ist nämlich

$$l^2 + m^2 + O'Z'^2 = 2w^2.$$

Nun war aber w in Nr. 59 auf Grund der Gleichung

$$l^2 + m^2 + n^2 = 2w^2$$

aus l, m, n ermittelt worden. Die Vergleichung lehrt, daß in der Tat $O'Z' = n$ ist. Da die Projektion von OZ als die eines Lotes der Ebene $O\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ zur Spurgeraden $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ senkrecht ist (Nr. 18), ergibt sich Z', indem man die Strecke n als Senkrechte $O'Z'$ zu $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ zeichnet. Nebenbei sei noch einmal daran erinnert, daß das in der Mitte von $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ errichtete Lot den Kreis vom Durchmesser $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ in W so schneidet, daß $\mathfrak{X}W = \mathfrak{Y}W = w$ ist (vgl. Fig. 86 von Nr. 59).

Im allgemeinen haben die Verkürzungskreise um A und B zwei Schnittpunkte O', diese Punkte liegen symmetrisch zueinander hinsichtlich $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$. Die beiden zu ihnen gehörigen Achsenkreuze liegen daher so, daß das eine aus dem andern durch Spiegelung an der Ebene hervorgeht, die längs $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ auf der Tafel senkrecht steht. Insgesamt bekommen wir sogar vier verschiedene Achsenkreuze, denn zu jedem der beiden Punkte O' gehören nach Nr. 49 je zwei Achsenkreuze, die zur Tafel symmetrisch liegen.

Nach Nr 51 bilden drei von einem Punkte O' der Tafel ausgehende Geraden, von denen jede durch die stumpfen Winkelfelder der beiden anderen geht, immer die senkrechte Projektion eines rechtwinkligen Achsenkreuzes Die Aufgabe, ein rechtwinkliges Achsenkreuz mit gleichlangen Achsen aus den vorgeschriebenen Achsenrichtungen im Bilde zu bestimmen, ist schon damals gelöst worden. Man kann aber diese Aufgabe auch dadurch lösen, daß man die Konstruktion von Fig. 88 in umgekehrter Reihenfolge durchführt Werden nämlich drei Geraden durch O' gegeben, auf denen die Projektionen der Achsen liegen sollen, so wählt man $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ auf den beiden ersten so, daß $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ zur dritten Geraden senkrecht ist, und schlägt den Kreis mit dem Durchmesser $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$, dann ergibt sich A als Schnitt von $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ mit der Mittelsenkrechten von $O'\mathfrak{X}$ und B als Schnitt von $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ mit der Mittelsenkrechten von $O'\mathfrak{Y}$. Durch Errichten der Lote AL und BM auf $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ bekommt man ferner L und M auf dem Kreis, so daß $\mathfrak{X}L = l$, $\mathfrak{Y}M = m$ zu setzen ist Das in der Mitte von $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ errichtete Lot trifft den Kreis in W, so daß $\mathfrak{X}W = w$ die wahre Achsenlänge vorstellt Um schließlich noch n zu ermitteln, trägt man die Strecke AB, die ja gleich $n^2 : w\sqrt{2}$ ist, von $\mathfrak{X}$ aus auf $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ ab und errichtet im Endpunkte C das Lot auf $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ Es schneidet den Kreis in einem Punkt N derart, daß $\mathfrak{X}N = n$ ist

Diese Konstruktion ist in der Tat nur dann statthaft, wenn jede der drei Achsen im Bilde durch die stumpfen Winkelfelder der beiden anderen geht, denn nur dann werden die ermittelten Strecken l, m, n sämtlich kleiner als w

62. Verkürzungsdreieck. Wir erinnern daran, daß nach Nr. 59 die drei Ungleichheiten gelten

$$m^2 + n^2 \geqq l^2, \quad n^2 + l^2 \geqq m^2, \quad l^2 + m^2 \geqq n^2$$

Da in einem Dreieck die Summe zweier Seiten nie kleiner als die dritte ist, gibt es also Dreiecke, deren Seitenlängen sich zueinander wie l^2, m^2, n^2 verhalten. Sie heißen Verkürzungsdreiecke In Fig 88 der letzten Nummer ist ein derartiges Dreieck enthalten. Denn es ist $AO' = \mathfrak{X}A = l^2 : w\sqrt{2}$, $BO' = \mathfrak{Y}B = m^2 : w\sqrt{2}$ und $AB = n^2 : w\sqrt{2}$, so daß sich die Seiten des Dreiecks ABO' zueinander wie $l^2 : m^2 : n^2$ verhalten Wegen $A\mathfrak{X} = AO'$ ist diejenige Gerade, die den Winkel A dieses Dreiecks in gleiche Teile zerlegt, zur Achse $O'\mathfrak{X}$ parallel Ebenso ist die Winkelhalbende von $\sphericalangle B$ zur Achse $O'\mathfrak{Y}$ parallel. Verschiebt man also das gezeichnete Achsenkreuz, ohne es zu drehen, so weit, bis O' der Schnittpunkt der Winkelhalbenden des Dreiecks ABO' wird, so sind die Projektionen der x- und y-Achse auf den Winkelhalbenden gelegen, während die Projektion der z-Achse zur Dreiecksseite AB senkrecht ist.

Hiernach kann man die Aufgabe, ein rechtwinkliges Achsenkreuz mit gleichlangen Achsen bei gegebenen Verhältnissen der verkürzten Achsenlängen im Bilde zu ermitteln, auch so lösen, wie es Fig. 89 zeigt: Die Verhältnisse $l : m : n$ darf man zwar beliebig vorschreiben, jedoch nur so, daß die Summe der Quadrate zweier Verhältniszahlen nie kleiner als das Quadrat der dritten ist. Hat man dementsprechend die Verhältnisse angenommen (z. B. $4 : 5 : 6$), so zeichnet

man ein Verkürzungsdreieck UVW, d. h. ein Dreieck, dessen Seiten in den Verhaltnissen stehen:

$$UW : VW : UV = l^2 . m^2 : n^2$$

(also in Fig 89 mit Seiten von den Längen 16, 25, 36), und teilt $\sphericalangle U$ und $\sphericalangle V$ in gleiche Teile. Der Schnittpunkt O' der Teilenden ist die Projektion des Mittelpunktes O des Achsenkreuzes, das Bild der x-Achse liegt auf $O'U$, das der y-Achse auf $O'V$, und das der z-Achse ist zu UV senkrecht. Da nun die Verhaltnisse $l . m \cdot n$ gegeben sind, bekommt man X', Y', Z', indem man auf den gezeichneten Achsen drei Strecken $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ so aufträgt, daß sie sich wie l $m . n$ verhalten Nachtraglich kann man die zugehörige wahre Achsenlange w ermitteln, indem man $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ mit l, m, n bezeichnet und die Konstruktion in Fig. 86 von Nr 59 anwendet

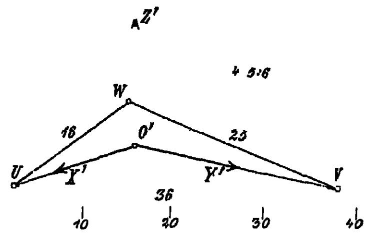


Fig 89

Anmerkung. Die Herstellung der senkrechten Projektion eines rechtwinkligen Achsenkreuzes mit gleichlangen Achsen liefert die Grundlage zu einem Projektionsverfahren, das man die senkrechte Axonometrie nennt und auf das wir in Nr. 282 zurückkommen Besondere Falle, z B den Fall, wo alle drei Achsen im Bilde gleich lang erscheinen, hatte man gelegentlich schon langst betrachtet Der allgemeine Fall, der ja auf die Aufgabe zuruckkommt, die allgemeine senkrechte Projektion eines Wurfels herzustellen, war auch schon fruher durch derartige Wurfelkonstruktionen erledigt worden Jedoch der Zusammenhang zwischen der wahren Achsenlange, den verkurzten Achsenlängen und den Richtungen der Achsen im Bilde wurde systematisch erst von Julius Weisbach (geb 1806 in Mittelschmiedeberg bei Annaberg, Professor an der Bergakademie in Freiberg, wo er 1871 starb) untersucht in der Abhandlung „Die monodimetrische und anisometrische Projektionsmethode (Perspektive)", Polytechn Mitteilungen 1 Bd Tubingen 1844, S 125—136 (Nebenbei bemerkt beziehen sich die beiden Bezeichnungen auf die Falle, wo zwei Achsen im Bilde gleich lang erscheinen bzw wo alle drei Achsen im Bilde verschieden lang werden) Weisbach ermittelte in dieser Arbeit wie auch in spateren Veroffentlichungen die Beziehungen zwischen w, l, m, n und den Winkeln $\sphericalangle Y'O'Z'$, $\sphericalangle Z'O'X'$, $\sphericalangle X'O'Y'$ durch trigonometrische Berechnung Auch Karl Wilh Pohlke (1810—1876, geb. und gest. in Berlin, wo er Professor an der Bau-Akademie und am Gewerbe-Institut war, aus deren Vereinigung die Berliner Technische Hochschule entstand) behandelte den Gegenstand mit Bevorzugung trigonometrischer Formeln in seinem Lehrbuch „Darstellende Geometrie zunachst fur den Gebrauch bei den Vortragen an der Kgl Bau-Akademie und dem Kgl. Gewerbe-Institut zu Berlin", 1 Abtl Berlin 1860, S 86—99 Insbesondere kam bei ihm als Hilfsmittel ein Verkurzungsdreieck vor (S 94) Aber erst Josef Tesař (Professor an der Staatsgewerbeschule in Brunn) gab eine erschopfende geometrische Darstellung des Gegenstandes, siehe seine Abhandlung „Der orthogonal-axonometrische Verkurzungskreis", Sitzungsberichte der mathem -naturw Klasse der K Akad. d Wiss. zu Wien, 81 Bd Abt II 1880, S 453—478 Er fuhrte den Begriff des Verkurzungskreises (Nr 60) ein (S 456) sowie den Namen Verkurzungsdreieck (S. 462). Dabei ergab sich auch der Satz, nach dem das Dreieck der Hohenfußpunkte $H_x H_y H_z$ in Fig. 71 von Nr 49 ein Verkurzungsdreieck ist (S 461 u f); dieses Satzes bedurften wir bei unserer Darstellung nicht Bezeichnen ξ, η, ζ die Winkel $Y'O'Z'$, $Z'O'X'$, $X'O'Y'$, also die Winkel der Achsen im Bilde, so kann man, wie Tesař zeigte (S 467), die Behauptung aufstellen: Jede Formel der ebenen Trigonometrie, die sich auf ein Dreieck, also auf seine Seiten und Winkel bezieht, verwandelt sich in eine Formel, die sich auf die senkrechte Projektion eines rechtwinkligen Achsenkreuzes mit gleichlangen Achsen bezieht, wenn man die Seitenlängen durch $l^2 : w^2$, $m^2 : w^2$, n^2 w^2, d h. durch $\cos^2\alpha$, $\cos^2\beta$, $\cos^2\gamma$ (Nr 50) und die Winkel des Dreiecks durch $2\xi - \pi$, $2\eta - \pi$, $2\zeta - \pi$ ersetzt (wo π den gestreckten Winkel bedeutet) Doch ist dabei die Langeneinheit gleich dem halben Umfang des Dreiecks UVW

anzunehmen. (Dies wegen der Gleichung $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$ in Nr. 50.) Außer den im vorhergehenden behandelten Aufgaben erledigte er auch Fälle, in denen für die Zeichnung andere Stücke gegeben sind, als wir oben annahmen (so die in Nr. 64 gestellten Aufgaben). Was den Begriff des Verkürzungsdreiecks betrifft, so ist noch zu erwähnen, daß $O'W$ in Fig. 89 mit $O'U$ denselben Winkel bildet wie $O'Z'$ mit $O'V$. Man kann daher auch $O'W$ als die Richtung der z-Achse in der Projektion benutzen, muß dann aber die x-Achse mit der y-Achse vertauschen So ist z. B das von Pohlke angegebene Dreieck beschaffen

63. Sinusmaßstab. Liegt die senkrechte Projektion eines rechtwinkligen Achsenkreuzes mit gleichlangen Achsen OX, OY, OZ von der Länge w vor und ist wie bisher $O'X' = l$, $O'Y' = m$, $O'Z' = n$, so wird eine auf einer Achse gelegene Strecke im Bilde in dem Verhältnis $l : w$ oder $m : w$ oder $n : w$ verkürzt. Diese Verkürzungen kann man auf folgende Art besonders bequem ermitteln

Man schlägt um den Scheitel 𝔒 eines rechten Winkels, dessen einer Schenkel etwa wagerecht sei, siehe Fig 90 (worin die Maße der Fig 88 von Nr 61 benutzt worden sind), einen Viertelkreis vom Radius w und trägt auf dem senkrechten Schenkel die Strecken l = 𝔒𝔏, m = 𝔒𝔐, n = 𝔒𝔑 ab Darauf bringt man den Kreis mit den durch 𝔏, 𝔐, 𝔑 gezogenen Wagerechten zum Schnitt und zieht von 𝔒 aus nach den Schnittpunkten die Strahlen 𝔵, 𝔶, 𝔷. Soll nun irgendeine gegebene Strecke in den Verhältnissen $l : w$, $m : w$, $n : w$ verkürzt werden, so schlägt man mit der Strecke als Radius den Kreis um 𝔒. Er schneidet 𝔵, 𝔶, 𝔷 in Punkten, deren Abstände von dem wagerechten Schenkel des rechten Winkels augenscheinlich die gesuchten Verkürzungen sind Diese Abstände ermittelt man durch Abgreifen mittels des Zirkels, ohne sie wirklich zu zeichnen

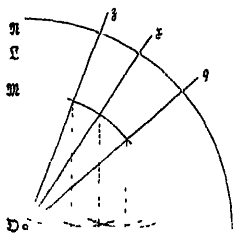


Fig 90

Man nennt diese Vorrichtung, die zu benutzen sich besonders empfiehlt, wenn man vielerlei Strecken in den vorgeschriebenen Verhältnissen zu verkürzen hat, den Sinusmaßstab weil die Sinus der Winkel, die 𝔵, 𝔶, 𝔷 mit der Wagerechten bilden, gleich $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (Nr 50) sind

64. Übungen. Für die senkrechte Projektion eines rechtwinkligen Achsenkreuzes mit gleichlangen Achsen sei gegeben

1) $l : w = \cos\alpha$ und $\sphericalangle X'O'Z'$,
2) $l : w = \cos\alpha$ und $\sphericalangle Y'O'Z'$,
3) $l : n$ und $\sphericalangle X'O'Z'$,
4) $l : n$ und $\sphericalangle Y'O'Z'$.

In jedem Fall soll die Zeichnung hergestellt werden

§ 6. Regelmäßige Körper und Kristalle.

65. Eulerscher Satz über konvexe Vielflache. Ein geschlossenes Vielflach oder Polyeder entsteht, wenn eine Anzahl von geradlinig begrenzten ebenen Vielecken oder Polyedern so zusammengesetzt wird, daß jede Kante zwei Vielecken angehört. Das Vielflach heißt konvex, wenn es nur auf einer Seite einer jeden Vielecksebene liegt. Ihm kommt dann ein Inneres zu Jede Ebene, die ein konvexes Vielflach überhaupt trifft, schneidet es in einem konvexen Vieleck, d h. in einem Vieleck

ohne einspringende Ecken. Insbesondere sind alle ein konvexes Vielflach begrenzenden Vielecke konvex. Eine Gerade, die durch einen im Innern eines konvexen Vielflachs gelegenen Punkt geht, schneidet das Vielflach stets und nur in zwei Punkten.

Der *Eulersche Satz* besagt

Die Summe aus der Anzahl aller Ecken und der Anzahl aller Flächen eines konvexen Vielflachs ist um zwei größer als die Anzahl aller Kanten des Vielflachs.

Man kann ihn mittels senkrechter Projektion auf einen Satz aus der Geometrie der Ebene zurückführen: Die Tafel werde so gewählt, daß sie zu keiner Kante des Violflachs senkrecht ist, so daß keine Kante in der Projektion die Länge Null bekommt. Die Projektion des Vielflachs überdeckt das Innere eines gewissen Vielecks auf der Tafel doppelt, indem zwei *Netze* aus geradlinigen Strecken entstehen, die den äußeren Rand, den *Umriß*, gemein haben, wie z. B. in Fig. 91. In a) und b) sind die beiden Netze getrennt dargestellt. Ein derartiges Netz möge e Ecken, f Maschen und k Kanten haben. Wir behaupten, daß $e + f - k$ gleich Eins ist. Dies trifft nämlich zunächst für den Fall zu, wo das Netz nur eine Masche hat ($f = 1$) und also durch ein einziges n-Eck ($e = k = n$) gebildet wird. Um also zu zeigen, daß die Behauptung allgemein richtig ist, genügt es, zu beweisen: Wird an ein Netz, bei dem $e + f - k$ gleich Eins ist, noch eine Masche hinzugefügt, so bewahrt es diese Eigenschaft. Es werde demnach eine etwa n-eckige Masche angesetzt, die mit dem schon vorhandenen Netz m Kanten gemein hat. Das neue Netz hat dann $n - (m + 1)$ Ecken mehr als das alte, ferner eine Masche mehr und $n - m$ Kanten mehr. Die Zahl der Ecken und Maschen zusammen ist jetzt um $n - m$, also um geradesoviel größer als die Zahl der Kanten, d. h. die Differenz $e + f - k$ ist die alte geblieben; demnach hat die Differenz auch jetzt den Wert Eins. Damit ist der Satz über die ebenen Netze bewiesen. Nun mögen die beiden Netze, die die Projektion eines konvexen Vielflachs ausmachen, e_1 bzw. e_2 Ecken, f_1 bzw. f_2 Maschen und k_1 bzw. k_2 Kanten haben. (In Fig. 91 ist $e_1 = 13$, $f_1 = 10$, $k_1 = 22$ und $e_2 = 12$, $f_2 = 11$, $k_2 = 22$.) Dann ist, wie bewiesen

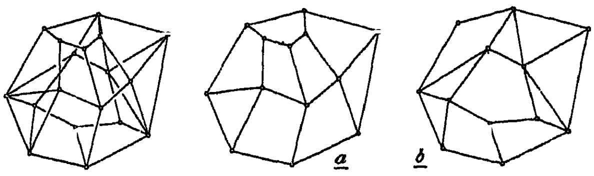


Fig. 91

$$e_1 + f_1 - k_1 = 1, \quad e_2 + f_2 - k_2 = 1.$$

Der beiden Netzen gemeinsame Rand sei ein r-Eck (in Fig. 91 ist $r = 7$). Beim Aufeinanderlegen beider Netze kommen dann r Kanten zur Deckung, aber auch r Ecken. Da die Maschen der Netze die Projektionen der Flächen des Vielflachs sind, ergeben sich demnach als Anzahlen E, F, K der Ecken, Flächen und Kanten des Vielflachs:

$$E = e_1 + e_2 - r, \quad F = f_1 + f_2, \quad K = k_1 + k_2 - r.$$

Hieraus folgt:

$$E + F - K = (e_1 + f_1 - k_1) + (e_2 + f_2 - k_2),$$

d. h. nach dem Vorhergehenden gilt die *Eulersche Formel*:

$$E + F = K + 2.$$

Anmerkung: Leonhard Euler (geb. 1707 in Basel, Professor der Mathematik in Petersburg und Berlin, schließlich wieder in Petersburg, wo er 1783 starb) veröffentlichte den Satz als bloßen Erfahrungssatz zuerst 1752 in der Abhandlung „Elementa doctrinae solidorum“ (Grundlagen der Lehre von den Körpern), Novi Commentarii Academiae Scient. Petropolitanae 4 Bd. 1752/53, gedruckt Petersburg 1758, S. 109—140 (insbes. S. 119). Einen Beweis gab er gleich darauf in der Abhandlung: „Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita“ (Beweis einiger bemerkenswerter Eigenschaften, mit denen die von ebenen Flächen eingeschlossenen Körper behaftet sind), ebenda S. 140—160. Schon viel früher hatte René Descartes (Renatus Cartesius, geb. 1596 zu La Haye in Touraine, Mitkämpfer im Dreißigjährigen Krieg, Philosoph und Mathematiker, in späteren Jahren meistens zurückgezogen in Holland lebend, gest. 1650 in Stockholm) einen Satz über die Winkelsummen der Flächen eines Vielflachs aufgestellt, worin im Grunde auch der Eulersche Satz enthalten war. Kenntnis davon hat man nur durch eine Abschrift, die Gottfried Wilhelm Leibniz (geb. 1646 in Leipzig, Philosoph, Mathematiker und als Diplomat im Dienste des Hauses Hannover tätig, gest. 1716 in Hannover) zwischen den Jahren 1672 und 1676 von einem Schriftstück des Descartes gemacht hatte, worin der Satz über die Winkelsummen ohne Beweis enthalten war. Diese Abschrift wurde jedoch erst bekannt durch ihren Abdruck in den „Oeuvres inédites de Descartes“ durch Foucher de Careil, 2 Bd. Paris 1860, S. 214. Beweise des Eulerschen Satzes mittels Projektion gab unter anderen Simon Antoine Jean L'Huilier (geb. 1750 in Genf, ebenda Professor an der Akademie, gest. daselbst 1840) in einem „Mémoire sur la polyédrométrie, contenant une démonstration directe du théorème d'Euler sur les polyèdres, et un examen des diverses exceptions, auxquelles ce théorème est assujetti“, das aber nie vollständig veröffentlicht worden ist, sondern von dem J. D. Gergonne in den Annales de Mathém. p. et appl. 3 Bd., 1812/13, S. 169 bis 189, nur einen Bericht mitgeteilt hat (siehe insbes. S. 182—184, wo sich der oben gegebene Beweis im wesentlichen findet). Zu dem Titel dieser Abhandlung von L'Huilier ist zu bemerken: Der Eulersche Satz gilt nicht nur für konvexe, sondern auch für gewisse nicht-konvexe Vielflache. Man nennt diejenigen Vielflache überhaupt, für die er besteht, Eulersche Vielflache. Wegen der zahlreichen Arbeiten, die über den Eulerschen Satz handeln, verweisen wir auf das Werk „Vielecke und Vielflache, Theorie und Geschichte“ von Max Brückner (geb. 1860 in Harthau, Oberlehrer in Bautzen) Leipzig 1900, S. 56 u. f.

66. Die regelmäßigen konvexen Vielflache. Dem Begriff des ebenen Vielecks steht dual (Nr. 5) der Begriff der räumlichen Ecke gegenüber. Wie es regelmäßige ebene Vielecke gibt, sind auch regelmäßige körperliche Ecken vorhanden. Die Kanten einer derartigen Ecke bekommt man dadurch, daß man von einem Punkte aus die Strahlen nach den Ecken eines regelmäßigen ebenen Vielecks zieht, vorausgesetzt, daß jener Punkt auf dem Mittellot des Vielecks liegt.

Ein konvexes Vielflach heißt regelmäßig, wenn seine Flächen lauter regelmäßige Vielecke und seine Eckpunkte lauter regelmäßige Ecken aufweisen. Man folgert leicht, daß alle seine Flächen kongruent sind, ebenso alle seine Ecken. Es gibt auch nicht-konvexe regelmäßige Vielflache, sogenannte regelmäßige Sternpolyeder, mit denen wir uns jedoch nicht beschäftigen wollen. Ist im folgenden von regelmäßigen Vielflachen die Rede, so sollen immer konvexe gemeint sein. Ein regelmäßiges konvexes Vielflach schließt einen regelmäßigen Körper ein.

Von allen Ecken eines regelmäßigen Vielflachs gehen gleichviele, etwa je m Kanten aus, und alle seine Vielecke haben gleichviele, etwa je n Kanten. Ist K die Anzahl aller Kanten des Vielflachs, so sind augenscheinlich

$$E = \frac{2K}{m} \quad \text{und} \quad F = \frac{2K}{n}$$

die aller Ecken und Flächen, so daß der Eulersche Satz die Formel liefert:

$$K = \frac{1}{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}}.$$

Da K positiv ist, muß demnach

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$$

sein, also der großere der beiden Stammbrüche großer als $\frac{1}{4}$, mithin die kleinere der beiden Zahlen m und n kleiner als 4 sein. Andererseits muß diese Zahl mindestens gleich 3 sein Folglich ist stets eine der beiden Zahlen m und n gleich 3. Dann aber lehrt die vorstehende Ungleichheit, daß die andere kleiner als 6 ist. Mithin gibt es nur fünf verschiedene Moglichkeiten $m = 3$, $n = 3, 4, 5$ und $m = 4$, $n = 3$ sowie $m = 5$, $n = 3$. Für jede geben die Formeln sofort die Werte von E, F, K. Die regelmaßigen Korper haben hiernach als Flachen entweder lauter gleichseitige Dreiecke oder Quadrate oder regelmaßige Fünfecke. Indem man versucht, die Vielflache aus solchen Vielecken aufzubauen, erkennt man, wie wir nicht weiter ausführen wollen, daß es in der Tat in jedem der funf Falle eine, aber auch nur eine Gestalt fur ein regelmaßiges Vielflach gibt. Ihre Namen und die zugehorigen Zahlen sind hier zusammengestellt

	m	n	E	F	K
Tetraeder (regelm Vierflach)	3	3	4	4	6
Hexaeder (regelm Sechsflach) oder Wurfel (Kubus)	3	4	8	6	12
Oktaeder (regelm Achtflach)	4	3	6	8	12
Dodekaeder (regelm Zwolfflach)	3	5	20	12	30
Ikosaeder (regelm Zwanzigflach)	5	3	12	20	30

Eigentlich gehört auch die Kugel als Vielflach mit unendlich vielen unendlich kleinen Flachen zu den regelmaßigen Korpern

Man beweist leicht, daß es eine einem regelmaßigen Vielflach umschriebene Kugel, namlich die durch alle seine Ecken, sowie eine ihm eingeschriebene Kugel, nämlich die alle ihre Flachen berührende, gibt und daß beide Kugeln denselben Mittelpunkt haben, den man den Mittelpunkt des Vielflachs nennt. Umschreibt man einem regelmäßigen Vielflach eine Kugel, so erzeugen diejenigen Ebenen, von denen die Kugel in den Eckpunkten des Vielflachs berührt wird, ihrerseits ebenfalls ein regelmaßiges Vielflach, das geradeso viele Kanten wie das erste hat, dagegen so viele Ecken wie das erste Flächen und so viele Flachen wie das erste Ecken Deshalb gehören die regelmaßigen Vielflache in Paaren dual zusammen (Nr 5). Das Tetraeder ist zum Tetraeder dual, das Hexaeder zum Oktaeder und das Dodekaeder zum Ikosaeder.

Das Dodekaeder wird oft als Pentagon-Dodekaeder (Fünfeck-Zwölfflach) zum Unterschiede von dem als Kristall vorkommenden nicht regelmaßigen Rhomben-Dodekaeder (Nr. 70) bezeichnet.

Die senkrechte Projektion des Hexaeders oder Würfels wurde in Nr. 54 erledigt. Aber auch die folgenden Nummern bis Nr. 62 waren ihr gewidmet, denn die senkrechte Projektion eines rechtwinkligen Achsenkreuzes mit gleichlangen Achsen zieht die des Würfels ohne weiteres nach sich

Die senkrechte Projektion des Tetraeders ergibt sich aus der des Würfels, wenn man als Ecken des Tetraeders solche vier Würfelecken benutzt, von denen keine zwei derselben Würfelkante angehören. Diese Auswahl kann man auf zwei Weisen treffen.

Die senkrechte Projektion des Oktaeders ergibt sich aus der Projektion des zum Oktaeder dualen Würfels, wenn man als Ecken des Oktaeders die Mittelpunkte der Würfelquadrate benutzt. Man bekommt sie auch aus der senkrechten Projektion eines rechtwinkligen Achsenkreuzes mit gleichlangen Achsen OX, OY, OZ, wenn man jeden der drei Einheitspunkte X, Y, Z an O spiegelt. Die drei Einheitspunkte und ihre drei Spiegelpunkte machen zusammen alle sechs Ecken eines Oktaeders aus.

In den folgenden Nummern wird gezeigt werden, wie man die allgemeine senkrechte Projektion eines Dodekaeders oder Ikosaeders bekommt

Anmerkung Hat auch vielleicht Pythagoras (als Grieche ungefähr von 528 bis mindestens 507 v Chr in Kroton in Unteritalien lebend, also zur Zeit der Abschaffung des Königtums in Rom) die fünf regelmäßigen Körper noch nicht gekannt, so waren sie doch der Schule der Pythagoraer bekannt Man nennt sie heute noch die platonischen Körper, weil der Philosoph Plato (wahrscheinlich geb 427, gest 347 v Chr, Athener und Zeitgenosse des peloponnesischen Krieges) in seinem Zwiegesprach „Timaus" den Pythagoraer Timaus von Lokri die regelmäßigen Körper mit den Gestaltungen der sogenannten Elemente Feuer, Erde, Luft und Wasser und des Weltganzen (dieses als Dodekaeders) in Verbindung bringen laßt Ob den Alten bekannt war, daß es wirklich nur fünf Gestalten von regelmäßigen Körpern gibt, steht dahin Ein Beweis dafür findet sich vielleicht zuerst bei Luca Paciuoli (geb ungefähr 1445, gest nach 1514, Franziskaner und mathematischer Wanderlehrer in Italien) in dem Buche „Summa de arithmetica, geometria e proportionalità", Venedig 1494 (2 Aufl. 1523), fol 4 rechts, dann auch in seinem Buche „Divina proportione, opera a tutti glingegni perspicaci e curiosi necessaria etc" (Göttliche Teilung, ein für alle klaren und wißbegierigen Geister notwendiges Werk usw), Venedig 1509, siehe den Abdruck und die Übersetzung von Konstantin Winterberg „Fra Luca Pacioli, divina proportione, die Lehre vom goldenen Schnitt", Quellenschriften für Kunstgeschichte und Kunsttechnik des Mittelalters und der Neuzeit, Neue Folge 2 Bd, Wien 1889, S 60 u f sowie S 213 u. f

67. Dem Ikosaeder und dem Dodekaeder um- und eingeschriebene Würfel. In jeder Ecke des Ikosaeders stoßen fünf gleichseitige Dreiecke zusammen, die eine regelmäßige fünfseitige Pyramide bilden Jede von der Spitze der Pyramide ausgehende Kante ist windschief, aber senkrecht zu derjenigen Kante des Grundfünfecks, die dem Endpunkte jener Kante gegenüberliegt. Deshalb gibt es zu jeder Ikosaederkante mindestens eine senkrechte Ikosaederkante In dem

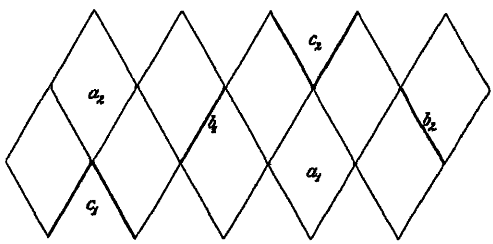


Fig. 92

Netz des Ikosaeders, siehe Fig. 92, macht man infolgedessen leicht drei Kantenpaare a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 ausfindig, von denen jedes Paar

aus parallelen Strecken besteht und zu jedem der beiden anderen Paare senkrecht wird, wenn man das Netz zum Ikosaeder zusammenbiegt.

Was das Dodekaeder betrifft, so stoßen an jeder Ecke drei regelmäßige Fünfecke zusammen. Diejenigen Diagonalen dieser Fünfecke, die je zwei zur gewählten Ecke benachbarte Ecken verbinden, bilden ein gleichseitiges Dreieck, und jede der drei von der gewählten Ecke ausgehenden Dodekaederkanten ist zu einer Seite dieses Dreiecks zwar windschief, aber senkrecht. Nun sind die erwähnten drei Diagonalen zu Fünfeckskanten parallel Deshalb gibt es zu jeder Dodekaederkante mindestens eine senkrechte Dodekaederkante In dem Netz des Dodekaeders, siehe Fig 93, macht man daher leicht drei Kantenpaare a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 ausfindig, die ebenso wie beim Ikosaeder in bezug aufeinander gelegen sind

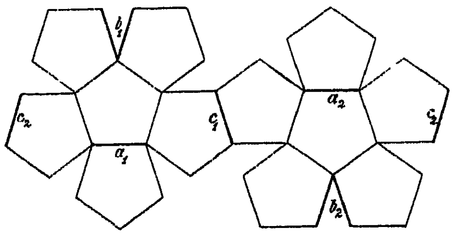


Fig 93

Sowohl beim Ikosaeder als auch beim Dodekaeder möge jetzt durch jede der ausgewählten sechs Kanten diejenige Ebene gelegt werden, die zu einem der beiden andern Kantenpaare parallel ist Diese sechs Ebenen schließen einen dem Ikosaeder bzw. Dodekaeder umschriebenen Würfel ein Jene sechs Kanten a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 des regelmäßigen Körpers liegen dabei auf Mittellinien der Würfelquadrate, indem stets die auf zwei benachbarten Würfelflächen zueinander windschief sind Da die sechs Kanten zwölf Endpunkte haben und dem Ikosaeder zwölf Ecken zukommen, sind diese Endpunkte im Fall des Ikosaeders alle Ecken des Körpers. Dagegen kommen dem Dodekaeder zwanzig Ecken zu, es bleiben hier also noch acht übrig. Diese sind die Endpunkte derjenigen Diagonalen der Fünfeckflächen, die zu den ausgewählten sechs Kanten parallel laufen, so daß sie die Ecken eines dem Dodekaeder eingeschriebenen Würfels ausmachen Dieser Würfel und der vorhin dem Dodekaeder umschriebene Würfel haben dieselbe Mitte und parallele Flächen

Nun muß noch festgestellt werden, wie sich die Längen der Ikosaeder- und Dodekaederkanten zur Länge der Würfelkante verhalten Zu diesem Zweck benutzen wir eine senkrechte Projektion, bei der die Würfel als Quadrate erscheinen, siehe Fig 94 und 95, deren Zeichnung im einzelnen aus dem Folgenden erhellen wird Die zur Tafel parallelen Kanten a_1 und a_2 stellen sich in wahrer Länge dar, die zur Tafel senkrechten Kanten b_1 und b_2 als Punkte. Das dritte Kantenpaar c_1, c_2 ist wieder zur Tafel parallel, es tritt in den wahren Längen als Streckenpaar auf dem Umriß des umschriebenen Würfels auf. Die durch b_1 und b_2 gehenden Flachen des Vielflachs erscheinen als die Strecken von den Punkten b_1' und b_2' nach den Endpunkten von c_1' und c_2'. Beim Ikosaeder ist zu beachten, daß die im höhergelegenen Endpunkt P von b_1 zusammenstoßenden fünf

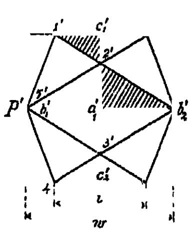


Fig 94

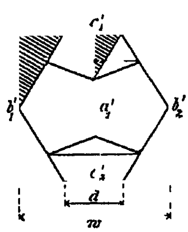


Fig 95

gleichseitigen Dreiecke die Seitenflächen einer regelmäßigen Pyramide sind, weshalb die mit *1'*, *2'*, *3'*, *4'*, *5'* bezeichneten Eckpunkte in Wahrheit ein regelmäßiges Fünfeck bilden. Im regelmäßigen Fünfeck ist aber die Kante *1 2* zur Diagonale *3 5* parallel; also ist $1'2' \parallel 3'5'$. Deshalb geht die Verlängerung von *1' 2'* nach dem Punkt b_1'. Die beiden in Fig. 94 geschrafften Dreiecke sind somit einander ähnlich. Was das Dodekaeder betrifft, so ist zu bemerken, daß die Projektionen von acht Eckpunkten, die sich zu je zweien decken, ein Quadrat bilden, dessen Diagonalen auf denen des großen Umrißquadrates liegen. Dasjenige Fünfeck, von dem c_1 eine Kante ist und dessen der Kante c_1 gegenüberliegende Ecke der eine Endpunkt von a_1 ist, hat wieder als regelmäßiges Fünfeck Diagonalen, die zu seinen Seiten parallel sind. Daraus ergibt sich die Ähnlichkeit der beiden in Fig. 95 geschrafften Dreiecke. Nun sei *w* die Kantenlänge des umschriebenen Würfels, *i* die des Ikosaeders, *d* die des Dodekaeders. Die Vergleichung der Katheten der ähnlichen Dreiecke in Fig. 94 und Fig. 95 liefert alsdann

$$\frac{\frac{1}{2}w}{\frac{1}{2}i} = \frac{\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}(w-i)} \quad \text{und} \quad \frac{\frac{1}{2}w}{\frac{1}{2}(w-d)} = \frac{\frac{1}{2}(w-d)}{\frac{1}{2}d},$$

also

$$\frac{w}{i} = \frac{i}{w-i} \quad \text{und} \quad \frac{w}{w-d} = \frac{w-d}{d}.$$

Da $i + (w - i) = w$ und $(w - d) + d = w$ ist, tritt beide Male die sogenannte goldene Teilung auf. Ist *w* eine Strecke, die in zwei Teile so zerlegt wird, daß sich die ganze Strecke *w* zum großen Teil wie dieser zum kleinen Teil verhalt, so heißt *w* bekanntlich golden geteilt, und man sieht: Die Kante des Ikosaeders ist gleich dem großen und die des Dodekaeders gleich dem kleinen goldenen Abschnitt der Kante des umschriebenen Würfels.

Die Kante des dem Dodekaeder eingeschriebenen Würfels ist nach Fig. 95 gleich der Diagonale des regelmäßigen Fünfecks von der Kantenlänge *d*. Wie man leicht sieht, ist in jedem regelmäßigen Fünfeck wegen der darin beim Ziehen der Diagonalen vorkommenden ähnlichen Dreiecke die Kante *d* der große goldene Abschnitt der Diagonale. Da die Kante *d* andererseits der kleine goldene Abschnitt von *w* ist, folgt: Die Kante des dem Dodekaeder eingeschriebenen Würfels ist gleich dem großen goldenen Abschnitt der Kante des ihm umschriebenen Würfels.

68. Senkrechte Projektion des Ikosaeders und Dodekaeders. Auf irgendeine der in Nr. 54—62 vorgetragenen Arten sei die senkrechte Projektion eines Würfels hergestellt worden. Diesem Würfel ist nun das Ikosaeder oder Dodekaeder einzubeschreiben. Zu diesem Zwecke zeichnet man auf den sechs Würfelflächen Mittellinienpaare derart, daß keine zwei auf einer Würfelkante zusammenstoßen, siehe Fig. 96 und 97. Alle sechs Mittellinien sind von ihren Mitten aus nach beiden Seiten gleichweit abzugrenzen und zwar so, daß ihre Längen gleich dem großen goldenen Abschnitt *i* bzw. kleinen goldenen Abschnitt *d* der Würfelkante *w* werden, aber selbstredend ist dabei zu beachten, daß die Strecken bei der Abbildung verkürzt werden, so daß sich die Längen

der Mittellinien im Bilde nach den Längen der zu ihnen parallelen Würfelseiten im Bilde richten (Nr. 9). Wie man dabei zeichnerisch am bequemsten vorgeht, wird nachher erörtert werden

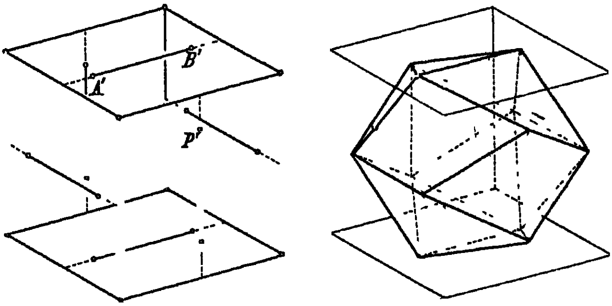


Fig 96

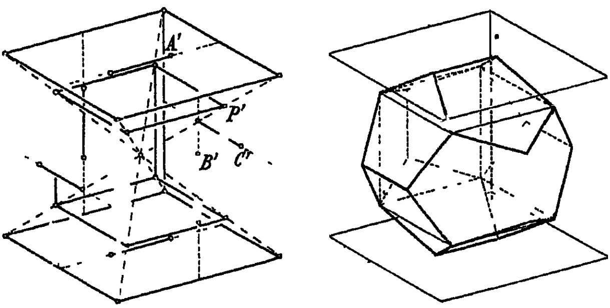


Fig 97

In Fig 96 ergeben sich so alle zwölf Ecken des Ikosaeders. Es handelt sich nur noch darum, sie richtig zu verbinden Zu den dreißig Kanten des Ikosaeders gehören zunächst die sechs zuerst gezeichneten Mittellinien. Die übrigen vierundzwanzig ergeben sich nach der Vorschrift Setzt man eine Mittellinie von ihrem Endpunkt P aus bis zur Würfelkante fort, so gelangt man zu einer benachbarten Würfelfläche, auf der eine Mittellinie AB liegt; dann wird P sowohl mit A als auch mit B durch eine Ikosaederkante verbunden, und so verfährt man überall

Für das Dodekaeder geben die sechs Mittellinien in Fig. 97 nur zwölf von den zwanzig Ecken. Die übrigen acht sind die des eingeschriebenen Würfels, und sie liegen auf den Diagonalen des umschriebenen Würfels Die Diagonale des eingeschriebenen Würfels ist nach Nr 67 gleich dem großen goldenen Abschnitt der Diagonale des umschriebenen Würfels Man bestimmt also ihre Zeichnungen entsprechend wie die der Mittellinien unter Beachtung der durch die Projektionen entstehenden Verkürzungen. Zu den dreißig Kanten des Dodekaeders gehören nun zunächst die sechs Mittellinien. Die übrigen vierundzwanzig liefert die folgende Vorschrift: Jede Ecke P des eingeschriebenen Würfels ist zu einer Ecke des umschriebenen Würfels und demnach zu drei Flächen dieses Würfels benachbart; in jeder der drei Flächen faßt man den nächstliegenden Endpunkt einer Mittellinie ins Auge. Dies gibt drei Punkte A, B, C, und ihre Verbindung mit P liefert drei Kanten des Dodekaeders.

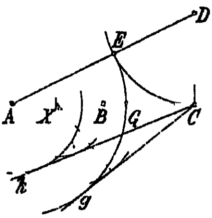


Fig 98

Die wiederholt anzuwendende goldene Teilung stellt man wie folgt her: Es wird eine beliebige Strecke AB gewählt und um ihre Länge über B hinaus bis C verdoppelt, siehe Fig. 98 Dann wird in C das Lot $CD = CB$ auf AC errichtet und die Gerade AD mit dem Kreis um D vom Radius DC geschnitten. Dadurch ergibt sich ein zwischen A und D

gelegener Punkt E. Nun ist $AC^2 = AE \cdot (AE + 2ED)$ und $2ED = AC$, also

$$AC^2 = AE^2 + AE \cdot AC$$

oder

$$AC^2 - AE \cdot AC = AE^2,$$

woraus folgt

$$\frac{AC}{AE} = \frac{AE}{AC - AE}.$$

Diese Proportion besagt, daß AE der große goldene Abschnitt von AC ist. Der Kreis um A durch E schneide die Strecke AC in G, alsdann wird also AC durch G golden geteilt. Um von anderen Strecken bequem den großen oder kleinen goldenen Abschnitt zu finden, legt man an den Kreis um A durch E sowie an den Kreis um A mit dem Radius GC von C aus die Tangenten g und k. Will man jetzt von einer beliebigen Strecke x den großen oder kleinen goldenen Abschnitt finden, so trägt man x auf CA von C aus bis X auf und ermittelt den Abstand des Punktes X von g oder k mit dem Zirkel, ohne diesen Abstand wirklich zu zeichnen.

Übrigens ist es augenscheinlich zweckmäßig, beim Zeichnen des Ikosaeders oder Dodekaeders die großen oder kleinen goldenen Abschnitte der halben Kanten oder Diagonalen zu ermitteln

Anmerkung Die goldene Teilung wurde vielleicht zuerst gelehrt durch Eudoxus (um 390—337 v Chr, Schüler Platos, gest in Knidos) Euklides (um 300 v Chr am Hofe Ptolemäus I in Alexandria) nennt sie im 6 Buch seiner berühmten „Stoicheia" oder „Elemente" die stetige Teilung (siehe z B „Euklides Elemente, fünfzehn Bücher", übersetzt von Joh Friedr Lorenz, neu herausgegeben von Karl Mollweide, 3 Aufl Halle 1809, S 104) Die in Fig 98 angegebene Konstruktion des Teilpunktes G soll von Hero herrühren, einem bedeutenden griechischen Mathematiker, der im ersten Jahrhundert vor oder nach Chr in Alexandria lebte Die goldene Teilung wurde und wird oft als die schönste bezeichnet Ihr begeisterter Verehrer war der bei Nr 66 erwähnte Luca Pacioli, der sie die göttliche Teilung nannte Der Name goldene Teilung soll neueren Ursprungs sein Im neunzehnten Jahrhundert war Adolf Zeising (geb. 1810 in Ballenstedt, anhaltischer Gymnasiallehrer, gest 1876 in München) ein leidenschaftlicher Vorkämpfer für die ästhetische Wichtigkeit des goldenen Schnittes, siehe seine Schriften· „Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers usw", Leipzig 1854, „Der goldene Schnitt, aus seinem Nachlaß", Halle 1884 Als Beispiel sei erwähnt Die Strecke vom Fuß bis zur Spitze der herabhangenden Hand eines aufrechtstehenden Mannes ist der kleine goldene Teil der ganzen Körperlänge Ferner sei genannt Fr Xaver Pfeifer (Lyzealprofessor in Dillingen) „Der goldene Schnitt und dessen Erscheinungsformen in Mathematik, Natur und Kunst", Augsburg 1885

Ist γ das Verhältnis des großen goldenen Abschnittes zum Ganzen, so ist

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{\gamma}{1-\gamma},$$

d. h. γ ist die positive Wurzel der quadratischen Gleichung $\gamma^2 + \gamma - 1 = 0$, nämlich

$$\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}61803\,.$$

Da hiernach

$$\gamma = \frac{1}{1+\gamma}$$

ist und γ zwischen 0 und 1 liegt, liefert das Einsetzen von 0 oder 1 statt γ auf der rechten Seite für γ die Schranken 1 und $\frac{1}{2}$. Setzt man weiterhin rechts für γ diese Schranken

1 und $\frac{1}{2}$ statt γ, so ergeben sich für γ die neuen und engeren Schranken $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{3}$, usw. Auf diese Art erkennt man, daß die Brüche

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{5}{8}, \quad \frac{8}{13}, \quad \ldots,$$

von denen jeder folgende als Zähler den vorhergehenden Nenner und als Nenner die Summe aus dem vorhergehenden Zähler und Nenner hat, Näherungswerte für γ sind, die den wahren Wert immer enger einschließen, indem der wahre Wert zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Brüchen der Reihe gelegen ist. Der zeichnerisch gerade noch bequeme Näherungswert $\frac{5}{8}$ ist um nicht ganz 1% zu groß.

Euklides stellte in seinen „Elementen“ (a. a. O. S. 414 u. f.) das Dodekaeder mit Hilfe des eingeschriebenen Würfels her. In der Abhandlung von P. Schönemann „Über die Konstruktion und Darstellung des Ikosaeders und Sternen-Dodekaeders“, Zeitschr. f. Math. u. Physik 18. Jahrg. 1873, S. 387—392, findet man eine Konstruktion des Ikosaeders mittels des umschriebenen Würfels.

Wenn man für den einem Ikosaeder oder Dodekaeder umschriebenen Würfel eine der in Nr. 54 erwähnten oder gewisse andere besonders ausgezeichnete Lagen gegenüber der Tafel wählt, gelangt man zu besonderen, durch gewisse Regelmäßigkeiten ausgezeichneten senkrechten Projektionen des Ikosaeders oder Dodekaeders. Entsprechendes gilt vom Tetraeder und Oktaeder, die ja nach Nr. 66 ebenfalls aus dem Würfel abgeleitet werden können.

69. Das Achtundvierzigflach. Die Kristallgestalten ordnen sich in fünf Systemen an. Das erste heißt das tesserale System (vom lat. tessera, Würfel), und alle tesseralen Gestalten werden auf drei gleichlange rechtwinklige Achsen OX, OY, OZ bezogen. Um die Grundform des Systems zu bekommen, nimmt man drei verschiedene bestimmte positive Zahlen a, b, c an und stellt die Gesamtheit derjenigen Ebenen her, die von den positiven oder negativen Achsen (Nr. 53) die Strecken a, b, c abschneiden, gemessen mit der Achsenlänge als Einheit. Dabei sollen alle verschiedenen Arten der Reihenfolge der Zahlen a, b, c gestattet sein. Gibt man die Abschnitte auf den Achsen in der Reihenfolge der x-, y- und z-Achse an, so kann man jede in Betracht kommende Ebene unzweideutig kennzeichnen. So stellt z. B. $(b, -a, -c)$ diejenige Ebene dar, die auf der positiven x-Achse die Strecke b, auf der negativen y-Achse die Strecke a und auf der negativen z-Achse die Strecke c abschneidet.

Unter den Ebenen befinden sich zunächst sechs mit nur positiven Abschnitten:

$$(a, b, c), \quad (b, c, a), \quad (c, a, b),$$
$$(b, a, c), \quad (c, b, a), \quad (a, c, b).$$

Wird hier eine der drei Zahlen mit dem Minuszeichen versehen, so gehen jedesmal weitere sechs Ebenen hervor, ebenso wenn zwei der drei Zahlen mit dem Minuszeichen versehen werden. Schließlich gibt es noch sechs Ebenen mit lauter negativen Abschnitten. Insgesamt liegen somit achtundvierzig Ebenen vor. Das von ihnen eingeschlossene konvexe Vielflach ist die Grundform des tesseralen Systems, das Achtundvierzigflach oder Hexakisoktaeder (d. h. Sechsmalachtflach). Wegen der Konvexität des Körpers kommt von jeder Ebene nur derjenige Teil in Betracht, der dem Anfangspunkt O näher liegt als alle übrigen Ebenen. Deshalb wird dasjenige Achtel des Körpers, das in dem von OX, OY, OZ bestimmten Oktanten liegt, durch die sechs vorhin zuerst angegebenen Ebenen begrenzt. Da die übrigen Achtel des Körpers zu diesem kongruent oder symmetrisch sind, kommt es wesentlich nur darauf an,

die Form dieses einen Achtels zu erkennen. Wir behaupten, daß **die sechs angegebenen Ebenen samtlich einen Punkt gemein haben.** Zum Beweise brauchen wir den Begriff der **Hauptdiagonale des Achsenkreuzes,** darunter wird die von O ausgehende Diagonale desjenigen Würfels verstanden, der die Strecken OX, OY, OZ als Kanten hat. Diese Hauptdiagonale bildet mit allen drei Achsen denselben Winkel Wenn man nun das starr gedachte Achsenkreuz um die Hauptdiagonale durch einen Winkel von 120° dreht, geht es in sich uber, indem OX nach OY, OY nach OZ und OZ nach OX gelangt. Ferner Spiegelt man das Achsenkreuz an der Ebene durch die Hauptdiagonale und eine Achse, z. B. OZ, so geht OX in OY und OY in OX über, wahrend OZ ungeändert bleibt. Sowohl bei jener Drehung als auch bei dieser Spiegelung bleibt jeder Punkt der Hauptdiagonale in Ruhe Daraus folgt für die Drehungen. Führt man die Drehung zweimal nacheinander aus, so geht die Ebene (a, b, c) zuerst in die Ebene (b, c, a) und dann in die Ebene (c, a, b) uber, und alle drei Ebenen haben denselben Punkt P der Hauptdiagonale gemein. Ferner folgt fur die Spiegelung Spiegelt man das Achsenkreuz an der Ebene durch die Hauptdiagonale und durch OZ, so gehen die Ebenen (a, b, c), (b, c, a) und (c, a, b) in die Ebenen (b, a, c), (c, b, a) und (a, c, b) uber, und auch alle diese Ebenen gehen durch den Punkt P der Hauptdiagonale. Infolgedessen bilden jene sechs vorhin zuerst angegebenen Ebenen im Oktanten $OXYZ$ sechs Dreiecke des Achtundvierzigflachs derart, daß alle den Eckpunkt P auf der Hauptdiagonale gemein haben Alle Flachen des Achtundvierzigflachs sind daher kongruente Dreiecke.

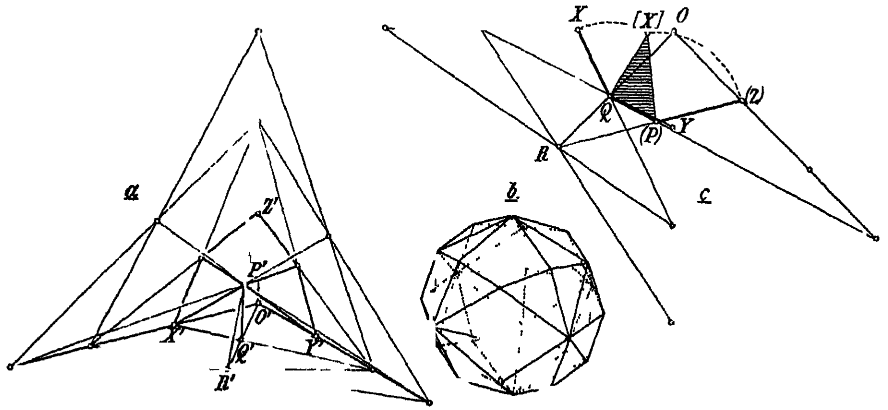


Fig 99

Um die senkrechte Projektion des Achtundvierzigflachs zu bekommen, stellt man zunachst irgendeine senkrechte Projektion des Achsenkreuzes OX, OY, OZ her (nach Nr. 53, 61 oder 62), siehe Fig. 99 a. Die drei Zahlen a, b, c, durch deren Angabe die Gestalt des Kristalls bestimmt wird, verhalten sich nebenbei bemerkt stets wie drei **ganze** Zahlen. Hat man sie gewahlt (in Fig. 99 ist $a : b \cdot c = 1 : 2 . 3$ angenommen worden, so daß $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ gesetzt werden kann), so sind die Strecken a, b, c auf den Achsen $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ durch das a-, b- und c-fache von $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ darzustellen. Darauf zeichnet man die

Geraden ein, in denen jene sechs Ebenen die Achsenebenen schneiden; alsdann ist es leicht, die gegenseitigen Schnitte der sechs Ebenen zu ermitteln. Man bekommt dadurch ihren gemeinsamen Punkt P auf der Hauptdiagonale und die vorhin erwähnten sechs in P zusammentreffenden Dreiecksflachen In entsprechender Weise verfährt man in den übrigen sieben Oktanten. So ergibt sich das Bild in Fig. 99 b.

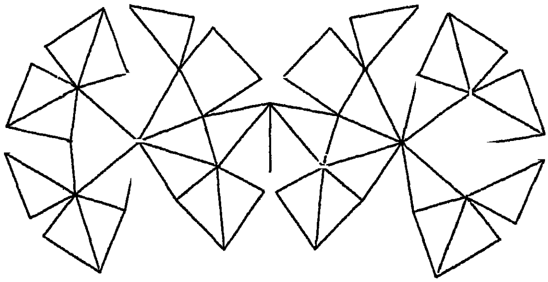


Fig 100

Das Netz des Achtundvierzigflachs, siehe Fig. 100, besteht aus lauter kongruenten Dreiecken, es laßt sich also zeichnen, sobald man die wahren Langen der Dreieckskanten bestimmt hat. Zu diesem Zweck aber genugt es, die Achsenebene XOY sowie durch Umlegung die Ebene durch OZ und die Hauptdiagonale in ihrer wahren Gestalt zu zeichnen, siehe Fig. 99c, wo XQ, $Q(P)$ und $(P)(Z)$ die wahren Langen der Dreiecksseiten sind und $[X]Q(P)$ das Dreieck darstellt.

70. Die besonderen holoedrischen Kristalle des tesseralen Systems. Die besonderen holoedrischen, d h. vollkommen ausgebildeten Kristalle des tesseralen Systems gehen hervor, wenn man in bezug auf die drei Zahlen a, b, c Annahmen macht, vermoge deren sich die Anzahl aller Flachen des Kristalls verringert Allgemein können wir $a \leqq b \leqq c$ voraussetzen, und dann ergeben sich alle Sonderfalle so.

Erstens $a = b < c$. Je zwei der achtundvierzig Ebenen, z B (a, b, c) und (b, a, c), fallen zusammen. Es entsteht ein Vierundzwanzigflach, das Triakisoktaeder (d. h. Dreimalachtflach)

Zweitens $a < b = c$ Hier gilt dasselbe, da aber die gleichlangen Strecken jetzt die langeren sind, geht doch eine wesentlich andere Gestalt hervor, das Ikositetraeder (d. h. Vierundzwanzigflach)

Drittens. $a < b$, $c = \infty$ Auch hier fallen je zwei Ebenen, z B. (a, b, c) und $(a, b, -c)$, zusammen, so daß ein Vierundzwanzigflach entsteht, das Tetrakishexaeder (d. h. Viermalseshsflach). Während in den beiden ersten Fallen in jedem rechten Winkel der Achsen, z. B. im Winkelfeld XOY, zwei Kanten des Körpers liegen, dagegen von den sechs im Punkte P der Hauptdiagonale zusammentreffenden Kanten des Achtundvierzigflachs drei fortfallen, sind jetzt die Kanten in den Achsenebenen nicht mehr vorhanden, wohl aber alle sechs nach P gehenden Kanten.

Viertens $a = b$, $c = \infty$. Hier fallen je vier Ebenen zusammen, z. B. (a, b, c), (b, a, c), $(a, b, -c)$ und $(b, a, -c)$, so daß der Körper nur noch zwölf Flachen hat. Es entsteht das Rhombendodekaeder als Sonderfall des Triakisoktaeders.

Fünftens: $b = c = \infty$, eine Annahme, die sowohl als Sonderfall des Ikositetraeders wie auch als Sonderfall des Tetrakishexaeders zu betrachten ist. Jetzt liegen je acht Ebenen zusammen, z. B. die Ebenen (a, b, c), $(a, -b, c)$, $(a, b, -c)$, $(a, -b, -c)$ und die Ebenen (a, c, b),

$(a, c, -b)$, $(a, -c, b)$, $(a, -c, -b)$. Der Kristall hat also nur noch sechs Flachen. Er ist nichts anderes als das Hexaeder oder der Würfel.

Sechstens: $a = b = c$. Hier fallen je sechs Ebenen zusammen, z. B. (a, b, c), (b, c, a), (c, a, b), (b, a, c), (c, b, a), (a, c, b). Somit hat der Kristall nur acht Flachen. Er ist das Oktaeder.

Aus den so gewonnenen holoedrischen Kristallen gehen die hemiedrischen oder halbflächigen dadurch hervor, daß man die Gesamtheit der Ebenen, die eine holoedrische Gestalt erzeugen, in symmetrischer Lagerung in Halften zerlegt und nur die eine Halfte benutzt. Man wahle z B vom Oktaeder solche vier Ebenen aus, die zu zweien nur in Eckpunkten und nicht in Kanten zusammenstoßen. Indem man diese vier Ebenen hinreichend erweitert zum Schnitt bringt, erhalt man das Tetraeder.

71. Übungen. 1) Nach Nr. 66 zeichne man die beiden im Würfel enthaltenen Tetraeder und bestimme, wie sie sich gegenseitig durchsetzen.

Einen der in Nr 70 erwahnten Kristalle in senkrechter Projektion darzustellen, wenn sich die verkürzten Achsenlangen zueinander verhalten wie

2) 2 · 1 2,

3) 9 5 11,

4) 4 5 6 (Nr 62)

5) Senkrechte Projektion des Ikosaeders und Dodekaeders fur den Fall, wo der umschriebene Wurfel als Umriß ein regelmaßiges Sechseck hat (Nr. 54)

§ 7. Die Ellipse.

72. Erklärung der Ellipse und ihrer konjugierten Durchmesser. Die senkrechte Projektion eines Kreises heißt Ellipse Die projizierenden Strahlen bilden einen Kreiszylinder Also kann die Ellipse auch so erklart werden Diejenigen ebenen Schnitte eines allgemeinen (schiefen) Kreiszylinders, die zur Richtung des Zylinders senkrecht sind, d. h die senkrechten Querschnitte, heißen Ellipsen Bei der Projektion entspricht dem Kreisinnern das der Ellipse, die Kreissekanten und Kreistangenten liefern die Ellipsensekanten und Ellipsentangenten. Eine Gerade schneidet die Ellipse in hochstens zwei Punkten. Von einem in der Ellipsenebene gelegenen Punkt gehen zwei, eine oder gar keine Tangenten der Ellipse aus, je nachdem sich der Punkt außerhalb, auf oder innerhalb der Ellipse befindet. Die Projektion der Kreismitte liefert einen Punkt, der die Mitte einer jeden durch ihn gehenden Ellipsensehne ist, den Mittelpunkt der Ellipse Jede durch ihn gehende Sehne heißt Durchmesser der Ellipse

Die Durchmesser des Kreises ordnen sich in Paaren zusammen· Zu jedem Durchmesser p gibt es einen senkrechten Durchmesser q. Jede zu p parallele Sehne hat ihren Mittelpunkt auf q, jede zu q parallele Sehne ihren Mittelpunkt auf p. Die Tangenten der Endpunkte von p sind zu q parallel, die Tangenten der Endpunkte von q sind zu p parallel. Diese vier Tangenten bilden ein dem Kreis umschriebenes Quadrat, dessen Seiten vom Kreis in ihren Mitten berührt werden. Die Projek-

tionen p' und q' von p und q sind im allgemeinen nicht zueinander senkrecht. Wohl aber bleiben nach Nr. 8 und 9 die folgenden Eigenschaften erhalten: Jede zum Durchmesser p' parallele Sehne der Ellipse hat ihren Mittelpunkt auf dem Durchmesser q', jede zu q' parallele Sehne ihren Mittelpunkt auf p'. Die Tangenten der Endpunkte von p' sind zu q' parallel, die Tangenten der Endpunkte von q' sind zu p' parallel. Diese vier Tangenten bilden ein der Ellipse umschriebenes Parallelogramm, dessen Seiten von der Ellipse in ihren Mitten berührt werden. Siehe Fig. 101[1]). Das Paar p', q' heißt ein konjugiertes Durchmesserpaar der Ellipse. Alle Durchmesser der Ellipse ordnen sich in Paaren von konjugierten (d. i. verknüpften) Durchmessern zusammen. Liegt die Ellipse gezeichnet vor, so kann man einen Durchmesser p' bestimmen, indem man die Mitten zweier paralleler Sehnen verbindet. Die Mitte dieses Durchmessers p' ist der Mittelpunkt M' der Ellipse. Der zu p' konjugierte Durchmesser q' ist zu jenen beiden Sehnen parallel.

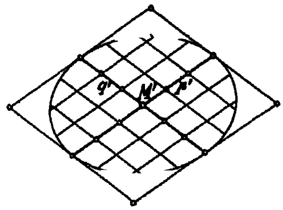


Fig 101

Jedes dem Kreis umschriebene Parallelogramm gibt in der Projektion ein der Ellipse umschriebenes Parallelogramm. Aber von allen dem Kreis umschriebenen Parallelogrammen haben nur die Quadrate die Eigenschaft, daß sie vom Kreis in den Mitten ihrer Seiten berührt werden. Also nur diejenigen der Ellipse umschriebenen Parallelogramme, die von der Ellipse in den Mitten ihrer Seiten berührt werden, haben als Mittellinien konjugierte Durchmesser.

Die senkrechte Projektion eines Kreises ist nur dann ein Kreis, wenn die Kreisebene zur Tafel parallel liegt. Sie ist nur dann eine Strecke, wenn die Kreisebene zur Tafel lotrecht steht, und dann zahlt die Strecke doppelt, da jeder Punkt auf ihr mit Ausnahme der Endpunkte die Projektion zweier verschiedener Kreispunkte ist. Demnach sind die Kreise und die doppelt zahlenden Strecken Sonderformen von Ellipsen.

Hat die Ellipse keine dieser Sonderformen, so gilt folgendes: Ein und nur ein Kreisdurchmesser ist in der Projektion nicht verkurzt, er liegt auf der durch die Kreismitte gehenden Höhenlinie der Kreisebene. Am starksten in der Projektion verkürzt erscheint (nach Nr. 17) der zu diesem Kreisdurchmesser senkrechte, also der auf der Fallinie der Kreisebene durch den Mittelpunkt. Die so hervorgehenden Ellipsendurchmesser, der langste und kürzeste, heißen ihre Achsen: Haupt- und Nebenachse oder große und kleine Achse. Die Haupt- und Nebenachse sind das einzige Paar von zugleich konjugierten und senkrechten Durchmessern der Ellipse (vgl. Nr. 18). Die Hauptachse der Ellipse ist gerade so lang wie der Durchmesser des Kreises, und sie ist parallel zu den Höhenlinien der Kreisebene, insbesondere zur Spurlinie. Ist r der Radius des Kreises und α der spitze Winkel, den die Kreisebene mit der

1) Wie Ellipsen zu zeichnen sind, wird erst in Nr 82 auseinandergesetzt werden. Bis dahin sollen die Figuren, soweit sie Ellipsen enthalten, nicht als Vorlagen für das Zeichnen, sondern nur zur Erläuterung des Textes dienen.

Tafel bildet, so sind $a = r$ und $b = r \cos\alpha$ die halbe Haupt- und Nebenachse der Ellipse. Die Endpunkte der Hauptachse heißen die **Hauptscheitel**, die der Nebenachse die **Nebenscheitel** der Ellipse. Die Ellipse liegt vollständig in demjenigen Kreisring, der von den beiden Kreisen um ihren Mittelpunkt mit den Radien a und b begrenzt wird. Ist P_1 irgendein Punkt desjenigen Kreises, durch dessen Projektion die Ellipse hervorgeht, so kann man ein dem Kreis eingeschriebenes Rechteck $P_1 P_2 P_3 P_4$ herstellen, von dem zwei Seiten, $P_1 P_2$ und $P_3 P_4$, auf Höhenlinien, also die beiden anderen Seiten auf Fallinien gelegen sind. Die Projektion dieses Rechtecks ist ein der Ellipse eingeschriebenes Rechteck $P_1' P_2' P_3' P_4'$, dessen Mittellinien die Achsen der Ellipsen sind. Somit geht P_2' aus P_1' durch Spiegelung an der Nebenachse, P_4' aus P_1' durch Spiegelung an der Hauptachse und P_3' aus P_1' durch Spiegelung am Mittelpunkt M' hervor, siehe Fig 102. **Mithin sind die Achsen der Ellipse Symmetriegeraden, ihr Mittelpunkt ist als ein Symmetriepunkt zu bezeichnen** Das Rechteck der Tangenten der vier Scheitel ist das einzige von allen der Ellipse umschriebenen Rechtecken, das von der Ellipse in den Seitenmitten berührt wird.

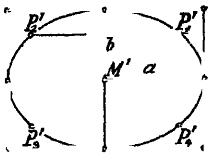


Fig 102

Zu zwei sich rechtwinklig in ihrer gemeinsamen Mitte M' **schneidenden Strecken** $2a$ **und** $2b$ **gibt es eine, aber auch nur eine Ellipse, die diese Strecken als Achsen hat** Denn zunächst kann der Mittelpunkt M des Kreises, durch dessen Projektion die Ellipse entsteht, beliebig hoch über M' angenommen werden Hat man ihn gewählt, so liegt die durch M gehende Höhenlinie der Kreisebene fest, da sie zur Strecke $2a$ parallel sein muß, wenn $a > b$ ist. Durch $\cos\alpha = b : a$ wird ferner der spitze Winkel α bestimmt, den die Kreisebene mit der Tafel bildet Es gibt zwei Ebenen durch die konstruierte Höhenlinie, die den Winkel α mit der Tafel bilden Die in ihnen gelegenen Kreise mit der Mitte M und dem Radius $r = a$ projizieren sich beide als dieselbe Ellipse mit den gegebenen Achsen $2a$ und $2b$. Hiernach hängt die Gestalt der Ellipse nur vom Verhältnis ihrer Achsen ab, d. h. **zwei Ellipsen, bei denen das Verhältnis** $a : b$ **dasselbe ist, sind einander ähnlich**

Kreise in parallelen Ebenen projizieren sich als ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen Zwei auf der Tafel gegebene ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen kann man stets durch Projektion zweier Kreise einer und derselben Ebene gewinnen. Daraus folgt. **Zwei auf der Tafel gelegene ähnliche Ellipsen mit parallelen Hauptachsen haben höchstens zwei Schnittpunkte und höchstens vier gemeinsame Tangenten.**

Alle diejenigen einer Ellipse mit den Halbachsen a und b umschriebenen Parallelogramme, die von der Ellipse in den Mitten der Seiten berührt werden, d. h. deren Mittellinien konjugierte Durchmesserpaare sind, haben ihre Eckpunkte auf der konzentrischen, ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipse mit den Halbachsen $a\sqrt{2}$ und $b\sqrt{2}$. Alle diejenigen der Ellipse eingeschriebenen Parallelogramme, deren Seiten jeweils zu einem konjugierten Durchmesserpaar parallel liegen, sind ihrerseits der konzentrischen, ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipse mit den Halbachsen

$\frac{1}{2}a\sqrt{2}$ und $\frac{1}{2}b\sqrt{2}$ umschrieben. Diese Sätze ergeben sich sofort durch Zurückgehen in die Kreisebene.

Die Ellipsenachsen sind, wie gesagt, das einzige konjugierte Durchmesserpaar, das rechtwinklig ist. Ein anderes ausgezeichnetes konjugiertes Durchmesserpaar ist dasjenige einzig vorhandene, das aus gleichlangen Durchmessern besteht. Man findet es wieder durch Zurückgehen in die Ebene des Kreises: Solche zwei Kreisdurchmesser, die mit den Höhenlinien denselben Winkel bilden, projizieren sich als gleichlange Strecken. Sollen sie auch konjugierte Durchmesser liefern, so müssen sie auch rechtwinklig sein, mithin die rechten Winkel der Höhen- und Fallinie durch die Kreismitte in gleiche Teile teilen, d. h. sie liegen auf den Diagonalen des dem Kreis umschriebenen Quadrates, dessen Seiten Höhen- und Fallinien sind. Daraus folgt: Die Ellipse hat nur ein Paar von gleichlangen konjugierten Durchmessern. Diese Durchmesser liegen auf den Diagonalen desjenigen der Ellipse umschriebenen Rechtecks, dessen Seiten zu den Achsen parallel sind. Daher gibt es auch nur einen solchen der Ellipse umschriebenen Rhombus, den die Ellipse in den Seitenmitten berührt. Die Mittellinien dieses Rhombus liegen auf den Diagonalen jenes Rechtecks. Die Diagonalen dieses Rhombus, die auf den Achsen der Ellipse liegen, haben die Längen $2a\sqrt{2}$ und $2b\sqrt{2}$. Deshalb sind die gleichlangen konjugierten Durchmesser gleich $\sqrt{2(a^2+b^2)}$.

Das Vorhergehende gilt, wie gesagt, für Ellipsen, die weder Kreise noch doppelt zählende Strecken sind. Im Kreis, aufgefaßt als Sonderform der Ellipse, ist jedes konjugierte Durchmesserpaar rechtwinklig. Irgendeines dieser Paare kann man als die Achsen bezeichnen. Die Kreise sind also die Ellipsen mit gleichlangen Achsen. Die doppelt zählende Strecke, aufgefaßt als Sonderform der Ellipse, ist eine Ellipse, deren Nebenachse gleich Null ist.

73. Ermittlung der Ellipse aus zwei konzentrischen Kreisen. Auf der Tafel sei ein sich in der Mitte M rechtwinklig schneidendes Streckenpaar A_1C_1 und B_2D_2 gegeben, siehe Fig. 103. Dabei sei $A_1C_1 > B_2D_2$. Die Hälften MA_1 und MB_2 seien mit a und b bezeichnet. Die Aufgabe ist, die Ellipse mit den Scheiteln A_1, B_2, C_1, D_2 zu ermitteln.

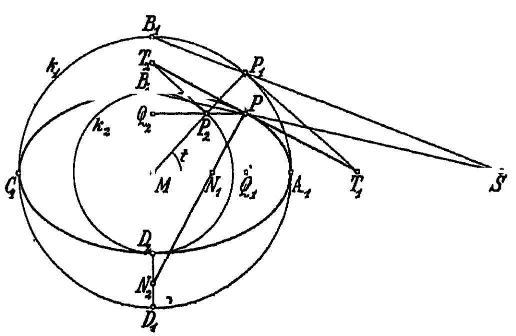


Fig. 103

Auf dem Kreis k_1 vom Durchmesser A_1C_1 seien B_1 und D_1 die Endpunkte der durch B_2 und D_2 gehenden Radien. Wird der Kreis k_1 aus der Tafel um den Durchmesser A_1C_1 herausgedreht, so beschreibt die senkrechte Projektion von B_1 (und ebenso die von D_1) die Strecke B_1D_1. Man kann die Drehung so weit ausführen, bis die Projektion von B_1 gerade B_2 ist. Nunmehr

ist die gesuchte Ellipse die senkrechte Projektion des Kreises k_1 in der neuen Lage. Bei der Drehung beschreibt die Projektion irgendeines Punktes P_1 von k_1 das Lot von P_1 auf A_1C_1. Der Fußpunkt dieses Lotes sei Q_1. Da $MB_1 \parallel Q_1P_1$ ist, gilt nach Nr. 9 die Proportion:

$$\frac{Q_1 P}{Q_1 P_1} = \frac{MB_2}{MB_1} = \frac{b}{a}.$$

Demnach ergeben sich die Punkte der Ellipse auch ohne Drehung aus dem Kreise k_1 so, wie er ursprünglich lag, auf folgende Art: Alle Lote Q_1P_1 werden von ihren Fußpunkten Q_1 aus im Verhältnis $b : a$ verkürzt. Dies könnte dadurch geschehen, daß man B_1P_1 mit der Geraden MA_1 in S zum Schnitte brachte und dann P als Schnittpunkt von Q_1P_1 mit SB_2 bestimmte. Aber dies Verfahren versagt, wenn P_1 nahe bei B_1 liegt, weil dann S unerreichbar wird. Besser geht man so vor: Der Kreis k_2 vom Durchmesser B_2D_2 schneidet MP_1 in einem Punkt P_2, und es ist $MP_1 = a$, $MP_2 = b$. Da $Q_1P : Q_1P_1 = b : a$ sein soll, muß mithin P_2P zu A_1C_1 parallel sein. Man bekommt also einen Punkt P der Ellipse, indem man von M aus irgendeinen Strahl zieht, ihn in P_1 mit k_1 und in P_2 mit k_2 zum Schnitt bringt und dann den Schnittpunkt P der zur Hauptachse A_1C_1 parallelen Geraden durch P_2 mit der zur Nebenachse B_2D_2 parallelen Geraden durch P_1 ermittelt. Dies Verfahren wendet man an, wenn es darauf ankommt, einen einzelnen Ellipsenpunkt möglichst genau zu bestimmen. Für das Zeichnen der Ellipse im ganzen ist es nicht zweckmäßig. Hierfür werden wir in Nr. 82 ein besseres Verfahren angeben.

Die Tangente des Kreispunktes P_1 schneide die Gerade A_1C_1 in T_1. Wird nun der Kreis k_1 wie vorhin um die Hauptachse aus der Tafel herausgedreht, so bleibt T_1 als Punkt der Drehachse in Ruhe, und da dann P die Projektion P_1 hat, ist P_1T_1 die Tangente des Ellipsenpunktes P_1.

Der Fußpunkt des Lotes von P auf die Nebenachse heiße Q_2. Nun ist

$$\frac{Q_2 P_2}{Q_2 P} = \frac{MP_2}{MP_1} = \frac{b}{a}.$$

Mithin geht aus jedem Ellipsenpunkt P ein Punkt P_2 des Kreises k_2 hervor, wenn der Abstand Q_2P des Ellipsenpunktes von der Nebenachse von seinem Fußpunkte Q_2 aus im Verhältnis $b : a$ verkleinert wird. Der kleine Kreis k_2 entsteht also aus der Ellipse geradeso wie diese aus dem großen Kreis k_1; der Unterschied ist bloß, daß an die Stelle der Abstände von der Hauptachse die von der Nebenachse treten. Deshalb kann man die Ellipse um ihre Nebenachse so weit aus der Tafel herausdrehen, bis ihre senkrechte Projektion auf die Tafel gerade den kleinen Kreis k_2 liefert, d. h.: Jede Ellipse läßt sich so legen, daß ihre senkrechte Projektion auf die Tafel ein Kreis ist, der die Nebenachse der Ellipse als Durchmesser hat. Die bei dieser Projektion vorkommenden projizierenden Strahlen bilden den geraden Kreiszylinder mit dem Grundkreis k_2. Da das Verhältnis der Achsen $2a$ und $2b$ beliebig angenommen werden kann und der Kosinus des Neigungswinkels der Ellipsenebene zur Tafel gleich $b : a$ ist, und da ferner die Ellipse ohne Änderung der Gestalt ihrer Projektion beliebig

weit senkrecht zur Tafel verschoben werden darf, ergibt sich: **Jeder ebene Schnitt eines geraden Kreiszylinders, d. h. eines Rotationszylinders, ist eine Ellipse.** Die Nebenachse der Ellipse ist gleich dem Durchmesser des Zylinders und liegt senkrecht zur Zylinderachse. Nach der ursprünglichen Erklärung der Ellipse in Nr. 72 ist die Ellipse dagegen der **senkrechte** Querschnitt eines **schiefen** Kreiszylinders.

Ganz entsprechend wie beim großen Kreis k_2 ergibt sich hieraus weiterhin: Wenn die Tangente des Ellipsenpunktes P die Gerade, auf der die Nebenachse liegt, in T_2 schneidet, ist T_2P_2 die Tangente des Punktes P_2 des kleinen Kreises k_2. **Folglich haben wir für die Konstruktion der Tangente eines Ellipsenpunktes P zwei Verfahren:** Man zieht in P_1 und P_2 die (zueinander parallelen) Tangenten der Kreise k_1 und k_2. Die erste schneide die Gerade der Hauptachse in T_1, die zweite die Gerade der Nebenachse in T_2. Dann geht die Ellipsentangente sowohl durch T_1 als auch durch T_2. Ist einer dieser beiden Punkte unerreichbar, so liegt der andere um so näher.

Die in P auf der Tangente von P errichtete Senkrechte heißt die **Normale des Ellipsenpunktes P.** Sie schneide die Hauptachse in N_1 und die Nebenachse in N_2. Aus den rechtwinkligen Dreiecken N_1PT_1 und N_2PT_2 ergibt sich

$$N_1Q_1 \cdot Q_1T_1 = Q_1P^2, \qquad N_2Q_2 \cdot Q_2T_2 = Q_2P^2.$$

Aus den rechtwinkligen Dreiecken MP_1T_1 und MP_2T_2 ergibt sich ferner

$$MQ_1 \cdot Q_1T_1 = Q_1P_1^2, \qquad MQ_2 \cdot Q_2T_2 = Q_2P_2^2.$$

Indem man die beiden ersten Formeln Glied für Glied mit den beiden letzten dividiert, bekommt man:

$$\frac{N_1Q_1}{MQ_1} = \frac{Q_1P^2}{Q_1P_1^2}, \qquad \frac{N_2Q_2}{MQ_2} = \frac{Q_2P^2}{Q_2P_2^2}.$$

Da nun

$$\frac{Q_1P}{Q_1P_1} = \frac{b}{a}, \qquad \frac{Q_2P}{Q_2P_2} = \frac{a}{b}$$

ist, folgt mithin

$$N_1Q_1 = \frac{b^2}{a^2}MQ_1, \qquad N_2Q_2 = \frac{a^2}{b^2}MQ_2$$

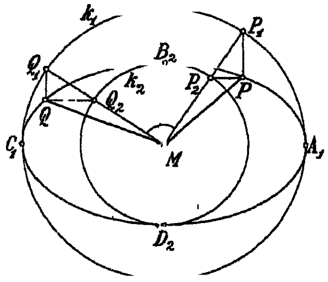


Fig. 104

Formeln, von denen wir in Nr 81 Gebrauch machen werden.

Um irgendein Paar konjugierter Halbmesser der Ellipse zu bekommen, bedenkt man, daß sie nach Nr 72 aus einem Paar rechtwinkliger Radien des Kreises k_1 entstehen, wenn dieser Kreis wie beschrieben so weit gedreht wird, bis seine Projektion die Ellipse ist. Man zieht also, siehe Fig. 104, irgend zwei rechtwinklige Radien MP_1, MQ_1 des Kreises k_1, bringt sie in P_2 und Q_2 mit dem Kreis k_2 zum Schnitt und bestimmt P und Q, indem man die zur Hauptachse parallelen Geraden durch P_2 und Q_2 mit den zur Nebenachse parallelen Geraden durch P_1 und Q_1 schneidet. Dann sind MP und MQ konjugierte Halbmesser der Ellipse.

Anmerkung. Selbstverständlich war die Ellipse von alters her bekannt. Der große Mathematiker und Physiker Archimedes (geb. ungefähr 287 v. Chr., im Jahre 212 bei der Einnahme von Syrakus, das er durch technische Erfindungen verteidigt hatte, von römischen Soldaten erschlagen) stellte z B in seinem „Buch von den Konoiden und Sphäroiden" die Ellipse sowohl durch Verkleinern der Strecken Q_1P_1 im Kreise k_1 im Verhältnis $b \cdot a$ (in der Prop. IV) sowie als ebenen Schnitt eines geraden Kreiszylinders (in der Prop. IX) dar, siehe z. B „Archimedis Opera, omnia cum commentariis Eutocii" (Archimedes' sämtliche Werke mit den Erläuterungen des Eutocius), hrgg von Johann Ludwig Heiberg, 1 Bd, 2 Aufl, Leipzig 1910 S 277 und 305. Über die Bedeutung der Benennung der Ellipse wird später zu reden sein (in Nr. 263). Der Winkel t, den MP_2P_1 in Fig. 103 mit MA_1 bildet, heißt die exzentrische Anomalie des Ellipsenpunktes P Hiermit ist im Falle der Bewegung der Planeten, die Ellipsen beschreiben, die vom Zentrum aus (daher „exzentrisch") bemerkbare Unregelmäßigkeit gemeint Diese Benennung rührt her von dem berühmten Entdecker der Gesetze der Planetenbewegungen Joh. Kepler (geb. 1571 zu Weil der Stadt in Württemberg, gest im Elend 1630 zu Regensburg, Astronom Kaiser Rudolfs II.), siehe seine „Astronomia nova seu de motu stellae Martis" (Neue Sternkunde oder über die Bewegung des Sternes Mars), Prag 1609 („Joannis Kepleri astronomi opera omnia", hrgg von Chr Frisch, 3 Bd, Frankfurt a. M. u Erlangen 1860, S. 394 und 408) Die Konstruktion der Ellipse aus den beiden konzentrischen Kreisen k_1 und k_2 gab der Pariser Mathematikprofessor Philippe de La Hire (geb 1640 zu Paris, gest ebenda 1718) in seinem Hauptwerk „Sectiones conicae in novem libros distributae" (Die Kegelschnitte, auf neun Bücher verteilt), Paris 1685, auf S 199 an

Wenn man wie in der analytischen Geometrie MA_1 und MB_1 in Fig 103 als die positive x- und y-Achse betrachtet und dementsprechend die Abstände des Ellipsenpunktes P von MB_1 und MA_1 mit x und y bezeichnet, d h $MQ_1 = x$ und $MQ_2 = y$ setzt, indem man dabei x oder y positiv oder negativ rechnet, je nachdem Q_1 rechts oder links bzw Q_2 oben oder unten liegt, ist

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t$$

Da $\cos^2 t + \sin^2 t$ gleich Eins ist, ergibt sich hieraus durch Elimination von t

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dies ist die einfachste Form, auf die man die sogenannte Gleichung der Ellipse bringen kann

Liegt einem nur daran, für beliebige Ellipsenpunkte P die Längen von x und y zu bestimmen, so kann man wie folgt verfahren, siehe Fig 105 Man zeichnet die Kreise mit den Durchmessern $MA_1 = a$ und $MB_2 = b$ Ein beliebiger Strahl durch M treffe die Kreise in X und Y Bildet der Strahl mit der Geraden MA_1 den Winkel t, so ist $MX = a\cos t = x$ und $MY = b\sin t = y$ Dies wurde besonders hervorgehoben in der kurzen Bemerkung „Zeichnung der Ellipse aus ihren Hauptachsen" von Otto Lacmann, Zentralblatt der Bauverwaltung 1914, S 484.

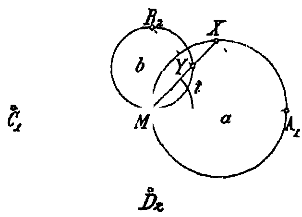


Fig 105

74. Brennpunkte, Leitlinien und Exzentrizität der Ellipse. Aus dem Umstand, daß die Ellipse als ebener Schnitt eines Rotationszylinders gewonnen werden kann, lassen sich wichtige Schlüsse ziehen. Dabei diene jetzt als Tafel diejenige Ebene, die erstens die Achse m des Zylinders enthält und zweitens auf der Ebene E der Ellipse senkrecht steht und daher auch die Hauptachse $2a$ der Ellipse enthält. Auf der Tafel liegen dann zwei Mantellinien g_1 und g_2 des Zylinders, siehe Fig. 106. Ist s die Spurgerade der Ebene E, so sind die Schnittpunkte A_1 und A_2 von s mit g_1 und g_2 die Hauptscheitel (wir benennen sie hier also anders als in Nr. 73) Die Nebenachse $2b$ der Ellipse ist nach Nr. 73 gleich dem Durchmesser des Zylinders, also gleich dem Abstand zwischen g_1 und g_2. Sie steht auf der Tafel im Mittelpunkt M

von A_1A_2 senkrecht, und die senkrechte Projektion der Ellipse ist die doppelt zahlende Strecke A_1A_2. Die Nebenscheitel B_1 und B_2 haben beide ihre Projektion in M Wird die Ellipsenebene um s in die Tafel umgelegt, so erscheint die Ellipse in ihrer wahren Gestalt mit den Hauptscheiteln A_1, A_2 und Nebenscheiteln (B_1) und (B_2). In Fig. 106 ist nur die Hälfte der Ellipse in der Umlegung dargestellt.

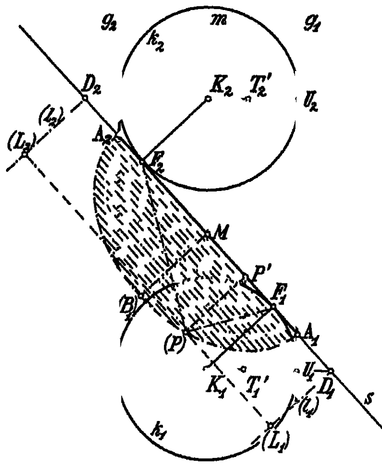


Fig 106

Nun kann man dem Zylinder, der zur Hälfte über und zur Hälfte unter der Tafel liegt, unendlich viele Kugeln einbeschreiben, von denen jede ihn längs eines Kreises berührt, dessen Ebene auf der Tafel und auf der Zylinderachse m senkrecht steht. Unter diesen Kugeln, deren Mittelpunkte auf m liegen und deren Radien gleich b sind, gibt es insbesondere zwei, die auch die Ellipsenebene E berühren Sie schneiden die Tafel in denjenigen beiden Kreisen k_1 und k_2, die g_1, g_2 und s berühren, ihre Mittelpunkte K_1 und K_2 sind also die Schnittpunkte von m mit den Geraden, durch die man die beiden Winkel von g_1 und s (oder von g_2 und s) in gleiche Teile zerlegt Die Berührungspunkte der Kreise k_1 und k_2 mit s seien mit F_1 und F_2 bezeichnet Die Kugeln berühren den Zylinder in Kreisen, deren Durchmesser die durch K_1 und K_2 gehenden Abstände zwischen g_1 und g_2 sind Da die Ebenen der Berührungskreise längs dieser Durchmesser auf der Tafel senkrecht stehen, schneiden sie die Ellipsenebene E in ebenfalls zur Tafel senkrechten Geraden l_1 und l_2, deren Spurpunkte D_1 und D_2 seien Bei der Umlegung der Ellipsenebene um s erscheinen l_1 und l_2 als die in D_1 und D_2 auf s errichteten Lote (l_1) und (l_2).

Wir benutzen den Satz, nach dem alle von einem Punkt P an eine Kugel gezogenen Tangenten gleich lang sind, einen Satz, der sich sofort aus dem Satz der Planimetrie, nach dem die beiden Tangenten von einem Punkt P an einen Kreis gleich lang sind, dadurch ergibt, daß man die Figur sich um die Gerade drehen läßt, die P mit dem Mittelpunkt des Kreises verbindet Als Punkt P wählen wir nun irgendeinen Punkt der Ellipse. Seine Projektion P' kann irgendwo auf A_1A_2 gewählt werden, seine Umlegung ist der Punkt (P). Der Punkt P liegt sowohl auf dem Zylinder als auch in der Ellipsenebene. Da die Kugel um K_1 sowohl den Zylinder als auch die Ellipsenebene berührt, gibt es auf dem Zylinder und in der Ellipsenebene von P ausgehende Kugeltangenten, nämlich erstens die durch P gehende Mantellinie des Zylinders und zweitens die Gerade, die P mit F_1 verbindet. Der Berührungspunkt dieser zweiten Tangente ist F_1, während die erste die Kugel in einem Punkt T_1 desjenigen Kreises berührt, den die Kugel mit dem Zylinder gemein hat. Die wahre Länge von PF_1 ist die Strecke $(P)F_1$ der Umlegung, und die wahre Länge von PT_1 ist gleich der Projektion $P'T_1'$, der PT_1 zur Tafel parallel liegt. Nach dem erwähnten

Satze muß daher $(P)F_1$ gleich $P'T_1'$ sein. Entsprechend schließen wir in bezug auf die zweite Kugel. An die Stelle von F_1 tritt hier F_2 und an die Stelle von T_1 ein Punkt T_2 des Kreises, den die zweite Kugel mit dem Zylinder gemein hat. Folglich muß auch $(P)F_2$ gleich $P'T_2'$ sein.

Weiterhin seien vom Ellipsenpunkt P die Lote PL_1 und PL_2 auf die Geraden l_1 und l_2 gefallt. Da l_1 und l_2 in D_1 und D_2 auf der Tafel senkrecht stehen, sind diese Lote zur Tafel parallel, somit ihren Projektionen gleich, also gleich den Strecken $P'D_1$ und $P'D_2$. In der Umlegung sind die Lote die Strecken $(P)(L_1)$ und $(P)(L_2)$.

Nach diesen Vorbereitungen bemerken wir, daß die Summe von $P'T_1'$ und $P'T_2'$ gleich $T_1'T_2'$ oder gleich K_1K_2 ist. Also kommt:

$$(P)F_1 + (P)F_2 = K_1K_2 \quad \text{oder} \quad PF_1 + PF_2 = K_1K_2 .$$

Diese Formel besagt Fur alle Punkte P der Ellipse ist die Summe der Entfernungen von den beiden Punkten F_1 und F_2 dieselbe.

Ferner bemerken wir, daß $\triangle P'T_1'D_1 \sim \triangle MF_1K_1$ und $\triangle P'T_2'D_2 \sim \triangle MF_2K_2$ ist, daher

$$\frac{(P)F_1}{(P)(L_1)} = \frac{P'T_1'}{P'D_1} = \frac{MF_1}{MK_1}, \qquad \frac{(P)F_2}{(P)(L_2)} = \frac{P'T_2'}{P'D_2} = \frac{MF_2}{MK_2}$$

Diese Formeln besagen Fur alle Punkte P der Ellipse ist das Verhaltnis aus ihren Entfernungen vom Punkt F_1 und von der Geraden l_1 dasselbe, ebenso auch das Verhaltnis aus ihren Entfernungen vom Punkt F_2 und von der Geraden l_2.

Die Punkte F_1 und F_2 heißen nach einem in Nr 79 anzugebenden Grunde die Brennpunkte der Ellipse, die Geraden l_1 und l_2 die Leitlinien (Directrices) der Ellipse, und zwar heißt l_1 die zum Brennpunkt F_1 und l_2 die zum Brennpunkt F_2 gehorige Leitlinie. Die Bezeichnungen F_1 und F_2 fur die Brennpunkte benutzt man in Anlehnung an die lateinische Bezeichnung Fokus fur Brennpunkt Es hat sich ergeben

Auf der Hauptachse der Ellipse gibt es zwei sogenannte Brennpunkte F_1 und F_2 und zur Hauptachse senkrecht zwei sogenannte Leitlinien l_1 und l_2 derart, daß erstens fur alle Punkte der Ellipse die Summe der Entfernungen von den Brennpunkten konstant ist und zweitens fur sie auch das Verhaltnis der Entfernungen von einem Brennpunkt und von der zugehorigen Leitlinie konstant ist

Die Brennpunkte haben gleiche Entfernung c von der Mitte M Ebenso haben die Leitlinien gleiche Entfernung d von M. Wir wollen ausfindig machen, wie sich c und d durch die Halbachsen a und b ausdrücken. In Fig 106 ist $A_1F_1 = A_1U_1$ (als Tangenten von A_1 an k_1) und $A_1F_2 = A_1U_2$ (als Tangenten von A_1 an k_2), also $A_1F_1 + A_1F_2$ gleich K_1K_2. Da nun $A_1F_1 = A_2F_2$ ist, folgt $A_1A_2 = K_1K_2$ oder $K_1K_2 = 2a$. Aber vorhin ergab sich K_1K_2 als die konstante Summe $PF_1 + PF_2$, d. h. die Summe der Abstände eines Ellipsenpunktes von den beiden Brennpunkten ist gleich der Hauptachse. Somit ist $MK_1 = MK_2 = a$, und das bei F_1 rechtwinklige Dreieck MF_1K_1 liefert, weil $F_1K_1 = b$, $MF_1 = c$ ist:

$$a^2 = b^2 + c^2, \qquad \text{also} \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2} .$$

Ferner ergibt sich aus dem bei K_1 rechtwinkligen Dreieck MK_1D_1, in dem $MK_1 = a$, $MF_1 = c$ und $MD_1 = d$ ist:

$$a^2 = c\,d\,, \qquad \text{also} \qquad d = \frac{a^2}{c} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\,.$$

Da $MF_1 : MK_1$ das Verhältnis der Abstände des Ellipsenpunktes P von F_1 und l_1 ist, gilt somit die Formel

$$\frac{(P)F_1}{(P)(L_1)} = \frac{c}{a}\,,$$

und ebenso ist

$$\frac{(P)F_2}{(P)(L_2)} = \frac{c}{a}\,.$$

Dies Verhaltnis $c : a$ heißt die Exzentrizitat der Ellipse. Je mehr die Ellipse von einem Kreis abweicht, d. h. je kleiner das Verhaltnis der Nebenachse $2\,b$ zur Hauptachse $2\,a$ ist, um so großer ist das Verhaltnis von c zu a, da c wegen $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ zunimmt, wenn b abnimmt Die Ellipse ist also um so exzentrischer, je größer das Verhältnis von c zu a ist. Die Exzentrizität ist stets kleiner als Eins. Die Strahlen von einem Ellipsenpunkt P nach den Brennpunkten F_1 und F_2 heißen die Brennstrahlen des Punktes P; man bezeichnet auch die Langen der Strahlen PF_1 und PF_2 als die Brennstrahlen von P. Diejenigen Eigenschaften der Ellipse, die sich auf ihre Brennpunkte beziehen, also auch die zugehörigen Leitlinien betreffen konnen, heißen die Fokaleigenschaften der Ellipse

75. Ermittlung der Brennpunkte und Leitlinien einer Ellipse. Nach den Formeln für c und d kann man die Brennpunkte und Leitlinien einer Ellipse leicht ermitteln, sobald die Achsen $2\,a$ und $2\,b$ nach Lage und Größe gegeben sind Denn da die Summe der Abstande aller Ellipsenpunkte von den Brennpunkten F_1 und F_2 gleich $2\,a$ ist, gilt dies insbesondere für die Nebenscheitel, die folglich von den Brennpunkten den Abstand a haben Die Brennpunkte F_1 und F_2 ergeben sich mithin als die Schnittpunkte der Hauptachse mit dem Kreis vom Radius a um einen Nebenscheitel. Man kann aber auch so verfahren Der Kreis, dessen Durchmesser die Hauptachse ist, wird von der Tangente eines Nebenscheitels in zwei Punkten E_1 und E_2 getroffen, siehe Fig. 107. Die Fußpunkte der Lote von E_1 und E_2 auf die Hauptachse sind wegen $a^2 = b^2 + c^2$ die Brennpunkte F_1 und F_2. Die Tangenten der Kreispunkte E_1 und E_2 schneiden die verlangerte Hauptachse in den Punkten D_1 und D_2 der Leitlinien l_1 und l_2, da für ihre Abstände d von der Mitte die Formel $a^2 = c\,d$ gilt.

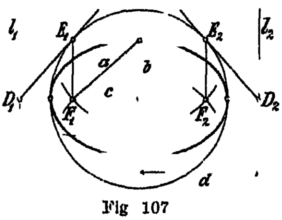


Fig 107

Statt a und $b(\leqq a)$ kann man a und $c(\leqq a)$ beliebig annehmen, da sich dann b aus $a^2 = b^2 + c^2$ ermitteln laßt. Daher leuchtet ein, daß der Satz über die konstante Summe der Brennstrahlen in der folgenden Art umgekehrt werden kann: Der geometrische Ort derjenigen Punkte P der Ebene, die in bezug auf zwei feste Punkte F_1

und F_2 der Ebene eine konstante Summe der Entfernungen PF_1 und PF_2 haben, ist stets eine Ellipse. Hat man $F_1F_2 = 2c$ gesetzt, so darf man selbstverständlich wegen $PF_1 + PF_2 \geqq F_1F_2$ die konstante Summe $2a$ der Entfernungen PF_1 und PF_2 nicht kleiner als $2a$ vorschreiben

Eine Ellipse ist vollständig bestimmt, wenn ihre Brennpunkte F_1, F_2 sowie die Länge $2a$ ihrer Hauptachse gegeben sind. Denn die Hauptscheitel sind bekannt, und die Nebenscheitel ergeben sich als die Punkte, in denen sich die Kreise vom Radius a um F_1 und F_2 schneiden.

76. Sonderfälle von Ellipsen. Nach dem Vorhergehenden ist

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \qquad d = \frac{a^2}{c} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{a}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}},$$

und die Exzentrizität ε der Ellipse hat den Wert

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

Nach Nr 72 gehört jeder Kreis zu den Ellipsen In diesem Sonderfall ist $b = a$, also $c = 0$, $d = \infty$ und $\varepsilon = 0$, d. h die Brennpunkte fallen mit dem Mittelpunkt zusammen, während die Leitlinien unendlich fern sind und die Exzentrizität gleich Null ist

Eine doppelt zählende Strecke $2a$ ist ebenfalls eine Ellipse Hier ist $b = 0$, $c = d = a$, $\varepsilon = 1$, d h. die Brennpunkte sind die Endpunkte der Strecke, die Leitlinien die dort auf die Strecke errichteten Lote, und die Exzentrizität ist gleich Eins

Es gibt noch einen bemerkenswerten Sonderfall der Ellipse Da nämlich die Ellipse nach Nr 73 als ebener Schnitt eines Rotationszylinders erzeugt werden kann, ist auch der Grenzfall zuzulassen, in dem die Schnittebene zur Richtung dieses Zylinders parallel wird. Dann aber ergibt sich ein Paar von parallelen Geraden als Sonderfall der Ellipse Das ist eine Ellipse, deren Hauptachse unendlich groß ist, während die Nebenachse eine endliche Länge hat. Die Hauptachse ist die Mittellinie des Geradenpaares, als Mittelpunkt kann irgendein Punkt dieser Mittellinie dienen. Wegen $a = \infty$ ergibt sich hier $c = \infty$, $d = \infty$, $\varepsilon = 1$. Demnach liegen die Brennpunkte und Leitlinien unendlich fern, und die Exzentrizität ist gleich Eins. Dies gilt auch dann, wenn $b = 0$ ist, d. h. im Sonderfall einer doppelt zählenden unendlich langen Geraden.

77. Ellipse als Schnitt eines Rotationskegels. Die Betrachtungen von Nr. 74 lassen sich in allem Wesentlichen auch dann durchführen, wenn man den Rotationszylinder durch einen Rotationskegel ersetzt. Wird ein derartiger Kegel mit einer Ebene E geschnitten, so möge als Tafel diejenige Ebene benutzt werden, die durch die Kegelachse m geht und auf E senkrecht steht. Der Kegel hat dann mit der Tafel zwei Mantellinien g_1 und g_2 gemein, die mit m gleiche Winkel bilden, siehe Fig. 108, und die Ebene E steht längs ihrer Spur s auf der Tafel senk-

recht. Diese Spur s schneide g_1 und g_2 in A_1 und A_2. Wir behaupten nun, daß die Schnittlinie des Kegels mit der Ebene E eine Ellipse mit der Hauptachse A_1A_2 sei. Ehe wir den Beweis führen, sei angegeben, wie man, falls die Behauptung bewiesen ist, die Nebenachse findet. Offenbar muß die Mitte M von A_1A_2 der Mittelpunkt der Ellipse sein, also die halbe Nebenachse das in M auf die Tafel errichtete Lot bis zu dem Punkt B_1, in dem das Lot das eine Mal den Kegel trifft. Das Lot liegt aber auch in derjenigen Ebene durch M, die zur Achse m des Kegels senkrecht ist, also den Kegel in einem Kreis schneidet, dessen zu m senkrechter Durchmesser von g_1 bis g_2 reicht. Indem man diesen Kreis um den Durchmesser in die Tafel umlegt, bekommt man den umgelegten Punkt $[B_1]$ und damit die halbe Nebenachse der Ellipse gleich $M[B_1]$. Somit kann man die Ellipse in ihrer wahren Gestalt in der Umlegung um s zeichnen. Dabei ist $M(B_1) \perp s$ und gleich $M[B_1]$ zu ziehen.

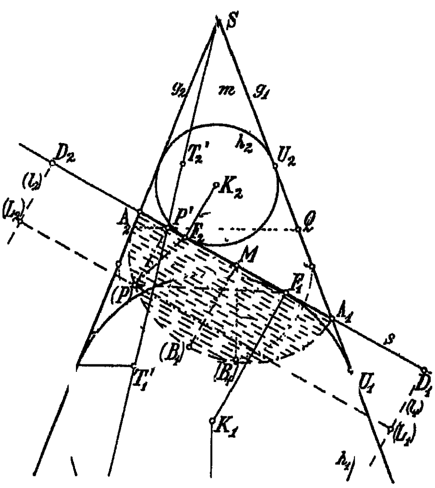


Fig 108

Es erübrigt aber noch der Beweis, daß die Schnittlinie wirklich eine Ellipse ist. Wieder gibt es unendlich viele Kugeln, die dem Kegel eingeschrieben sind und von denen jede ihn längs eines Kreises berührt, dessen Ebene zu m senkrecht ist. Unter diesen Kugeln gibt es zwei, die auch die Ebene E berühren. Ihre Mittelpunkte K_1 und K_2 sind die Schnittpunkte von m mit den beiden Geraden, die die Winkel von s und g_1 (oder g_2) in gleiche Teile zerlegen. Die Punkte F_1 und F_2, in denen die Kugeln die Ebene E berühren, liegen auf s. Die Kreise, in denen die Kugeln die Tafel schneiden, seien k_1 und k_2. Wie in Nr. 74 kann man jetzt durch einen beliebigen Punkt P der Schnittkurve von E mit dem Kegel an jede der beiden Kugeln zwei Tangenten legen; die eine ist die durch P laufende Mantellinie SP des Kegels, die andere ist die Gerade PF_1 bzw. PF_2 in der Ebene E. Berührt die Mantellinie SP die Kugeln in T_1 und T_2, so ergibt sich wieder wie damals $(P)F_1 = PT_1$ und $(P)F_2 = PT_2$. Nur ist jetzt PT_1 nicht gleich der Projektion $P'T_1'$, weil die Mantellinie PS nicht zur Tafel parallel liegt. Immerhin aber ergibt sich doch wie in Nr. 74

$$(P)F_1 + (P)F_2 = PT_1 + PT_2 \,.$$

Die Summe $PT_1 + PT_2$ ist das Stück T_1T_2 der Mantellinie SP zwischen den beiden Kreisen k_1 und k_2. Die wahre Länge von PT_1 ist gleich QU_1, die von PT_2 gleich QU_2, daher $PT_1 + PT_2$ gleich U_1U_2, also für alle Punkte P der Schnittlinie konstant. Dies aber besagt nach Nr. 74, daß die Schnittlinie eine Ellipse ist, die F_1 und F_2 als Brennpunkte hat.

Ferner beweist man leicht, daß die Schnittgeraden l_1 und l_2 der Ebene E mit den Ebenen der beiden Berührungskreise k_1 und k_2 die

Leitlinien der Ellipse sind Denn nach der Figur ist $(P)F_1$ $(P)(L_1)$ gleich $QU_1 : P'D_1$, also gleich $U_1U_2 . D_1D_2$ und somit konstant. Dasselbe gilt für $(P)F_2 : (P)(L_2)$.

Es ware irrig, zu folgern, daß jeder ebene Schnitt eines Rotationskegels eine Ellipse sei. Vielmehr ist zu beachten, daß unsere Fig. 108 nur für den Fall entworfen worden ist, wo die Ebene E alle Mantellinien des Kegels in im Endlichen gelegenen Punkten trifft. Die Schnittlinien, die sich sonst ergeben, sollen erst spater untersucht werden (in § 6 des dritten Kapitels) Unser Ergebnis lautet demnach so· Jede Ebene, die alle Mantellinien eines Rotationskegels im Endlichen trifft, schneidet den Kegel in einer Ellipse

Anmerkung Als geometrischer Ort aller Punkte, die in bezug auf zwei feste Punkte eine konstante Entfernungssumme haben, kommt die Ellipse bei Apollonius von Pergae (um 250—190 v Chr in Alexandria, Pergamon und Ephesus) in seinen „Vier Buchern der Kegelschnitte", 3 Buch, 52 Satz vor (siehe „Apollonii Conica, methodo nova illustrata et succincte demonstrata" von Isaac Barrow, London 1675, S 84) Auch zeigte schon Apollonius, daß jeder Kreiskegel, sei er ein Rotationskegel oder sei er schief, sich in Ellipsen schneiden lasse Den Fall des schiefen Kegels werden wir erst in Nr 267 behandeln Daß man in so einfacher Weise wie in Nr 74 und 77 mittels der dem geraden Zylinder oder Kegel eingeschriebenen und die Ellipsenebene beruhrenden Kugeln die Fokaleigenschaften ableiten kann, wurde erst im neunzehnten Jahrhundert erkannt Adolphe Quetelet (geb 1796 in Gent, gest 1874 in Brussel, namentlich Forscher auf dem Gebiete der wissenschaftlichen Statistik) bemerkte in seiner Dissertation „De quibusdam locis geometricis, nec non de curva focali" (Über gewisse geometrische Örter, insbesondere uber die Fokalkurve), Gent 1819, unter anderem, daß die Differenz der Strecken SA_1 und SA_2 in Fig 108 gleich dem Abstand der Brennpunkte voneinander ist (S 81) Sein Freund Germinal Pierre Dandelin (geb 1794 in Bourget bei Paris, belgischer Offizier, gest 1847 in Brussel) kam, indem er den Grunden dafur nachging, zur Anwendung der eingeschriebenen Kugeln, siehe sein „Mémoire sur quelques propriétés remarquables de la focale parabolique" in den Nouv Mémoires de l'Acad royale de Belgique, Brussel, 2 Bd 1822, S 171—200, insbes S 172 Man bezeichnet daher die Bestimmung der Brennpunkte mittels der Kugeln als das Quetelet-Dandelinsche Theorem Die erste Anwendung davon machte Jean Nicole Pierre Hachette (geb 1769 in Mézières, gest. 1834 in Paris, Professor an der École polytechnique und Universitat) in seinem „Traité de géométrie descriptive", 2 Aufl Paris 1828, S 51—53 Théodore Olivier (1793—1852, Professor an der École centrale des arts et manufactures zu Paris) gab dem Satz den Namen des belgischen Theorems, siehe seine „Additions au Cours de géométrie descriptive", Paris 1847, Vorwort S V Er hob hervor, daß die Betrachtung von Quetelet und Dandelin ganz dem Geiste der Geometrie der Alten entspreche Vgl auch Adolphe Quetelet, „Sciences mathématiques et physiques au commencement du XIX[e] siècle", Brussel 1867, S. 143—146 Hugh Hamilton (geb 1729, gest 1805 als Bischof von Ossory, nicht zu verwechseln mit dem beruhmten Sir W R Hamilton) war in seinem „De sectionibus conicis tractatus geometricus" (Geometrische Abhandlung uber die Kegelschnitte) London 1758, S 122 (auch englisch unter dem Titel „Treatise of conic sections") dem Kern der Sache schon ziemlich nahegekommen

78. Schnittpunkte der Ellipse mit Geraden, Tangenten an die Ellipse von einem Punkt aus. Ehe auseinandergesetzt wird, wie man zweckmäßig die Zeichnung einer Ellipse herstellt, sollen zwei Aufgaben erledigt werden, zu deren Lösung man nicht der Ellipse selbst, sondern nur ihrer Achsen A_1A_2 und B_1B_2 bedarf.

Die erste Aufgabe besteht darin, die Schnittpunkte der Ellipse mit einer Geraden g zu finden Bei der Losung betrachtet man die Ellipse wie in Nr. 73 als senkrechte Projektion eines Kreises, der bei der Umlegung seiner Ebene um A_1A_2 in den Kreis mit dem Durchmesser A_1A_2 übergeht, siehe Fig 109, und ebenso betrachtet man die Gerade g als senkrechte Projektion einer Geraden der Kreisebene. Die

Umlegung dieser letzten Geraden bekommt man leicht mit Hilfe derjenigen Punkte, in denen g das der Ellipse umschriebene Rechteck der Scheiteltangenten schneidet. Aus den Schnittpunkten der umgelegten Geraden mit dem umgelegten Kreis gehen die gesuchten Schnittpunkte P und Q von g mit der Ellipse hervor.

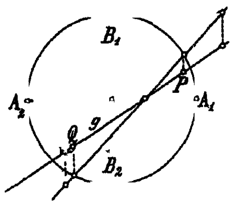


Fig. 109

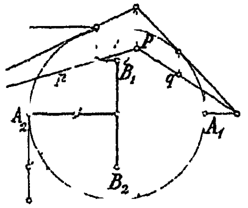


Fig. 110

Die zweite Aufgabe, von einem Punkt P aus die Tangenten an die Ellipse zu ziehen, wird auf dieselbe Art gelöst, indem man den Punkt P als senkrechte Projektion eines Punktes der Kreisebene auffaßt. Dieser Punkt der Kreisebene wird in der Umlegung mittels einiger Hilfslinien leicht gefunden, siehe Fig. 110. Die Punkte, in denen die von der gefundenen Stelle ausgehenden Tangenten des umgelegten Kreises die Gerade A_1A_2 schneiden, gehören auch den gesuchten Ellipsentangenten p und q an. Die Berührungspunkte der Tangenten findet man leicht, wie es für q in der Figur gezeigt ist.

79. Tangenten und Normalen ebener Kurven. Nach dem aus der Geometrie der Ebene wohlbekannten Kreis ist die Ellipse die erste uns begegnende neue krumme Linie, und deshalb erscheint es angebracht, vor ihrer weiteren Besprechung einige Bemerkungen über ebene krumme Linien überhaupt zu machen. Wir unterlassen es, die ebenen krummen Linien oder Kurven allgemein geometrisch zu erklären. Entweder nämlich sind solche Erklärungen bloß Umschreibungen, wie z. B. die Erklärung der Kurve als Bahn eines sich bewegenden Punktes, oder sie sind zu umständlich. Wir nehmen also den Kurvenbegriff als vorliegend an. Ein Stück der Kurve heißt stetig, wenn man auf ihm, ohne es zu verlassen, von jeder Stelle nach jeder anderen kommen kann. Eine Kurve kann sich selbst schneiden. Unter einem Kurvenzug sei ein sich nicht selbst schneidender stetiger Teil der Kurve verstanden, der sich nicht schließt, also zwei Endpunkte A und B hat.

Ein von A und B verschiedener Punkt P des Kurvenzuges teilt alle Punkte des Zuges in zwei Klassen ein, indem er die Punkte X der einen Klasse von den Punkten Y der anderen Klasse trennt. Wir betrachten die Sekanten durch P, d. h. diejenigen Geraden, die durch P und einen zweiten Kurvenpunkt X oder Y gehen. Aus dem Umstand, daß P die Punkte X und Y trennt, folgt durchaus nicht, daß es eine Gerade p durch P geben müßte, die die Sekanten PX von den Sekanten PY trennt. In Fig. 111a ist es in der Tat nicht der Fall, wohl aber in Fig. 111b. Gibt es eine derartige Gerade p, so heißt sie die Tangente des Kurvenpunktes P. Andernfalls nennt man P eine Kurvenecke. Man kann zeigen, daß es stetige Kurven gibt, die überall Ecken, also nirgends Tangenten haben. Uns werden

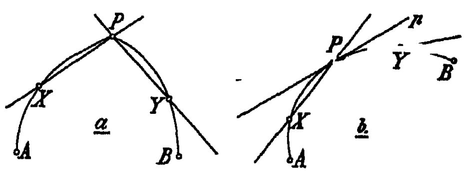


Fig. 111

solche außerordentliche Kurven nicht begegnen. Wir beschranken uns immer auf ordentliche, d. h. auf solche stetige Kurven, die überall, abgesehen von vereinzelten Stellen, Tangenten haben. Offenbar gilt der Satz, daß die Projektion einer Tangente einer ebenen Kurve wieder eine Tangente der Projektion der Kurve ist. So wurden in Nr. 73 aus den Kreistangenten die Ellipsentangenten abgeleitet.

Diejenige Gerade, die durch den Kurvenpunkt P geht und zur Tangente p von P senkrecht ist, heißt die Normale des Kurvenpunktes P (vgl. Nr 73) Allerdings hat P eigentlich unendlich viele Normalen, nämlich alle von P ausgehenden Geraden in derjenigen Ebene, die in P auf p senkrecht steht, der sogenannten Normalebene des Kurvenpunktes P. Da man sich aber bei der Betrachtung einer ebenen Kurve meistens auf die Ebene der Kurve beschrankt, kommt nur die zuerst erwähnte Normale in Betracht.

Die Tangente p war als Grenzlage zwischen den Sekanten PX und PY erklart worden. Daraus folgt, wenn Q irgendeinen Punkt des Kurvenzuges bedeutet. Die Tangente von P ist die Grenzlage einer Sekante PQ fur den Fall, wo Q langs der Kurve nach P strebt (einerlei, von welcher Seite her). Daß dabei die Sehne PQ nach Null strebt, besagt nicht, daß die Richtung der unbegrenzten Sekante PQ unbestimmt werde. Eine nach Null strebende Große heißt unendlich klein. Zwei auf einem stetigen Kurvenzug liegende Punkte P, Q heißen unendlich benachbart, wenn ihre Sehne PQ unendlich klein ist. Deshalb ist die Tangente von P diejenige Gerade, die P mit einem unendlich benachbarten Kurvenpunkt Q verbindet.

Dies wenden wir auf den Fall der Ellipse an Sind F_1 und F_2 die Brennpunkte und ist $2a$ die Länge der Hauptachse, so ergibt sich ein Ellipsenpunkt P, wenn man mit Radien r_1 und r_2, deren Summe gleich $2a$ ist, Kreise um F_1 und F_2 schlagt und einen ihrer Schnittpunkte bestimmt, siehe Fig 112. Wenn man r_1 um eine Strecke vergroßert, muß man r_2 um dieselbe Strecke verkleinern. Dann kommt man zu einem Ellipsenpunkt Q, der zu P unendlich benachbart ist, wenn die Strecke nach Null strebt Das zum Teil aus Kreisbogen bestehende Viereck PR_1QR_2 hat die gleichlangen Seiten PR_1 und PR_2, und die Kreisbogen R_1Q und R_2Q sind in R_1 und R_2 zu PR_1 und PR_2 senkrecht. Strebt $PR_1 (= PR_2)$ nach Null, so strebt das Viereck nach einem unendlich kleinen Viereck, dessen Gestalt bekannt ist: Es ist nämlich zu einem solchen geradlinigen Viereck $P'R_1'Q'R_2'$ ahnlich, in dem $P'R_1' = P'R_2'$ und $\sphericalangle R_1'$ und $\sphericalangle R_2'$ rechte Winkel sind, so daß $P'Q'$ den Winkel bei P' in gleiche Teile zerlegt. Da nun die Grenzlage von PQ die Tangente von P ist, folgt: Die Tangente t eines Ellipsenpunktes P teilt den Außenwinkel der Brennstrahlen r_1 und r_2 von P in gleiche Teile, also die Normale n den Innenwinkel F_1PF_2. Stellt man sich vor, daß die vom Brennpunkt F_1 ausgehenden Brennstrahlen an der Ellipse nach dem Reflexionsgesetz der Optik zurückprallen, so gehen sie in die nach F_2 zusammenlaufenden Brennstrahlen über. Deshalb eben heißen F_1 und F_2 die Brennpunkte.

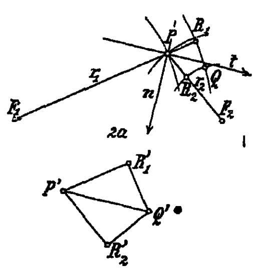


Fig 112.

Anmerkung. Bernhard Riemann (geb. 1826 zu Breselenz in Hannover, Professor an der Universität Göttingen, gest. 1866 in Selasca am Lago maggiore) entdeckte zuerst eine stetige Kurve, die in jedem Stück unendlich viele Ecken hat, siehe seine Habilitationsschrift: „Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe“ von 1854, zuerst gedruckt 1867 im 13 Bd. der Abhandlgn d. Ges. d. Wiss zu Göttingen, S 87—131, dann in den „Gesammelten mathematischen Werken“, herausgeg. von Heinrich Weber, Leipzig 1876, 2. Aufl. 1892, S. 227—265 (insbes. S 242 u. f.) Dann fand Karl Weierstraß (geb 1815 zu Ostenfelde in Westfalen, Professor an der Universität Berlin, gest. 1897 in Berlin) eine stetige Kurve, die überhaupt nirgends Tangenten hat. Darüber machte er 1872 Mitteilungen in der Berliner Akademie der Wissenschaften, siehe „Über kontinuierliche Funktionen eines reellen Arguments, die für keinen Wert des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten haben“, in den „Mathematischen Werken von Karl Weierstraß“, 2. Bd., Abhandlgn. II, Berlin 1895, S. 71—74. Ferner wurde das Ergebnis Weierstraß' bekannt durch Paul du Bois-Reymond (geb 1831 in Berlin, Professor an der Universität Freiburg i Br. und Tübingen, dann an der Technischen Hochschule Berlin, gest 1889 in Freiburg i. Br.), siehe: „Versuch einer Klassifikation der willkürlichen Funktionen reeller Argumente nach ihren Änderungen in den kleinsten Intervallen“, Journal f. d r u angew. Math 79. Bd. 1875, S. 21—37, insbes. S. 29—31. Eine geometrische Erläuterung dazu gab Christian Wiener (Nr 2) in der Abhandlung „Geometrische und analytische Untersuchung der Weierstraßschen Funktion“, Journal f d r. u. angew. Math. 90. Bd. 1881, S 221—252 Gegenwärtig vermag man beliebig viele stetige Kurven ohne Tangenten zu definieren. Ein ohne weiteres verständliches Beispiel gibt Helge von Koch (geb. 1870 zu Stockholm, Professor an der Universität ebenda) in der Abhandlung „Sur une courbe continue sans tangentes obtenue par une construction géométrique élémentaire“, Arkiv for Matematik, Astr och Fysik, 1. Bd. 1904, S. 681—702.

80. Krümmungskreise ebener Kurven. Nach dem Vorhergehenden ist die Tangente eines Kurvenpunktes P die einzige überhaupt vorhandene Grenzlage der Sekante PQ für den Fall, daß Q auf der Kurve nach P strebt. Auf welche besondere Art Q längs der Kurve nach P strebt, ist einerlei. Auch ist es einerlei zu sagen, Q liege unendlich nahe bei P oder P liege unendlich nahe bei Q. Die Grenzlage der Sekante PQ kann deshalb auch die Tangente des Punktes Q genannt werden.

Wenn in der Ebene eine Gerade q nach einer Geraden p strebt, zieht der Umstand, daß die Richtungen von p und q nicht mehr unterscheidbar werden, durchaus nicht notwendig nach sich, daß der Schnittpunkt von p und q unbestimmt werde Wenn z. B. p und q zwei Durchmesser eines Kreises sind und q nach p strebt, bleibt der Schnittpunkt von p und q stets der Mittelpunkt des Kreises. Falls der Geraden q ein bestimmtes Gesetz vorgeschrieben wird, auf Grund dessen sie nach p strebt, kann man die Frage stellen, ob der Schnittpunkt von p und q dabei nach einer bestimmten Lage strebt, und zwar nach welcher

Nun seien auf einem Kurvenzug drei Punkte A, B, C so gewählt, daß B die Punkte A und C trennt und daß die Sehnen AB und BC gleich lang sind. Die in A und C auf AB und CD errichteten Lote mögen sich in K schneiden. Dann ist $\triangle ABK \cong \triangle CBK$, somit $KA = KC$. Bewegen sich nun A und C längs der Kurve so nach B hin, daß beständig die Sehnen AB und BC einander gleich sind, so bleibt immer $KA : KC = 1$. Dabei wird A zu B, aber auch B zu C unendlich benachbart. Die Grenzlage der Sekante AB kann demnach als die Tangente von A und die Grenzlage der Sekante BC als die Tangente von C bezeichnet werden. Dann aber sind AK und CK in der Grenzlage die Normalen der Kurvenpunkte A und C. Da nun schließlich A und C einander unendlich nahe rücken, folgt: Falls der Schnittpunkt K der Normalen zweier

Punkte A und C eines ebenen Kurvenzuges nach einer bestimmten Grenzlage strebt, sobald A und C einander auf dem Kurvenzuge unendlich nahe rücken, strebt das Verhältnis $KA.KC$ nach Eins. Man kann übrigens beweisen, daß die Voraussetzung der Gleichheit der Sehnen AB und BC unwesentlich ist.

Der Kreis mit dem Mittelpunkt K und Radius KA geht durch A und C und hat hier die Tangenten AB und BC. Beim Grenzübergang ergibt sich somit ein Kreis, der den Kurvenzug in zwei unendlich benachbarten Punkten A und C berührt. Dieser Kreis heißt der Krümmungskreis derjenigen Kurvenstelle, wohin A, B, C zusammenrücken. Sein Mittelpunkt wird der zugehörige Krümmungsmittelpunkt und sein Radius der zugehörige Krümmungsradius genannt.

Wie man den Krümmungsmittelpunkt eines Kurvenpunktes findet, hängt vom Gesetz der Kurve ab. Da er der Schnittpunkt unendlich benachbarter Normalen AK und CK ist, läßt er sich nicht geradezu auf Grund dieser Erklärung zeichnerisch ermitteln, denn die Konstruktion des Schnittpunktes zweier Geraden wird um so ungenauer, je weniger beide Geraden voneinander abweichen. Man muß andere Wege einschlagen, um zu finden, wo der Schnittpunkt liegt. Ist die Kurve ein Kreis, so leuchtet ein, daß der Krümmungsmittelpunkt für alle Punkte der Kurve die Kreismitte selbst ist, so daß also alle Punkte des Kreises einen gleichlangen Krümmungsradius haben. Bei jeder anderen Kurve dagegen wird sich die Länge des Krümmungsradius von Stelle zu Stelle ändern.

Ein Kreis ist um so stärker gekrümmt, je kleiner sein Radius ist. Deshalb nennt man den reziproken Wert des Radius die Krümmung des Kreises. Dies dehnt man auf beliebige Kurven aus. Der reziproke Wert des Krümmungsradius eines Kurvenpunktes heißt die Krümmung der Kurve an der betrachteten Stelle. Für zeichnerische Zwecke benutzt man den Krümmungsradius, nicht die Krümmung, denn der reziproke Wert des Krümmungsradius ist erst dann definiert, wenn man eine bestimmte Strecke als Längeneinheit angenommen hat, und darin liegt eine Willkur.

81. Krümmungsradien der Ellipsenscheitel. In Fig. 103 von Nr. 73 hat der Ellipsenpunkt P die Normale PN_1N_2. Insbesondere sind die Hauptachse A_1C_1 und die Nebenachse B_2D_2 die Normalen des Hauptscheitels A_1 und des Nebenscheitels B_2. Diese Normalen schneiden die von P in N_1 und N_2. Daher ist die Grenzlage von N_1 bzw. N_2 der Krümmungsmittelpunkt des Hauptscheitels A_1 bzw des Nebenscheitels B_2, falls P auf der Kurve nach A_1 bzw. B_2 strebt. Nach Nr. 73 ist nun

$$N_1Q_1 = \frac{b^2}{a^2} MQ_1, \qquad N_2Q_2 = \frac{a^2}{b^2} MQ_2,$$

wenn Q_1 und Q_2 die Fußpunkte der Lote von P auf die Haupt- und Nebenachse sind. Strebt P nach A_1, so gilt dasselbe vom Fußpunkt Q_1, strebt P nach B_2, so gilt dasselbe vom Fußpunkt Q_2. Bezeichnen wir die gesuchten Grenzlagen von N_1 und N_2 mit K_a und K_b, so kommt also:

$$K_aA_1 = \frac{b^2}{a^2} MA_1, \qquad K_bB_2 = \frac{a^2}{b^2} MB_2,$$

mithin wegen $MA_1 = a$, $MB_2 = b$:

$$K_a A_1 = \frac{b^2}{a}, \qquad K_b B_2 = \frac{a^2}{b},$$

d. h.: Die Krummungsradien der Hauptscheitel der Ellipse sind gleich $b^2 \cdot a$, die der Nebenscheitel gleich $a^2 : b$.

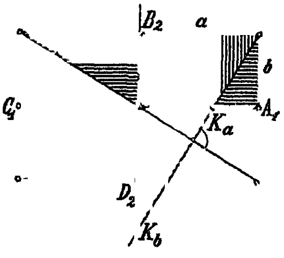


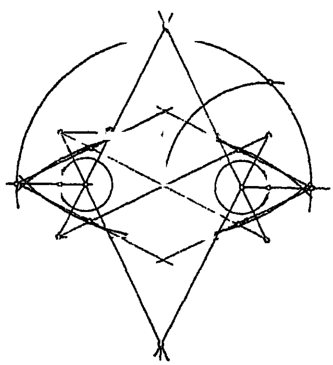
Fig 113

Eine einfache Konstruktion liefert diese Krümmungsmittelpunkte, siehe Fig. 113: Im Rechteck der Scheiteltangenten fallt man von der zwischen A_1 und B_2 gelegenen Ecke das Lot auf die andere Rechtecksdiagonale. Dies Lot trifft die Haupt- und Nebenachse in K_a und K_b, wie sich wegen der Proportionen

$$K_a A_1 : b = b : a, \qquad K_b B_2 : a = a : b$$

aus der Ahnlichkeit der geschrafften Dreiecke ergibt.

82. Zeichnung der Ellipse. Sind die Ellipsenachsen $2a$ und $2b$ nach Lage und Größe gegeben, so bestimmt man, um eine gute Zeichnung der Ellipse herzustellen, zunächst wie soeben die Krummungsmittelpunkte der Scheitel. Die zugehörigen vier Krümmungskreise fallen strenggenommen nur in den Scheitelpunkten selbst mit der Ellipse zusammen, weichen jedoch in den Umgebungen der Scheitel nur außerordentlich wenig von der Ellipse ab. Man ersetzt daher die Ellipse in der Nahe der Scheitel durch Bogen der Krümmungskreise, wie weit man dabei gehen darf, lehrt die Erfahrung. Die vier Kreisbogen gehen nicht ineinander über; vielmehr ist die Ellipse zwischen ihnen mit Hilfe des Kurvenlineals zu ergänzen. Bei nicht zu großen und nicht zu exzentrischen Ellipsen reichen diese Hilfsmittel aus. Sonst empfiehlt es sich, noch denjenigen der Ellipse umschriebenen einzigen Rhombus zu benutzen, der von der Ellipse in den Seitenmitten berührt wird (Nr. 72) Die Seiten dieses Rhombus sind parallel zu den Diagonalen des von den Scheiteltangenten gebildeten Rechtecks und schneiden auf der Hauptachse beiderseits von der Mitte aus die Strecke $a\sqrt{2}$ ab, so daß sich ihre auf der Hauptachse gelegenen Eckpunkte, wie in Fig. 114 angegeben, leicht bestimmen lassen. Die Beruhrungspunkte der Rhombusseiten mit der Ellipse liegen auf den Diagonalen des Rechtecks.


Fig 114.

Benutzt man die Krümmungskreise der Scheitel nicht, zeichnet man vielmehr die Ellipse, nachdem man etwa nach Nr. 73 eine Anzahl von Punkten ermittelt hat, bloß mit Hilfe des Kurvenlineals, so erkennt auch das ungeübte Auge die unvermeidlichen Verstöße gegen die Symmetrien, die der Ellipse in bezug auf ihre beiden Achsen zukommen. Ist eine Ellipse in großeren Ausdehnungen zu zeichnen, so wird man allerdings außer den Krümmungskreisen der Scheitel noch einige einzelne nach

Nr. 73 zu findende Ellipsenpunkte benutzen; auch kann man ihre Tangenten bestimmen und berücksichtigen.

83. Ermittlung der Ellipse aus einer Achse und einem Ellipsenpunkt. Wir knüpfen wieder an die Konstruktion der Ellipse mittels konzentrischer Kreise (Nr. 73) an, siehe Fig. 115. Hier ist durch den Ellipsenpunkt P noch die Parallele zum Strahl MP_2P_1 gezogen Sie schneide die Hauptachse in X und die Nebenachse in Y. Da MP_2PX und MP_1PY Parallelogramme sind, ist $PX = P_2M$ und $PY = P_1M$. Aber P_2M ist gleich der halben Nebenachse b und P_1M gleich der halben Hauptachse a der Ellipse. Hierauf beruht die Lösung der sehr oft vorkommenden Aufgabe

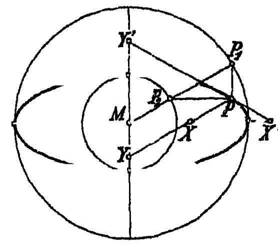


Fig 115.

Von einer Ellipse ist eine Achse nach Lage und Länge gegeben, außerdem noch ein Punkt P; gesucht wird die andere Achse

Die Lage der anderen Achse ist als die Mittelsenkrechte der gegebenen Achse bekannt. Wenn nun die gegebene Achse die Hauptachse $2a$ (oder die Nebenachse $2b$) ist, schlägt man um P mit dem Radius a (oder b) den Kreis, schneidet der Kreis die Mittelsenkrechte in Y (oder X), siehe Fig. 116a (oder b), so wird die Gerade PY (oder PX) mit der Geraden der gegebenen Achse in X (oder Y) zum Schnitt gebracht Alsdann ist $PX = b$ (oder $PY = a$) die Länge der halben Nebenachse (oder Hauptachse)

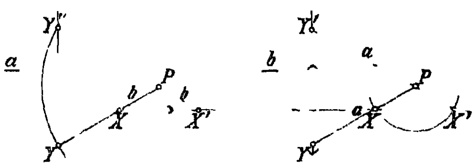


Fig 116

Hierbei ist es gleichgültig, welcher der Schnittpunkte des Hilfskreises mit der Mittelsenkrechten benutzt wird Denn wenn man in Fig 115 durch P noch diejenige Gerade zieht, die mit der Hauptachse denselben Winkel wie MP_2P_1 bildet, aber in entgegengesetzter Lage, und wenn X' und Y' die Schnittpunkte dieser Geraden mit den Geraden der Haupt- und Nebenachse sind, ist ja $PX' = PX = b$ und $PY' = PY = a$.

Der in Fig 116 benutzte Hilfskreis um P schneidet die Mittelsenkrechte nicht, falls P außerhalb desjenigen Streifens liegt, der durch die beiden durch die Endpunkte der gegebenen Achse senkrecht zu dieser gezogenen Geraden begrenzt wird. In diesem Falle hat die Aufgabe keine Lösung.

Die Lösung wird ungenau, wenn P nahe bei einem der beiden Endpunkte der gegebenen Achse liegt. Eine genauere Lösung laßt sich jedoch dann nicht angeben, denn die Gesamtheit derjenigen Ellipsen, die eine Achse nach Länge und Lage gemein haben, drängt sich in der Nähe der Endpunkte dieser Achse sehr eng zusammen. Eine geringfügige Abänderung eines dort gegebenen Punktes P der Kurve zieht daher eine beträchtliche Abänderung der Länge der anderen Achse nach sich.

Anmerkung: Diese Konstruktion wurde von einem in mehrfacher Hinsicht merkwürdigen Mann angegeben, von dem Flamen *Simon Stevin* (geb 1548 in Brugge, gest 1630 in Leiden oder im Haag). Als eifriger Kämpfer für seine Muttersprache verfaßte er seine Schriften flämisch; als Erfinder des Segelwagens und Segelschlittens ist er volks-

tümlich geworden, ihm verdankt man die erste richtige Behandlung der schiefen Ebene in der Mechanik sowie die Einführung der Rechnung mit Dezimalbruchen. Seine Werke wurden von Albert Girard ins Französische übertragen, erschienen aber erst nach Girards Tod unter dem Titel: „Les œuvres mathématiques de Simon Stevin", Leiden 1634. Siehe darin insbes. „De la practique de géométrie", S. 348 der zweiten Seitenzahlung (die Zählung beginnt nämlich nach S 122 von neuem) Stevin selbst berief sich bei seiner Konstruktion auf Guido Ubaldi, von dem in Nr 84 zu reden sein wird.

84. Mechanische Erzeugung der Ellipse. Richtet man die Aufmerksamkeit auf die Gerade XY (oder $X'Y'$) in Fig. 115 der letzten Nummer, so bekommt man den Satz:

Bewegt sich eine starre Gerade so, daß zwei ihrer Punkte X und Y zueinander senkrechte Geraden x und y der Ebene beschreiben, so durchläuft jeder andere Punkt P der Geraden eine Ellipse. Die Achsen der Ellipse liegen auf x und y, die auf x gelegene Halbachse ist gleich PY, die auf y gelegene Halbachse gleich PX.

Auf diesem Satz beruht die Herstellung von Ellipsographen, d. h. Vorrichtungen zum mechanischen Zeichnen der Ellipse.

Wenn man ferner mit der beweglichen starren Geraden denjenigen Kreis k fest verknüpft, der XY zum Durchmesser hat, geht dieser Kreis offenbar beständig durch den Schnittpunkt M von x und y, d h durch den Mittelpunkt der Ellipse, siehe Fig. 117. Außerdem beruhrt er beständig von innen denjenigen Kreis $\varkappa$ der Ebene, der M zum Mittelpunkt hat und dessen Halbmesser gleich XY ist Der Berührungspunkt U ist der M auf k gegenüberliegende Punkt. Als Anfangslage der Strecke XY können wir eine Lage X_0Y_0 wählen, wobei der eine Endpunkt Y_0 mit M zusammenfallt, der andere Endpunkt X_0 also auf x liegt, so daß der Kreis k in der Anfangslage k_0 den Kreis $\varkappa$ in X_0 berührt. Mit U_0 sei derjenige Punkt des starr, aber beweglich gedachten Kreises k_0 bezeichnet, der nach U kommt, wenn k_0 in die Lage k übergeht, d. h. der Bogen X_0U_0 von k_0 sei gleich dem Bogen XU von k.

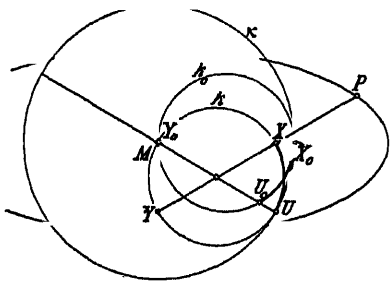


Fig 117

Zu diesem Bogen gehört $\sphericalangle XMU$ als Peripheriewinkel, zum Bogen X_0U_0 also ein ebenso großer Peripheriewinkel; folglich liegt U_0 auf MU. Demnach beschreibt der Punkt U_0 des Kreises k_0 eine Gerade durch M. Da wir den Kreis k in einer beliebigen Lage betrachten, erhellt: Überhaupt jeder Punkt U auf dem Umfang des beweglichen Kreises k beschreibt eine Gerade durch M. Ferner ist der erwähnte Peripheriewinkel $\sphericalangle XMU$ zugleich Zentriwinkel des Kreises $\varkappa$. Da dieser Kreis einen doppelt so großen Radius wie der Kreis k hat, ist daher der Bogen X_0U von $\varkappa$ gleich dem Bogen X_0U_0 von k_0 und gleich dem Bogen XU von k, d. h.: Der Kreis k bewegt sich so, daß er auf der Innenseite des Kreises $\varkappa$ ohne Gleiten rollt. Somit gilt der Satz:

Rollt ein Kreis k auf der Innenseite eines festen Kreises $\varkappa$ von doppelt so großem Radius ohne Gleiten ab, so beschreibt

jeder Punkt auf dem Umfang von k eine Gerade durch den Mittelpunkt M von $\varkappa$, während irgendein mit k fest verknüpfter Punkt P eine Ellipse mit dem Mittelpunkt M durchlauft.

Hiermit ist eine sogenannte Geradführung gewonnen, d. h. eine mechanische Umsetzung einer Drehbewegung in geradlinige Bewegung.

Diese Betrachtung laßt sich verallgemeinern: Ein starres Dreieck UVP von beliebiger Gestalt bewege sich derart, daß U und V irgend zwei einander in einem Punkt M schneidende Geraden u und v beschreiben, siehe Fig. 118, worin $U_0 V_0 P_0$ die Anfangslage des Dreiecks sei. Der Kreis k_0 durch U_0, V_0 und M werde mit dem beweglichen Dreieck fest verknüpft. Kommt das Dreieck in die Lage UVP, so gelangt dieser Kreis in eine neue Lage k. Da k durch U und V geht, U und V aber auf u und v liegen, ist dann $\sphericalangle UMV = \sphericalangle U_0 M V_0$ (oder gleich dem Supplementwinkel), und da k denselben Radius wie k_0 hat, bedeutet dies, daß auch k durch M geht. Der Kreis k geht also bestandig durch M. Auf dem Kreis k_0 sei W_0 der Gegenpunkt von U_0, geht k_0 in k uber, so gelangt W_0 nach W, dem U auf k gegenuberliegenden Punkt

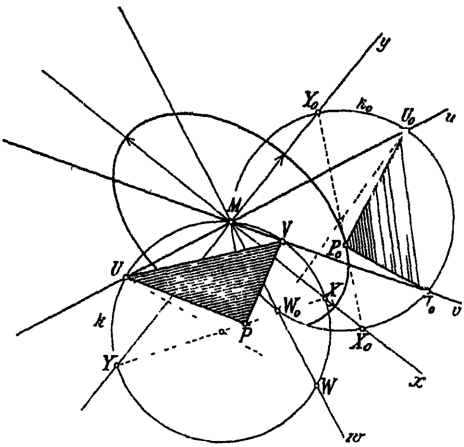


Fig 118

Da nun $\sphericalangle U_0 M W_0 = \sphericalangle UMW$ ein rechter Winkel ist, U_0 und U aber auf u liegen, befinden sich W_0 und W auf dem in M auf u errichteten Lot w Die Bewegung vollzieht sich demnach so, daß zwei mit dem beweglichen starren Dreieck UVP fest verknupfte Punkte, namlich U und W, zueinander senkrechte Geraden u und w durch M beschreiben. Damit gelangen wir zu der vorher betrachteten Bewegung zuruck, indem jetzt U und W die Rolle von X und Y und u und w die von x und y spielen. Nach dem, was sich vorhin ergab, beschreibt jeder Punkt des Umfanges von k eine Gerade durch M. Insbesondere gilt dies von denjenigen beiden Punkten X und Y, in denen der Kreis k durch seinen P enthaltenden Durchmesser getroffen wird Die Bahnen x und y dieser beiden Punkte sind, weil $\sphericalangle XMY$ ein rechter Winkel ist, zwei zueinander senkrechte Geraden durch M. Mithin laßt sich die betrachtete Bewegung des Punktes P auch dadurch erzielen, daß eine starr mit P verknüpfte und durch P gehende Gerade so bewegt wird, daß zwei Punkte X und Y von ihr zwei zueinander senkrechte Geraden x und y beschreiben. Demnach ist die Bahn von P die Ellipse, deren Achsen auf x und y liegen und deren auf x gelegene Halbachse gleich PY und deren auf y gelegene Halbachse gleich PX ist. Unser Ergebnis ist der Satz:

Bewegt sich ein starres Dreieck UVP so, daß U und V zwei sich in einem Punkt M schneidende Geraden u und v der Ebene beschreiben, so durchläuft der Punkt P eine Ellipse mit dem Mittelpunkt M.

Anmerkung: Proklus (mit Beinamen Diadochus, d. h. Nachfolger, nämlich als Vorsteher der neuplatonischen Schule zu Athen, 410—485 n. Chr.) erwähnt in seinen „Erläuterungen zum ersten Buch der Elemente des Euklid" den zu Anfang dieser Nummer aufgestellten Satz („Procli Diadochi in primum librum Euclidis Elementorum librum commentarii", herausgeg. von Gottfried Friedlein, Leipzig 1873, S. 106). Der Satz kehrt wieder bei Guidobaldo del Monte (1545—1607, Edelmann aus Pesaro, von Stevin, siehe Nr. 83, Guido Ubaldi genannt) in seiner „Planisphaericorum universalium theorica" von 1579. Die oben erwähnte Geradführung haben verschiedene unabhängig voneinander entdeckt. Zunächst, worauf Maxim. Curtze (geb. 1837 zu Ballenstedt a. H., gest. 1903 in Thorn) in der Bibliotheca mathem. 1895, S. 33—34, aufmerksam gemacht hat, der arabische Mathematiker Nasîr Eddîn (1201—1274) in einer Schrift „Über die Figur der Schneidenden" (gemeint ist der Satz des Menelaus, Nr. 11), ins Französische übersetzt unter dem Titel: „Traité du quadrilatère attribué à Nassiruddin-el-Toussy" von Alexandre Pacha Carathéodory, Konstantinopel 1891. Dann tritt die Geradführung auf bei dem Astronomen Nikolaus Koppernikus (Koppernigk, geb. 1473 zu Thorn, Domherr zu Frauenburg in Ostpreußen, gest. 1543) in seinem berühmten Werk: „De revolutionibus orbium coelestium libri VI" (Sechs Bücher über die Kreisbewegungen der Weltkörper), Nürnberg 1543, 3. Buch, 4. Kap. (Übersetzung von C. L. Menzzer, Thorn 1879, S. 138, 139). Meistens wird die Geradführung nach dem Italiener Geronimo Cardano (lat. Cardanus, geb. 1501 in Pavia, gest. 1576 in Rom, bekannt durch seine Formel für die Auflösung der Gleichungen dritten Grades) benannt. Dieser lehrte sie in seinem „Opus novum de proportionibus numerorum, motuum, ponderum, sonorum, aliarumque rerum mensurandarum etc." (Neues Werk über die Verhältnisse der Zahlen, Bewegungen, Gewichte, Töne und anderer meßbarer Dinge usw.), 1. Teil eines 1570 in Basel erschienenen Buches, S. 186 u. f. Er bemerkte aber dabei (S. 188), die Erfindung, nicht der Beweis dafür, rühre von seinem Schüler Luigi Ferrari (geb. 1522 in Bologna, gest. 1565 ebenda) her.

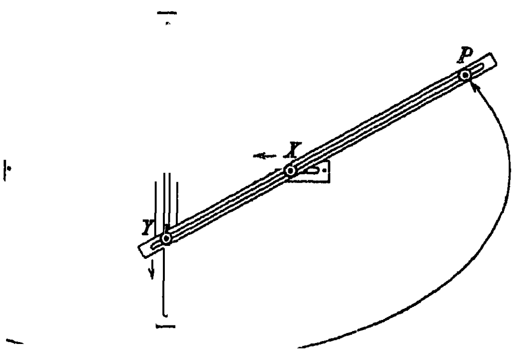


Fig. 119.

Auf dem zu Anfang dieser Nummer ausgesprochenen Satz beruht die einfachste Konstruktion eines Ellipsographen in Fig. 119. Ein beweglicher Stab trägt drei Spitzen X, Y, P, die an beliebigen Stellen des Stabes fest angebracht werden können. Mittels kleiner Schlitten sind die Spitzen X und Y längs zweier zueinander senkrechter Schlitze beweglich, deren Kreuz fest auf das Zeichenbrett aufgesteckt werden kann. Die Spitze P trägt den Zeichenstift. Selbstverständlich hat Proklus diese mechanische Vorrichtung schon gekannt, wenn auch kein Zeugnis dafür vorliegt. In der Literatur kommt sie jedoch erst sehr spät vor. Der Professor der Mathematik in Leiden Franz van Schooten (1615—1660, der Jüngere genannt zum Unterschied von seinem Vater) bringt in seinem „De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus" (Abhandlung über die organische Beschreibung der Kegelschnitte in der Ebene), 4. Buch seiner „Exercitationes mathematicae", 1657, die Vorrichtung in der in Fig. 120 angedeuteten Gestalt: Zwei gleichlange Stäbe MZ und ZX sind in Z drehbar verbunden, der erste ist um einen festen Punkt M einer Geraden x drehbar, während X längs dieser Geraden gleiten kann. Irgendein Punkt P des Stabes ZX (oder seiner Fortsetzung) beschreibt dann eine Ellipse. Wird nämlich XZ über Z hinaus um seine Länge bis Y fortgesetzt, so bemerkt man, daß Y das in M auf x errichtete Lot y durchläuft, so daß man zu dem Satz des Proklus zurückkommt. Ferner verallgemeinerte van Schooten den Apparat, indem er ZX zum einen Schenkel eines starren gleichschenkligen Dreiecks ZXU machte, deren Spitze Z ist. Er bemerkte dabei, daß dann U eine Gerade durch M beschreibt, während irgendein Punkt P von UX eine Ellipse zurücklegt. Daraus folgerte er, daß

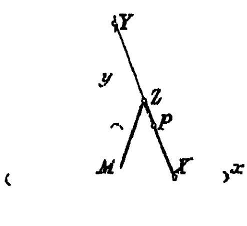


Fig. 120

man als Fuhrung des Dreiecks ZXU auch zwei Schienen x und u benutzen kann, die keine rechten Winkel miteinander bilden. Der Ellipsograph kommt dann vor bei dem hessischen Rent- und Baumeister Benjamin Brauer zu Ziegenhayn in seinem 1684 erschienenen „Apollonius Cattus oder Kern der gantzen Geometriae“, vgl. Anton von Braunmuhl (geb 1853 in Tiflis, Professor an der technischen Hochschule Munchen, gest. 1908) in seiner „Historischen Studie über die organische Erzeugung ebener Kurven von den altesten Zeiten bis zum Ende des achtzehnten Jahrhunderts“ im „Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente“ der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Munchen 1892, S 54—88, insbes. S 70. Als Prazisionsapparat ist der Ellipsograph in zwei verschiedenen Ausführungen durch die Reißzeugfabrik von Clemens Riefler in Nesselwang und Munchen in den Handel gebracht worden. Eine andere Ausfuhrung zeigt der Apparat der Firma Martin Schilling, Verlag mathematischer Modelle, in Leipzig, hergestellt nach Angabe von Karl Rohn (geb. 1855 in Schwanheim, Professor der Mathematik an der Universität Leipzig, gest ebenda 1920)

Aus unseren Betrachtungen folgt Bewegt sich eine starre Ebene so auf einer in Ruhe befindlichen Ebene, daß zwei sich schneidende Geraden u und v der beweglichen Ebene bestandig durch feste Punkte U und V der ruhenden Ebene gehen, so zeichnet irgendein auf der ruhenden Ebene befindlicher fester Zeichenstift auf der beweglichen eine Ellipse ein Dies ist der Grundgedanke des Ovalwerks oder der Ellipsendrehbank, als deren Erfinder der vielseitige Lionardo da Vinci (geb 1452 in einem Dorf Vinci, Maler, Bildhauer, Architekt und Ingenieur, meistens in Mailand lebend, gest 1519 im Schloß Clos-Lucé bei Amboise in Frankreich) nach dem Zeugnis des Lomazzo in seiner Schrift „Idea del tempio della pittura“ 1590, S 17, anzusehen ist (vgl A v Braunmuhl, a. O S. 62)

Nach Nr 74 könnte man eine Ellipse mechanisch auch mit Hilfe eines durchaus biegsamen unausdehnbaren Fadens herstellen, der durch Stifte F_1 und F_2 in den Brennpunkten fest angeknupft und alsdann durch einen Zeichenstift gespannt wird Die Lange des Fadens ist dann gleich der Hauptachse der Ellipse Dies Verfahren heißt die Gartnerkonstruktion der Ellipse (Geschichtliches daruber bei W Weinreich, „Die Fadenzeichnung der Hyperbel mit Bemerkungen uber die Gartnerkonstruktion der Ellipse“, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 26 Bd 1918, S 284—291) Fur genaue Zeichnungen ist dies Verfahren unbrauchbar Einzelne Punkte der Ellipse findet man, wenn ihre Achsen gegeben sind, am bequemsten durch die sogenannte Papierstreifenkonstruktion, die auf dem ersten Satz der gegenwartigen Nummer beruht Auf einem Papierstreifen macht man Marken X, Y, P derart, daß PX gleich der kleinen und PY gleich der großen Halbachse ist Den Streifen legt man dann so auf die Zeichenebene, daß X irgendwo auf der Hauptachse und Y auf der Nebenachse zu liegen kommt Dann gibt die Marke P stets einen Punkt der Ellipse an

85. Ellipse aus gegebenen konjugierten Halbmessern. Nach Fig. 104 von Nr 73 bekommt man konjugierte Halbmesser einer Ellipse, deren Achsen $2a$ und $2b$ nach Lage und Lange gegeben sind, indem man die konzentrischen Kreise zeichnet, von der Mitte M aus zwei zueinander senkrechte Strahlen MP_2P_1 und MQ_2Q_1 zieht und die zu ihnen gehorigen Ellipsenpunkte P und Q bestimmt Dann namlich sind MP und MQ konjugierte Halbmesser Wird nun MP_2P_1 zusammen mit dem starr daran geknüpft gedachten Punkt P durch einen rechten Winkel um M in die Lage MQ_2Q_1 gedreht, so gelange P nach R, siehe Fig. 121. Dann ist $Q_1R \perp P_1P$ und $Q_2R \perp P_2P$, so daß QQ_1RQ_2 ein Rechteck ist.

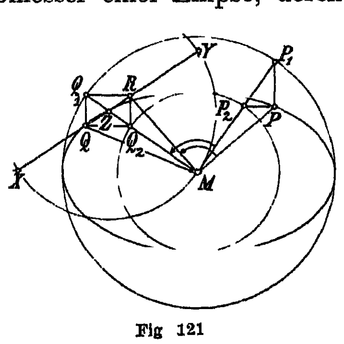


Fig 121

Die Mitte des Rechtecks sei Z. Schneidet die verlangerte Diagonale QR des Rechtecks die Hauptachse in X und die Nebenachse in Y, so ist $QX = MQ_2 = b$, $QY = MQ_1 = a$. Ferner hat der Kreis um Z durch M die Strecke XY zum Durchmesser.

Jetzt werde angenommen, es seien nur konjugierte Halbmesser MP, MQ nach Lage und Länge gegeben. Dann ist es leicht, die Figur wieder herzustellen. Indem man nämlich MP durch einen rechten Winkel um M dreht, gelangt MP in die neue Lage MR, siehe Fig. 122, und die Mitte von QR ist Z. Der Kreis um Z, der durch M geht, schneidet QR in den Punkten X und Y, so daß man MX, MY ziehen kann. Dies sind die Geraden der Achsen. Die auf MX gelegene Halbachse ist gleich QY, die auf MY gelegene gleich QX. Nun kann man die Zeichnung leicht zur Fig. 121 vervollständigen.

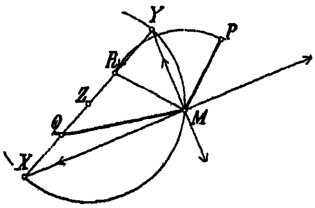


Fig 122

Dies Verfahren, aus nach Lage und Länge gegebenen konjugierten Halbmessern die Achsen der Ellipse zu ermitteln, lehrt:

Zwei beliebig angenommene Strecken MP, MQ von einem Punkt M aus sind stets konjugierte Halbmesser einer, aber auch nur einer Ellipse. Nach Nr. 72 besagt dies: In ein beliebig angenommenes Parallelogramm läßt sich stets eine, aber auch nur eine Ellipse derart einschreiben, daß sie die Seiten des Parallelogramms in den Mitten berührt. Erinnert man sich an die Erklärung der konjugierten Durchmesser, so folgert man: Jedes Parallelogramm kann durch senkrechte Projektion eines Quadrats gewonnen werden. Mit anderen Worten: Ein Prisma, dessen senkrechter Querschnitt ein Parallelogramm ist, läßt stets quadratische ebene Schnitte zu. (Siehe später Nr. 96.)

Sind AB und CD zueinander senkrechte Durchmesser eines Kreises und schneidet eine beliebige Parallele zu CD die Gerade AC in X und die Gerade BC in Y, so ist X der Schnittpunkt der Höhen AC und YX des Dreiecks ABY, siehe Fig. 123, folglich BX die dritte Höhe, d. h. BX trifft AY in einem Punkte P so, daß $\sphericalangle APB$ ein rechter Winkel ist. Dies aber besagt, daß P ein Punkt des Kreises ist. Aus dieser Art, beliebige Punkte P des Kreises ohne Benutzung des Zirkels durch bloßes Ziehen von Parallelen XY zu CD und durch Schneiden von Geraden zu bestimmen, ergibt sich, wenn man die Figur in irgendeiner Lage projiziert, sofort die folgende Art, beliebige Punkte P' einer Ellipse zu ermitteln, von der man zwei konjugierte Durchmesser $A'B'$ und $C'D'$ nach Lage und Länge kennt, siehe Fig. 124. Man zieht eine Parallele zu $C'D'$, bringt sie in X' und Y' mit $A'C'$ und $B'C'$ zum Schnitt und hat dann im Schnittpunkte P' von $A'Y'$ und $B'X'$ einen Punkt der Ellipse. Man beachte, daß die Parallele zu $C'D'$ ganz willkürlich gezogen werden kann und daß man daher auf diese Art alle Punkte der Ellipse finden kann.

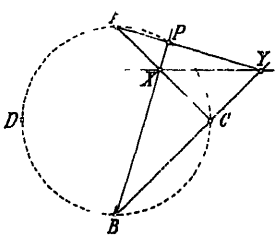


Fig 123

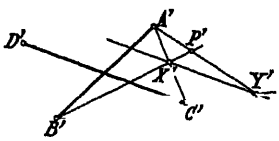


Fig 124

Schließlich wollen wir noch angeben, wie man beliebige Tangenten einer Ellipse finden kann, wenn man ein Paar konjugierter Durchmesser

nach Lage und Länge kennt Wir gehen dabei wieder vom Kreis aus: Wenn AB und CD zueinander senkrechte Kreisdurchmesser sind und das zugehörige, dem Kreis umschriebene Quadrat $EFGH$ in Fig. 125 gezeichnet worden ist, wird die Tangente irgendeines Kreispunktes P die Seiten HE und EF in Punkten X und Y schneiden, und es sei $AX = x$, $CY = y$ gesetzt. Dann ist $PX = AX = x$ und $PY = CY = y$, also $XY = x + y$. Ferner ist $XE = r - x$ und $YE = r - y$, wenn r den Kreisradius bezeichnet. Das rechtwinklige Dreieck EXY liefert demnach

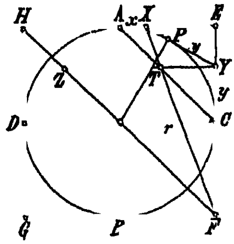


Fig 125

$$(r - x)^2 + (r - y)^2 = (x + y)^2$$

oder
$$r^2 - rx - ry = xy,$$

d. h.
$$\frac{r - x}{r + x} = \frac{y}{r}.$$

Nun ist $r - x = XE$, $r + x = HX$. Die Parallele zu CD durch Y treffe die Gerade AC in T und die Gerade FH in Z. Dann ist $TY = CY = y$ und $ZT = HA = r$. Mithin lehrt die Proportion, daß die Geraden YE, TX und ZH den Punkt F gemein haben. Man bekommt demnach eine Kreistangente, indem man T beliebig auf AC wählt, mittels FT den Punkt X und mittels $ZT \parallel HE$ den Punkt Y ermittelt und dann XY zieht. Wenn nun die Figur in irgendeiner Lage projiziert wird, ergibt sich daraus das folgende Verfahren, beliebige Tangenten der Ellipse zu ermitteln, die durch zwei nach Lage und Länge gegebene konjugierte Durchmesser $A'B'$ und $C'D'$ bestimmt ist, siehe Fig. 126· Man wählt T' beliebig auf $A'C'$ und bestimmt X' als Schnittpunkt von $E'H'$ mit $F'T'$ und Y' als Schnittpunkt von $E'F'$ mit $T'Y' \parallel H'E'$. Die Gerade $X'Y'$ ist alsdann eine Tangente der Ellipse

Anmerkung Schon im Altertum wurden Konstruktionen zur Ermittlung der Achsen einer Ellipse aus gegebenen konjugierten Durchmessern gefunden Das in Fig 122 dargestellte einfache Verfahren wurde unseres Wissens zuerst von Leop Moßbrugger, Professor an der Kantonsschule zu Aarau, veroffentlicht. Siehe „Großtenteils neue Aufgaben aus dem Gebiete der Géométrie descriptive nebst deren Anwendung auf die konstruktive Auflosung von Aufgaben uber raumliche Verwandtschaften der Affinität, Kollineation usw.“, Zürich 1845, S 123 u f Daselbst wird gesagt (S 125), daß das Verfahren von Rytz, Professor der Mathematik in Aarau, herruhre. Man bezeichnet es deshalb als die Konstruktion von Rytz

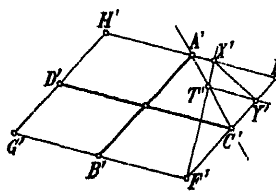


Fig 126

Die in Fig. 126 angegebene Tangentenkonstruktion findet man in der „Darstellenden Geometrie“, 2. Abtl., von Karl Pohlke (Nr. 62), Berlin 1876, S 21, 23, 24, noch fruher mit Nennung von Pohlke in dem Büchlein· „Vorschule der darstellenden Geometrie“ von A. L. Busch, 2 Aufl. Berlin 1868, S. 74, 75. Sie ist ubrigens nur eine von zahlreichen Konstruktionen, die dasselbe leisten.

86. Abstände der Ellipsentangenten vom Mittelpunkt. Da MP und MQ in Fig. 121 der letzten Nummer konjugierte Halbmesser der Ellipse sind, ist die Tangente von Q zu MP parallel (Nr. 72) Ihre Entfernung von der Mitte M läßt sich nun wie folgt ermitteln: Der Strahl $MR \perp MP$ schneide den großen Kreis in S_1, den kleinen in S_2, siehe Fig. 127. Das

Lot von S_1 auf die Hauptachse treffe MQ_2Q_1 in S Dann ist MS MS_1 $= MQ_2 : MR$, also $MS \;\; a = b \cdot MR$. Das Lot von S_2 auf die Nebenachse treffe MQ_2Q_1 in T. Dann kommt entsprechend $MT : b = a : MR$ oder also $MT \,.\, a = b : MR$. Daher fällt S mit T zusammen Dieser Punkt gehört überdies der Ellipse an. Der dem Rechteck QQ_1RQ_2 umschriebene Kreis schneide MS_2S_1 außer in R noch in U. Wegen $\sphericalangle UQ_1Q_2 = \sphericalangle URQ_2 = \sphericalangle S_2S_1S$ sind die rechtwinkligen Dreiecke Q_1UQ_2 und S_1SS_2 kongruent. Folglich ist $MU = MS$. Außerdem ist $\sphericalangle QUR$ ein rechter Winkel als Peripheriewinkel über dem Durchmesser QR des Hilfskreises. Da $MU \perp MP$ ist, hat man $QU \parallel MP$, so daß QU die Tangente des Ellipsenpunktes Q ist. Die Tangente des Punktes Q hat also von M den Abstand MU, der gleich MS ist Wird nun $\sphericalangle S_1MQ_1$ um M durch einen rechten Winkel gedreht, bis MQ_1 auf MP_1 fällt, so kommt R nach P, und S_1 und S_2 gehen in die Schnittpunkte $\bar{P}_1$ und P_2 des Strahls MP mit den konzentrischen Kreisen über. Dabei wird S_1S die Parallele zur Hauptachse durch $\bar{P}_1$ und S_2S die Parallele zur Nebenachse durch $\bar{P}_2$, so daß S in den auf MP_2P_1 gelegenen Schnittpunkt $\bar{P}$ beider Parallelen übergeht. Mithin ist die Entfernung der zu MP parallelen Tangente des Punktes Q von der Mitte M gleich $M\bar{P}$. Dies sprechen wir so aus.

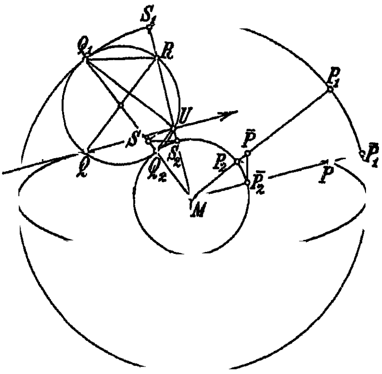


Fig 127

Ist ein Ellipsenpunkt P aus dem Strahl MP_2P_1 von der Mitte M aus vermoge der konzentrischen Kreise gewonnen worden und schneidet der Strahl MP den großen Kreis in $\bar{P}_1$ und den kleinen Kreis in $\bar{P}_2$, so liegt der Schnittpunkt $\bar{P}$ der Parallelen zur Hauptachse durch $\bar{P}_1$ mit der Parallelen zur Nebenachse durch $\bar{P}_2$ auf dem Strahl MP_2P_1, und die Strecke $M\bar{P}$ ist gleich der Entfernung der zu MP parallelen Ellipsentangenten vom Mittelpunkt M.

87. Übungen. Die Achsen einer Ellipse zu bestimmen, wenn gegeben sind·

1) ein Brennpunkt, die zugehörige Leitlinie und die Exzentrizität, z. B. gleich $\frac{1}{2}$ (Nr. 74),

2) ein Ellipsenpunkt nebst seiner Tangente, ein Brennpunkt und die Richtung der Hauptachse (Nr. 79),

3) die Brennpunkte und eine Tangente (Nr. 79),

4) ein Brennpunkt, die Länge und Richtung der Hauptachse sowie eine Tangente (Nr. 79),

5) ein Hauptscheitel nebst seinem Krümmungskreis sowie die Lange der Nebenachse (Nr. 81).

6) Ein Quadrat bewege sich so, daß die Endpunkte einer Seite zwei zueinander senkrechte gegebene Geraden beschreiben. Die Bahnen der beiden anderen Ecken zu konstruieren (Nr 84).

§ 8. Anwendungen der Ellipse.

88. Drehung um eine beliebige Achse. Vorweg einige allgemeine Bemerkungen, die überhaupt immer bei der senkrechten Projektion eines Kreises zu beachten sind:

Ein Kreis im Raume wird bestimmt durch seine Ebene, seinen Mittelpunkt und seinen Radius. Das in der Mitte auf die Ebene errichtete Lot heißt die Kreisachse. Man darf sie nicht mit einer der Achsen der Bildellipse verwechseln. Der auf der Höhenlinie des Kreismittelpunktes gelegene Durchmesser gibt im Bilde die Hauptachse der Ellipse, der steilste Durchmesser die Nebenachse, und die Nebenachse fällt auf die Projektion der Kreisachse. Die senkrechte Projektion der Achse eines Kreises ist also stets senkrecht zur Hauptachse der Bildellipse. Wenn der Radius des Kreises gleich r und der Neigungswinkel der Kreisebene gleich α ist, sind $a = r$, $b = r \cos\alpha$ die Halbachsen der Ellipse. Haben die Brennpunkte vom Ellipsenmittelpunkt den Abstand c, so ist $a^2 = b^2 + c^2$ (Nr. 74), also $c = r \sin\alpha$. Der Abstand der Brennpunkte von der Mitte ist also gleich der senkrechten Projektion des auf der Kreisachse aufgetragenen Radius, und der Neigungswinkel der Kreisebene zur Tafel ist derjenige Winkel, den die Brennstrahlen der Nebenscheitel mit der Nebenachse bilden.

Sobald man nur die wahre Lage und Länge des steilsten Kreisdurchmessers CD kennt, findet man sofort die Bildellipse, denn die Projektion von CD liefert die Nebenachse, während die Länge der Hauptachse gleich CD ist. Man wird daher in dem Fall, wo es sich um die Abbildung eines durch irgendwelche Angaben bedingten Kreises handelt, zweckmäßig zunächst darauf ausgehen, den steilsten Kreisdurchmesser festzustellen. Da er in der projizierenden Ebene der Kreisachse liegt, kommt man hierbei häufig dadurch zum Ziel, daß man die projizierende Ebene der Kreisachse umlegt.

So bei der Aufgabe, die Drehung eines Punktes P um eine beliebige Gerade g darzustellen. Die Gerade sei durch die Projektionen und Höhen zweier ihrer Punkte A und B und der Punkt P sei ebenfalls durch seine Projektion und Höhe gegeben. Die Ebene des Drehkreises ist senkrecht zu g, die Kreismitte M der Fußpunkt des Lotes von P auf g. Man bestimmt daher wie in Nr. 19 sowohl M' als auch die wahre Länge des Radius MP. In der dabei benutzten projizierenden Ebene liegt der steilste Durchmesser des Kreises, so daß sich ohne weiteres die Nebenachse und Hauptachse der Ellipse ergibt, siehe Fig. 128. Soll der Punkt Q gefunden werden, in den P übergeht, falls die Drehung nur durch einen gewissen gegebenen Winkel φ statt-

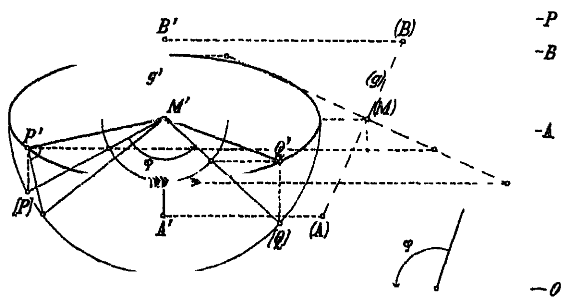
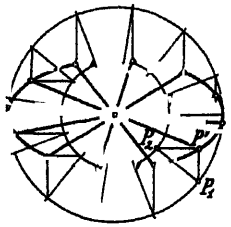


Fig 128.

findet, so legt man die Ebene des Kreises zunächst um ihren zur Tafel parallelen Durchmesser soweit um, bis sie zur Tafel parallel wird. Denn dann erscheint der Kreis in wahrer Gestalt. Aus dem umgelegten Punkt $[P]$ geht durch die Drehung der umgelegte Punkt $[Q]$ und aus diesem Q' hervor. Zur genauen Bestimmung von Q' ohne Benutzung der Ellipse bedient man sich dabei noch des konzentrischen Kreises, dessen Durchmesser die Nebenachse ist (Nr. 73).


Fig. 129.

Bei dieser Gelegenheit sei angemerkt. Zuweilen liegt die Aufgabe vor, einen Kreis von einem Punkt P an in gleiche Teile zu teilen und dies in senkrechter Projektion darzustellen. Das Verfahren, das wieder auf der Benutzung der beiden konzentrischen Kreise beruht, ist aus Fig. 129 sofort zu ersehen.

89. Kugel. Weil die senkrechten Projektionen der nach verschiedenen Richtungen gehenden Radien einer Kugel alle Längen von Null bis zur wahren Radienlänge r haben können (Nr. 8), bedeckt die senkrechte Projektion der Kugelfläche das ganze Innere des Kreises u' vom Radius r um das Bild M' der Kugelmitte M. Der Kreis u' heißt der Umriß der Kugel. Er enthält die Projektionen derjenigen Kugelpunkte, deren Radien zur Tafel parallel sind, d. h. er ist die Projektion desjenigen Kreises u, in dem die Kugel durch die Höhenebene von M geschnitten wird. Der Kreis u teilt die Kugel in ihre obere und untere Hälfte. Ist die Kugel undurchsichtig, so ist nur die obere Hälfte zu sehen. Der höchste und der tiefste Punkt der Kugel haben beide ihre Projektion in M'. Jeder Punkt P' im Innern von u' ist die Projektion zweier verschiedener Punkte der Kugel. Man kann leicht ermitteln, um wieviel sich ihre Höhen von der Höhe der Mitte M unterscheiden. Man schneidet nämlich die Kugel mit der längs $M'P'$ auf der Tafel senkrecht stehenden Ebene; sie trifft die Kugel in einem Kreis vom Radius r, und wenn man die Ebene um ihre Höhenlinie durch M in die Höhenebene von M umlegt, fällt der Kreis mit u' zusammen. Demnach ist die Umlegung (P) von P' einer der Punkte, in denen das in P' auf $M'P'$ errichtete Lot den Umriß u' schneidet, siehe Fig. 130, so daß $P'(P)$ den Höhenunterschied von M und P darstellt. Weil er positiv oder negativ aufgefaßt werden kann, bekommt man zwei Punkte P mit derselben Projektion P'; der eine liegt gerade so viel höher als M wie der andere tiefer als M.

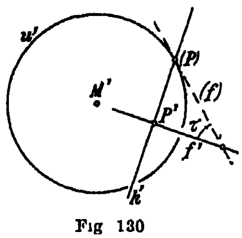


Fig. 130

Die Tangentialebene eines Kugelpunktes P ist zum Radius MP senkrecht. Ihre Höhenlinie h durch P stellt sich daher im Bilde als das Lot h' zu $M'P'$ durch P' dar, ihre Fallinie f durch P hat als Projektion die Gerade $M'P'$ selbst (Nr. 17, 18). Die Neigung τ der Tangentialebene zur Tafel ist gleich der Neigung der Fallinie f, demnach gleich dem Winkel τ, den die Umlegung (f) von f in Fig. 130 mit $M'P'$ bildet.

Da jeder ebene Schnitt der Kugel ein Kreis ist und dieser Kreis das Lot von der Kugelmitte M auf seine Ebene als Achse (Nr. 88) hat, ist

das Bild eines jeden Kugelkreises eine im Innern des Umrisses u' verlaufende Ellipse, deren Hauptachse auf der Verbindenden von M' mit dem Ellipsenmittelpunkte senkrecht steht, deren Nebenachse also auf einem Durchmesser des Umrisses u' liegt. Aber nicht jede derartige Ellipse ist das Bild eines Kugelkreises; hierauf kommen wir in Nr. 90 zurück.

Die *Großkreise* der Kugel sind diejenigen, deren Ebenen durch die Kugelmitte M gehen. Sie haben alle M zur Mitte, und ihre Radien sind gleich dem der Kugel. Ihre Projektionen sind diejenigen Ellipsen, deren Hauptachsen Durchmesser des Umrisses u' sind.

Die *Höhenkreise* der Kugel sind die Schnitte der Kugel mit den Höhenebenen (Nr. 12). Ihre Bilder sind die in u' enthaltenen und zu u' konzentrischen Kreise Die Ebenen durch den höchsten und tiefsten Punkt der Kugel, d. h. durch den zur Tafel senkrechten Kugeldurchmesser, schneiden die Kugel in den sogenannten *Fallkreisen*. Der Name rührt daher, daß der durch einen Kugelpunkt P gehende Fallkreis die von P ausgehende Fallinie f der Tangentialebene von P enthalt (vgl. Fig. 130). Die Fallkreise sind daher die *Linien stärksten Gefälles auf der Kugel*. Sie schneiden die Höhenkreise senkrecht, und auch die Bilder der Fallkreise sind zu denen der Höhenkreise senkrecht, denn sie sind die Durchmesser des Umrisses u' Dies steht mit Nr. 18 im Einklang. Alle Fallkreise sind Großkreise

Jede zur Tafel senkrechte Ebene, deren Entfernung von der Kugelmitte geringer als der Kugelradius ist, schneidet die Kugel in einem Kreis, dessen Projektion eine Sehne des Umrisses u' ist Umgekehrt Jede Sehne von u' ist das Bild eines derartigen Kreises. Dabei ist die Sehne, aufgefaßt als Ellipse, eine doppelt zahlende Strecke (Nr. 72) Die Mittelpunkte aller Kugelkreise, deren Ebenen zur Tafel senkrecht sind, haben dieselbe Höhe wie die Kugelmitte. Ihre Durchmesser sind gleich den Sehnen von u', als die sie abgebildet werden. Zu diesen Kreisen gehoren insbesondere die Fallkreise.

Handelt es sich darum, *die Punkte X und Y zu ermitteln, in denen eine Gerade g die Kugel schneidet*, so benutzt man dasselbe Hilfsmittel wie beim Schnitt einer Geraden mit einer Ebene in Nr. 16. Die gesuchten Punkte X und Y liegen namlich als Punkte von g in jeder Ebene, die g enthalt. Deshalb wahlt man eine besonders geeignete *Hilfsebene* durch g aus, bringt sie mit der Kugel in einem Kreis k zum Schnitt und bestimmt, in welchen Punkten X und Y die Gerade g den Kreis k trifft. Dies Verfahren ist deshalb durchführbar, weil es unter den unendlich vielen Hilfsebenen eine gibt, deren Schnitt k mit der Kugel leicht zu finden ist, nämlich die projizierende Ebene von g. Sie schneidet die Kugel in einem derjenigen Kreise k, von denen zuletzt die Rede war. Die Gerade g sei durch die Projektionen und Höhen zweier ihrer Punkte A und B gegeben, die Kugel durch ihren Umriß u' und die

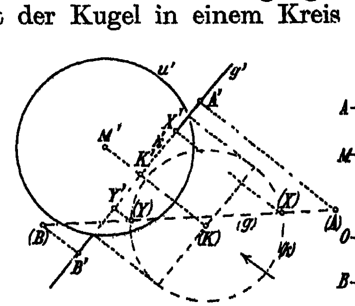


Fig 131

Höhe ihrer Mitte M, siehe Fig. 131. Die projizierende Ebene von g schneidet die Kugel in dem Kreis k, dessen Bild k' die auf g' gelegene

Sehne von u' ist. Da der Mittelpunkt K von k so hoch wie M liegt und der Durchmesser von k gleich der Sehne k' ist, kann man k in der Umlegung der Hilfsebene sofort als Kreis (k) zeichnen. Das Ergebnis in Fig. 131 zeigt, daß der Schnittpunkt X höher als M, der Schnittpunkt Y tiefer als M liegt (die Sehrichtung ist in der Umlegung noch durch den Pfeil besonders kenntlich gemacht). Ist die Kugel undurchsichtig, so ist also nur X zu sehen.

Wir kommen zu der Aufgabe, den Schnitt der Kugel mit irgendeiner Ebene zu ermitteln. Die Kugel sei wieder durch ihren Umriß und die Höhe ihres Mittelpunktes M gegeben, die schneidende Ebene etwa durch ihre Spurgerade s, ihren Pfeil (Nr. 21) und den spitzen Winkel α, den sie mit der Tafel bildet, siehe Fig. 132. Da es sich hier um die Abbildung des Schnittkreises handelt, wird die Aufgabe nach der in voriger Nummer gegebenen allgemeinen Anweisung gelöst, indem man den steilsten Durchmesser CD des Kreises durch Umlegen der projizierenden Ebene der Kreisachse ermittelt. Die Kreisachse ist das Lot von M auf die gegebene Ebene, so daß ihre projizierende Ebene das Lot von M' auf s als Spurgerade hat. In dieser projizierenden Ebene liegt ein Großkreis der Kugel, und der gesuchte Durchmesser CD muß eine Sehne dieses Großkreises sein. Daher ergibt sich CD ohne weiteres in der Umlegung $(C)(D)$, indem man auch diesen Großkreis in der Umlegung zeichnet Alsdann hat man sofort die Nebenachse $C'D'$ der Ellipse, daher auch ihre Hauptachse $A'B'$, weil sie gleich $(C)(D)$ ist Der Schnittkreis liegt entweder nur auf der oberen oder nur auf der unteren Kugelhälfte oder aber auf beiden. Um zu entscheiden, welcher Fall eintritt, stellt man fest, ob der Kreis Punkte mit dem zur Tafel parallelen Kugelkreis gemein hat. Diese Punkte müßten auf derjenigen Höhenlinie der Kreisebene liegen, deren Höhe gleich der Höhe der Kugelmitte M ist. Indem man in der Umlegung (Z) auf $(C)(D)$ durch die Parallele zu $C'D'$ durch (M) bestimmt und nach Z' zurückgeht, bekommt man die Projektion dieser Höhenlinie als die Parallele zu s durch Z'. In Fig. 132 schneidet sie den Umriß in X' und Y'. Tatsächlich hat der Schnittkreis in X und Y andere Tangenten als der zur Tafel parallele Großkreis, aber die Bildellipse berührt den Umriß in X' und Y'. Sonst nämlich würde sie ja den Umriß in X' und Y' überschreiten müssen, was sinnlos ist. Man kann es auch so erkennen: Die Tangentialebenen der Kugelpunkte X und Y sind zur Tafel senkrecht, infolgedessen haben alle Kugeltangenten in X dieselbe Projektion, ebenso alle in Y. Die Sehrichtung ist in der Umlegung durch den Pfeil gekennzeichnet. Man stellt dadurch fest, daß der Bogen XCY auf der oberen Kugelhälfte, der Bogen XDY auf der

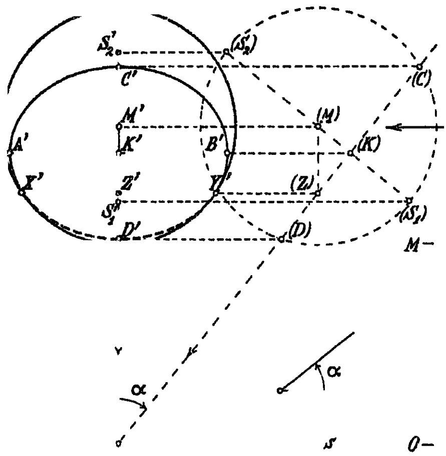


Fig 132.

unteren liegt. Das Ergebnis ist jedoch nicht immer so, denn (Z) kann unter Umständen außerhalb des umgelegten Großkreises liegen. Dann verlauft der Schnittkreis nur auf der oberen oder nur auf der unteren Kugelhälfte. Liegt (Z) gerade auf dem umgelegten Großkreis, also in (D), so fallen X' und Y' in D' zusammen, so daß alsdann der Umriß der Krummungskreis des Nebenscheitels D' der Ellipse ist (Nr. 80). In diesem besonderen Fall tritt nicht nur im Bilde, sondern auch in Wirklichkeit in D eine Beruhrung zwischen dem Schnittkreis und dem zur Tafel parallelen Großkreis ein.

Die umgelegte Kreisachse $(M)(K)$ liefert im Schnitt mit dem umgelegten Großkreis die Umlegungen der sphärischen Mittelpunkte S_1 und S_2 des Schnittkreises. So nennt man namlich diejenigen beiden einzigen Punkte der Kugel, die der Kreisachse angehören, aus dem Grunde, weil sie die einzigen Punkte der Kugel sind, die von allen Punkten des Schnittkreises gleiche Entfernungen haben. Man konnte den Schnittkreis auf der Kugel mittels des Zirkels beschreiben, indem man den einen Zirkelfuß in S_1 oder S_2 einsetzte.

90. Kennzeichen für die senkrechte Projektion eines Kugelkreises. Man kann die Bildellipse eines Kugelkreises k auch auf einem anderen Wege herstellen Hat die Ebene des Kreises k von der Kugelmitte M die Entfernung ϱ und ist r der Radius der Kugel, so ist $a = \sqrt{r^2 - \varrho^2}$ der Radius des Kreises k. Er kann alle Werte von 0 bis r annehmen. Wahlen wir demnach a beliebig zwischen 0 und r, so muß derjenige Durchmesser AB des Kreises k, der die Hauptachse $A'B'$ der Bildellipse liefert, eine Sehne der Kugel sein, die erstens die Lange $2a$ hat und zweitens zur Tafel parallel ist Eine derartige Sehne der Kugel hat als mittelsenkrechte Ebene eine durch die Kugelmitte M gehende und zur Tafel senkrechte Ebene. Daraus erhellt aufs neue, daß die Hauptachse $A'B'$ der Bildellipse so im Innern des Kugelumrisses u' liegt, daß ihre Mittelsenkrechte durch die Projektion M' der Kugelmitte geht.

Wir wahlen in Fig. 133 eine derartig gelegene Strecke $A'B' = 2a$ im Innern des Umrisses u'. Dann sind zwei und nur zwei zugehörige und zur Tafel parallele Sehnen AB der Kugel vorhanden, sie sind zueinander parallel, und die eine liegt ebensoviel höher als M wie die andere tiefer als M Es erhellt, daß, sobald man eine dieser beiden Sehnen ausgewahlt hat, der zu zeichnende Kugelkreis k vollstandig bestimmt ist Denn sein Mittelpunkt ist die Mitte K von AB und seine Achse die Gerade MK, demnach seine Ebene die in K auf MK senkrechte Ebene. Man erkennt, daß die beiden Kreise k, die zu den beiden noch moglichen Lagen der Sehne AB gehören, symmetrisch zur Höhenebene der Kugelmitte M liegen, so daß beide Kreise dieselbe Ellipse als Projektion haben. Deshalb ist es einerlei, welche der beiden Sehnen AB man sich gewahlt denkt; wir denken uns etwa die obere. Die Strecke MK ist der Abstand ϱ der Kreisebene von der Kugelmitte M. Bildet die Kreisebene mit der Tafel den Winkel α, so ist daher die Projektion $M'K' = \varrho \sin\alpha$. Die noch unbekannten Brennpunkte F_1, F_2 der Bild-

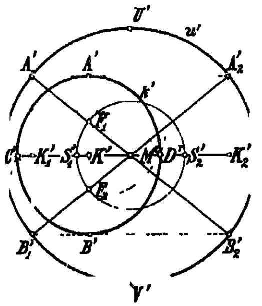


Fig. 133

ellipse haben nach Nr. 88 von der Ellipsenmitte K' den Abstand $a \sin\alpha$. Demnach ist

$$\frac{K'F_1}{M'K'} = \frac{a}{\varrho}.$$

Wenn man nun durch die Hauptscheitel A', B' die Parallelen zu $M'K'$ zieht, werden sie den Umriß u' in Punkten A_1', B_1' und A_2', B_2' derart schneiden, daß die Sehnen $A_1'B_1'$ und $A_2'B_2'$ des Umrisses u' parallel und gleich $A'B'$ werden. Die Mitte von $A_1'B_1'$ sei mit K_1' und die von $A_2'B_2'$ mit K_2' bezeichnet. Da $K_1'A_1' = a$ ist, wird $M'K_1' = \varrho$ sein, denn es ist ja $a^2 + \varrho^2 = r^2$ und $M'A_1' = r$. Folglich ist

$$\frac{K_1'A_1'}{M'K_1'} = \frac{a}{\varrho}.$$

Die Vergleichung mit der vorhergehenden Formel lehrt: Der Brennpunkt F_1 der Bildellipse liegt auf dem Durchmesser $A_1'B_2'$ des Umrisses u'. Ebenso ergibt sich, daß der Brennpunkt F_2 auf dem Durchmesser $B_1'A_2'$ liegt.

Mithin kennen wir die beiden Brennpunkte F_1 und F_2. Indem wir um F_1 und F_2 mit dem Radius a die Kreise schlagen, erhalten wir also in ihren Schnittpunkten die Nebenscheitel C' und D' der Bildellipse (Nr. 75), die wir somit jetzt vollständig zeichnen können.

Die sphärischen Mittelpunkte S_1 und S_2 des Kreises k sind die Endpunkte desjenigen Kugeldurchmessers, der durch die Kreismitte K geht, und da dieser Durchmesser mit der Tafel den Komplementwinkel von α bildet, sind die Projektionen $M'S_1'$ und $M'S_2'$ gleich $r \sin\alpha$. Andererseits ist, wie wir sahen, $M'K' = \varrho \sin\alpha$ und $K'F_1 = a \sin\alpha$, demnach $M'F_1^2 = (\varrho^2 + a^2) \sin^2\alpha$ oder $r^2 \sin^2\alpha$, folglich $M'F_1 = M'S_1' = M'S_2'$. Dies besagt, daß S_1' und S_2' auf dem zum Umriß u' konzentrischen Kreis durch die beiden Brennpunkte F_1 und F_2 liegen. Zusammengefaßt:

Die senkrechte Projektion eines Kugelkreises k ist eine Ellipse, deren Nebenachse auf einem Durchmesser des Kugelumrisses u' liegt, während ihre Hauptachse $A'B'$ eine beliebige Länge kleiner als der Kugeldurchmesser haben kann. Ist Länge und Lage der Hauptachse dementsprechend angenommen worden, so ist die Ellipse vollständig bestimmt, denn ihre Brennpunkte F_1 und F_2 liegen auf zwei bestimmten Durchmessern des Umrisses. Diese Durchmesser ergeben sich, indem man durch A' und B' die Senkrechten zur Hauptachse zieht, sie in A_1' und A_2' bzw. B_1' und B_2' mit dem Umriß u' zum Schnitt bringt und dann die Durchmesser $A_1'B_2'$ und $A_2'B_1'$ des Umrisses zeichnet. Die Projektionen der sphärischen Mittelpunkte S_1 und S_2 des Kugelkreises liegen auf dem mit dem Kugelumriß u' konzentrischen Kreis durch die beiden Brennpunkte F_1 und F_2.

Wenn man insbesondere $A_1'B_1'$ oder $A_2'B_2'$ als Hauptachse der Bildellipse wählt, erhellt hiernach, daß die Brennpunkte dieser Ellipse in den Endpunkten A_1', B_1' bzw. A_2', B_2' der Hauptachse liegen, d. h. daß diese Ellipse nur die (doppeltzählende) Strecke $A_1'B_1'$ bzw. $A_2'B_2'$ selbst ist (Nr. 76). In der Tat sind $A_1'B_1'$ und $A_2'B_2'$ die Bilder zweier Kugelkreise vom Radius a, deren Ebenen zur Tafel senkrecht sind. Nun

bezeichne UV den zum Durchmesser AB des Kugelkreises k parallelen Durchmesser der Kugel Er ist zur Tafel parallel. Wenn man die Kugel um diesen Durchmesser UV dreht, wird sich der Kugelkreis k ebenfalls um UV herum drehen, und dabei wird seine Ebene zweimal zur Tafel senkrecht In diesen Lagen sind die (doppeltzahlenden) Strecken $A_1'B_1'$ und $A_2'B_2'$ die Kreisbilder Während der Drehung bewegen sich die Brennpunkte F_1 und F_2 der Bildellipse von k beständig auf den beiden Durchmessern $A_1'B_2'$ und $A_2'B_1'$ des Kugelumrisses, d. h.. Dreht sich die Kugel um den zur Tafel und zur Ebene eines Kugelkreises k parallelen Durchmesser UV, so beschreiben die Brennpunkte der Bildellipse des Kreises k zwei Durchmesser des Kugelumrisses. In Fig 134 sind mehrere Lagen des sich um UV drehenden Kugelkreises nebst den geradlinigen Orten der Brennpunkte ihrer Bildellipse dargestellt

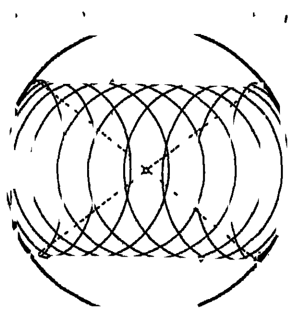


Fig 134

Wenn man dagegen die Ebene des Kreises k parallel mit sich verschiebt, ändert sich sein Radius a, aber seine sphärischen Mittelpunkte S_1 und S_2 bleiben in Ruhe, denn sie sind die Endpunkte des zur Kreisebene senkrechten Kugeldurchmessers. Da nun F_1 und F_2 auf dem zum Umriß konzentrischen Kreis durch S_1' und S_2' liegen, folgt Parallele Ebenen schneiden die Kugel in Kreisen, deren bei senkrechter Projektion hervorgehende Bildellipsen ihre Brennpunkte samtlich auf einem zum Kugelumriß konzentrischen Kreis haben. Insbesondere wird die Bildellipse bloß ein Punkt, sobald die Ebene die Kugel berührt Diese Punkte sind die Projektionen S_1', S_2' der gemeinsamen sphärischen Mittelpunkte aller jener Kreise

91. Zentrische Durchbohrung der Kugel. Angenommen, parallel zu einem Durchmesser g eines Kreises seien zwei Sekanten in gleichen Abständen gezogen Dreht man die Figur um den Durchmesser g, so erzeugt der Kreis eine Kugel, während das Sekantenpaar einen Rotationszylinder mit dem Durchmesser g als Achse beschreibt Die vier Schnittpunkte der Sekanten mit dem Kreis beschreiben zwei gleich große Kreise Dies sind die Linien, in denen der Rotationszylinder die Kugel durchbohrt. Die Durchbohrung soll zentrisch heißen, weil sie durch einen Rotationszylinder, dessen Achse g durch die Kugelmitte geht, erzeugt wird.

Da man die Tafel durch die Höhenebene der Kugelmitte M ersetzen darf (Nr. 12), können wir ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß diese Mitte auf der Tafel selbst liege, so daß die Kugel die Tafel in dem Großkreis u schneidet, siehe Fig. 135. Die Achse g der zentrischen Durchbohrung habe eine beliebige Neigung gegenüber der Tafel. Man kann sie dadurch geben, daß man die Projektion eines der beiden Punkte S_1 und S_2, in denen die Achse die Kugel trifft, irgendwo innerhalb u wählt. Dann ist die des anderen Punktes ebensoweit jenseits von M gelegen. Die Durchbohrungskreise liegen in parallelen Ebenen senkrecht zu g; somit sind S_1 und S_2 ihre sphärischen Mittel-

punkte. Die Radien der Durchbohrungskreise sind gleich dem Radius a des Zylinders, der beliebig, aber kleiner als der Radius der Kugel gewählt werden kann. Da nun die Hauptachsen der Ellipsen, als die sich die Kreise darstellen, gleich $2a$ sind, liegen die Hauptscheitel der Ellipsen auf den Parallelen zu g' im Abstand a. Diese Geraden mögen u in A_1, A_2 und B_1, B_2 treffen. Nach den Ergebnissen der letzten Nummer kennen wir nun zwei geometrische Orte der Brennpunkte der Ellipsen, nämlich einerseits die Durchmesser A_1B_2 und A_2B_1 des Kreises u und andererseits den Kreis um M, der durch S_1' und S_2' geht. Folglich sind die Brennpunkte bekannt, demnach auch die Haupt- und Nebenachsen.

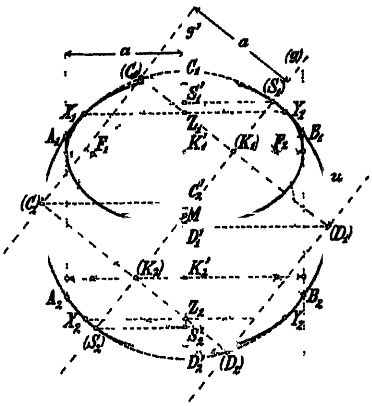


Fig 135

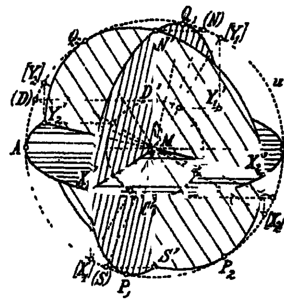
Eine andere Art, die Aufgabe zu lösen, ist ebenfalls in Fig. 135 angegeben. Sie beruht auf der Umlegung der projizierenden Ebene der Zylinderachse g. Diese Ebene enthält einen Großkreis der Kugel und diejenigen Durchmesser der beiden Durchbohrungskreise, die die Nebenachsen der Bildellipsen liefern. Diese Durchmesser sind die beiden zu g senkrechten Sehnen des Großkreises von der vorgeschriebenen Länge $2a$. Man bekommt demnach die Umlegungen $(C_1)(D_1)$ und $(C_2)(D_2)$ dieser beiden Durchmesser als Sehnen des Umrißkreises u. Alles weitere ist von selbst klar. Noch sei bemerkt: Die Duchmesser C_1D_1 und C_2D_2 schneiden die Tafel in den mit Z_1 und Z_2 bezeichneten Punkten, so daß die Lote zu g' durch Z_1 und Z_2 die Spurgeraden der beiden Kreisebenen sind und also auf u diejenigen Punkte X_1, Y_1 und X_2, Y_2 bestimmen, in denen die Bildellipsen den Umriß u berühren (vgl. auch Fig. 132 von Nr. 89). Bei anderen Annahmen kann es eintreten, daß Z_1 und Z_2 außerhalb u liegen, so daß dann die Bildellipsen gar nicht bis an u herankommen

92. Hauptschnitte und Gradnetz der Kugel. Drei zueinander senkrechte Ebenen durch die Kugelmitte zerlegen die Kugelfläche in acht rechtwinklige und gleichseitige sphärische Dreiecke, die Oktanten der Kugel. Solche drei Schnitte zusammen nennen wir Hauptschnitte der Kugel. Die Durchmesser, die je zwei der drei Schnitt-Großkreise gemein haben, bilden ein rechtwinkliges Achsenkreuz.

Stellt man sich die Kugel als die Erdkugel vor, so bildet der Äquator zusammen mit dem Längen- oder Meridiankreis von 0° und dem von 90° Hauptschnitte. Indem wir diese Vorstellung beibehalten, nennen wir die gemeinsamen Punkte der beiden Längenkreise den Nordpol N und Südpol S, die Gerade NS die Erdachse. Die Zeichnung der Hauptschnitte soll nun in dem allgemeinen Fall durchgeführt werden, wo die Achse NS eine beliebige Neigung zur Tafel hat. Die Fälle, wo sie zur Tafel parallel oder senkrecht ist, sind augenscheinlich ohne weiteres zu erledigen. Wie in voriger Nummer ist es bequem, anzunehmen, daß die Kugelmitte M auf der Tafel liege, die Kugel also die Tafel in einem

Großkreis u schneide. Diese Annahme beeinträchtigt keineswegs die Allgemeinheit der Betrachtung.

Die Projektion N' des Nordpols werde irgendwo im Innern des Umrisses u angenommen, siehe Fig. 136. Da zu N' zwei Kugelpunkte gehören, wollen wir als Nordpol N etwa den oberhalb der Tafel gelegenen wählen. Dann liegt der Südpol unterhalb der Tafel, und die Kugelmitte M ist die Mitte von $N'S'$. Wie stark die Achse NS zur Tafel geneigt ist, erkennt man durch Umlegen ihrer projizierenden Ebene, wobei N und S in Punkte (N) und (S) von u übergehen. In dieser projizierenden Ebene liegt der steilste Durchmesser CD des Äquators, und da CD zu NS senkrecht ist, bekommt man die Umlegung $(C)(D)$ als den zu $(N)(S)$ senkrechten Durchmesser von u. Die Projektion $C'D'$ ist also die Nebenachse der Äquatorellipse, während ihre Hauptachse der zu $N'S'$ senkrechte Durchmesser AB von u ist. Nun hat man in der Äquatorebene irgend zwei zueinander senkrechte Durchmesser X_1Y_1 und X_2Y_2 zu ziehen. Ihre Projektionen werden konjugierte Durchmesser der Äquatorellipse sein (Nr. 72). Man bekommt sie genau, ohne die Zeichnung dieser Ellipse zu gebrauchen, indem man die Äquatorebene zunächst um ihre Spurgerade AB in die Tafel umlegt. Denn da der Äquator dann in u übergeht, wird man irgend zwei zueinander senkrechte Durchmesser $[X_1][Y_1]$ und $[X_2][Y_2]$ des Kreises u wählen und sie zurückübertragen in die Projektionen $X_1'Y_1'$ und $X_2'Y_2'$. Dies geschieht, indem man auch den zu u konzentrischen Kreis durch C' und D' benutzt (vgl. Fig. 104 von Nr. 73). Die beiden noch zu zeichnenden Längenkreise stellen sich als Ellipsen dar, denen die konjugierten Durchmesserpaare $X_1'Y_1'$ und $N'S'$ bzw. $X_2'Y_2'$ und $N'S'$ zukommen. Man kann sie aber bequemer finden. Denn die Ebene des ersten Längenkreises steht auf X_2Y_2, die des zweiten auf X_1Y_1 senkrecht. Folglich ist die Hauptachse der ersten Ellipse der zu $X_2'Y_2'$ senkrechte Durchmesser P_1Q_1, die der zweiten der zu $X_1'Y_1'$ senkrechte Durchmesser P_2Q_2 des Kreises u, und da man außerdem weiß, daß die erste Ellipse durch N', S', X_1', Y_1', die zweite durch N', S', X_2', Y_2' geht, kann man ihre Nebenachse nach Nr. 83 auf mehrere Arten ermitteln.


Fig. 136

Will man das Gradnetz der Erdkugel haben, etwa von 10 zu 10 Grad, so dreht man zunächst den rechten Winkel $[X_1]M[X_2]$ Schritt für Schritt um 10 Grad und verfährt für jede Lage so wie vorhin. Auf diese Art gehen die Bilder der Längenkreise hervor. Ferner liegen die steilsten Durchmesser der Breitenkreise in der projizierenden Ebene der Erdachse, die schon zu Anfang umgelegt wurde. Danach teilt man den Umriß u von (N) an in je 10 Grad und zieht durch die Teilpunkte die zu $(N)(S)$ senkrechten Sehnen. Die Projektionen dieser Sehnen sind die Nebenachsen derjenigen Ellipsen, als die sich die Breitenkreise darstellen. Alle diese Ellipsen sind zur Äquatorellipse ähnlich und ähnlich gelegen. Ihre Brennpunkte befinden sich auf dem mit dem Umriß konzentrischen Kreis durch N' und S', weil die Pole die sphärischen Mittelpunkte der Breitenkreise sind (Nr. 90).

Die drei Strecken von M nach N', X_1', X_2' sind die Projektionen dreier zueinander senkrechter gleichlanger Strecken. Nach dem soeben Gesagten ist MN' gleich dem Abstand der Brennpunkte der Äquatorellipse von der Mitte, während MX_1', MX_2' konjugierte Halbmesser dieser Ellipse sind. Mithin folgt: Man kann, um irgendeine senkrechte Projektion eines rechtwinkligen Achsenkreuzes mit gleichlangen Achsen von der Länge w zu bekommen, als Richtungen der Achsen im Bilde die Richtungen zweier konjugierter Halbmesser und die Richtung der Nebenachse einer Ellipse von der Hauptachse $2w$ benutzen. Dann sind die Längen der Achsen im Bilde gleich den beiden konjugierten Halbmessern und dem Abstand der Brennpunkte von der Mitte.

Anmerkung. Dies ist ein Satz von Karl Pohlke (Nr 62), mitgeteilt zuerst von Herm Amandus Schwarz (geb. 1843 zu Hermsdorf, Professor der Mathematik in Göttingen und Berlin) in der Abhandlung „Elementarer Beweis des Pohlkeschen Fundamentalsatzes der Axonometrie“, Journ f d r u ang Math 63 Bd 1864, S 309—314, insbes. S. 314 (auch in seinen „Gesammelten mathematischen Abhandlungen“, 2 Bd Berlin 1890, S 1—7, insbes S 7), dann auch von Pohlke selbst in seiner „Darstellenden Geometrie“, 2 Abt, Berlin 1876, S 75. Zum Titel der Abhandlung von Schwarz ist zu bemerken, daß der Pohlkesche Fundamentalsatz, der darin vorkommt, ein wichtigerer Satz ist, der uns im zweiten Kapitel beschäftigen wird.

93. Schnitt zweier Kugeln. Treffen sich zwei Kugeln überhaupt, so haben sie einen Kreis gemein, dessen Achse die Zentrale, d. h. Verbindende der Mitten M_1 und M_2 der Kugeln, ist. Nach Nr. 12 hat der Schnittkreis eine ganz bestimmte Projektion, wenn außer den Umrissen der Kugeln bloß der Höhenunterschied h der Kugelmitten gegeben wird, siehe Fig. 137. Der steilste Durchmesser CD des Schnittkreises liegt in der projizierenden Ebene der Zentralen M_1M_2. Diese Ebene wird man also etwa um ihre durch M_1 gehende Höhenlinie umlegen, bis sie zur Tafel parallel liegt. In der Umlegung ergibt sich $(C)(D)$ als Sehne der beiden in der projizierenden Ebene enthaltenen und umgelegten Großkreise der Kugel. Die Projektion $C'D'$ ist die Nebenachse der Bildellipse, die Hauptachse $A'B'$ ist so lang wie $(C)(D)$. Nach Nr 89, Fig 132, ergeben sich mittels der Umlegung auch diejenigen Punkte, in denen die Bildellipse an die Kugelumrisse herankommen kann. In Fig 137 berührt die Ellipse nur den Umriß der zweiten Kugel, und zwar in X' und Y'. Der Schnittkreis liegt ganz auf der oberen Hälfte der ersten Kugel, ist aber doch nur längs des Bogens XCY sichtbar, weil der Bogen XDY auf der unteren Hälfte der zweiten Kugel liegt. Deshalb ist auch der Umriß der zweiten Kugel nur zum Teil sichtbar. Das Ergebnis kann aber bezüglich der Sichtbarkeit auch anders ausfallen.

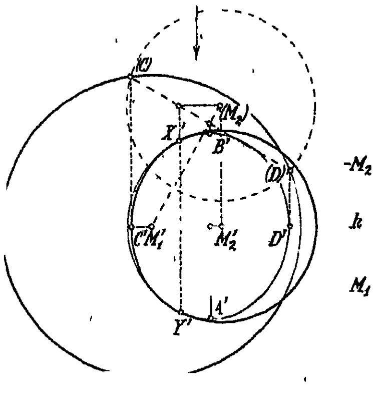


Fig 137

Bildet die Ebene des Schnittkreises mit der Tafel den Winkel α und ist a der Radius des Schnittkreises, so haben die Brennpunkte F_1 und F_2 der Bildellipse von der Ellipsenmitte K' die Entfernung $a \sin\alpha$ (Nr. 88), also ist $K'F_1 : K'A' = \sin\alpha$. Die Parallele zu $M_1'M_2'$ durch A' treffe die

Umrisse der Kugeln in A_1 und A_2, siehe Fig. 138. Dann ist $M_1''F_1 : M_1''A_1 = \sin\alpha$ und $M_2''F_1 : M_2''A_2 = \sin\alpha$. Sind r_1 und r_2 die Kugelradien, so folgt daraus $M_1''F_1 = r_1 \sin\alpha$, $M_2''F_1 = r_2 \sin\alpha$. Deshalb kann man das Bild des Schnittkreises auch so ermitteln In M_1'' und M_2'' errichtet man auf $M_1''M_2''$ Lote gleich dem Höhenunterschied h der beiden Kugelmitten und verbindet den einen Endpunkt mit M_2'', den anderen mit M_1''. Die erste Verbindende schneide den zweiten Umriß in P_2, die zweite den ersten Umriß in P_1. Die Lote von P_1 und P_2 auf $M_1''M_2''$ mögen die Fußpunkte Q_1 und Q_2 haben. Nun ist $\sphericalangle Q_1M_1''P_1$ und $\sphericalangle Q_2M_2''P_2$ gleich dem Neigungswinkel der Zentralen M_1M_2 zur Tafel, also gleich dem Komplement von α, daher $M_1''Q_1 = M_1''P_1 \sin\alpha = r_1 \sin\alpha$ und $M_2''Q_2 = r_2 \sin\alpha$. Mithin sind die Brennpunkte F_1 und F_2 die Schnittpunkte der Kreise um M_1'' und M_2'' mit den Radien $M_1''Q_1$ und $M_2''Q_2$. Nach Nr. 90 ergibt sich weiterhin: Bringt man $M_1''F_1$ in A_1 und $M_2''F_1$ in A_2 mit dem ersten bzw. zweiten Kugelumriß zum Schnitt, so ist A_1A_2 zu $M_1''M'$ parallel, und auf dieser Geraden liegt der eine Hauptscheitel A' der Ellipse, so daß sich alles übrige finden laßt. In Fig 138 ist der Schnittkreis vollständig unsichtbar, wenn die Kugeln undurchsichtig sind

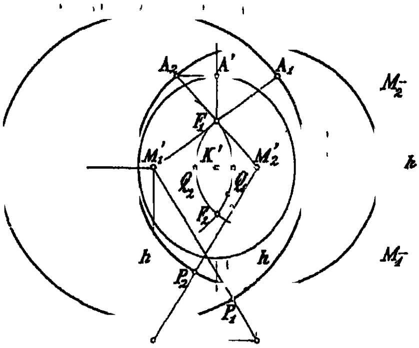


Fig 138

94. Rotationszylinder und Rotationskegel. Die senkrechte Projektion eines Rotationszylinders braucht nur in aller Kurze besprochen zu werden. Ist namlich die eines Kreises hergestellt worden, so sind die Projektionen der Mantellinien des Zylinders diejenigen Geraden, die von den Punkten der Bildellipse ausgehen und zur Nebenachse parallel sind. Der Umriß des unbegrenzten Zylinders besteht daher aus den beiden Parallelen zur Nebenachse durch die Hauptscheitel Die Breite dieses Umrisses ist gleich dem wahren Durchmesser des Rotationszylinders Man kann den Zylinder durch zwei Kreise abgrenzen. Der eine stellt sich als die schon gezeichnete Ellipse dar, der andere als eine kongruente Ellipse, die durch Verschiebung längs der Nebenachse hervorgeht.

Von einem durch einen Grundkreis begrenzt gedachten Rotationskegel sei die wahre Gestalt und Größe eines Axialschnittes gegeben, also ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze S, siehe das geschraffte Dreieck in Fig. 139. Ferner sei die Projektion und Höhe der Kegelspitze S, die Projektion der Kegelachse a sowie der Winkel γ gegeben, den die Achse mit der Tafel bildet. Um alsdann das Bild des Grundkreises als Ellipse zu gewinnen, geht man nach Nr. 88 darauf aus, den steilsten Durchmesser CD des Kreises zu ermitteln. Da a die Achse des Kreises ist, legt man also nach der damals gegebenen Anweisung die projizierende Ebene von a in die Tafel um. Auf der umgelegten Achse (a) liegt die Höhe des mit dem gegebenen Axialschnitt kongruenten Dreiecks $(S)(C)(D)$, woraus sich alles übrige in bekannter Weise ergibt. Die Mantellinien des Kegels stellen sich als die Geraden von S' nach

len Punkten der Ellipse dar. Der Umriß des unbegrenzt gedachten Rotationskegels wird daher von den von S' ausgehenden Tangenten x' und y' der Ellipse gebildet. Man kann sie, ohne die Ellipse gezeichnet zu haben, nach Nr. 78 finden. Bequemer aber ist es, davon Gebrauch zu machen, daß es eine dem Kegel eingeschriebene Kugel gibt, die den Kegel langs des Grundkreises berührt. Der Schnitt dieser Kugel mit der projizierenden Ebene der Achse a ist in der Umlegung der Kreis, der $(S)(C)$ und $(S)(D)$ in (C) und (D) berührt. Die Mantellinien des Kegels sind die von S an die Kugel gehenden Tangenten, d. h. jetzt wird der Kegel aufgefaßt als der Tangentialkegel der Kugel mit der Spitze S. Nun erhellt nach Nr. 89, Fig. 132, ohne weiteres die Konstruktion der Punkte X' und Y' in Fig. 139. Sie sind nämlich die Projektionen derjenigen Punkte des Kugelkreises, deren Tangentialebenen auf der Tafel senkrecht stehen, so daß der Kegel längs der Mantellinien SX und SY oder x und y zur Tafel senkrechte Tangentialebenen hat, also x' und y' den Umriß darstellen. Obgleich x' und y' die Ellipse in X' und Y' berühren, sind die Mantellinien x und y in Wahrheit keine Tangenten des Grundkreises. Die Berührung im Bilde kommt nur dadurch zustande, daß die Tangenten des Grundkreises in X und Y mit den außersten Mantellinien x und y in zur Tafel senkrechten Ebenen liegen. Will man die Gestalt des Kegels deutlicher hervortreten lassen, so zieht man auf ihm eine Reihe von Mantellinien, die nach gleichweit voneinander entfernten Punkten des Grundkreises gehen. Zu diesem Zwecke teilt man den Grundkreis, nachdem man ihn um seinen zur Tafel parallelen Durchmesser so gedreht hat, daß er zur Tafel parallel liegt, also als Kreis erscheint, in gleiche Teile und geht dann zurück (vgl. Fig. 129 von Nr 88)

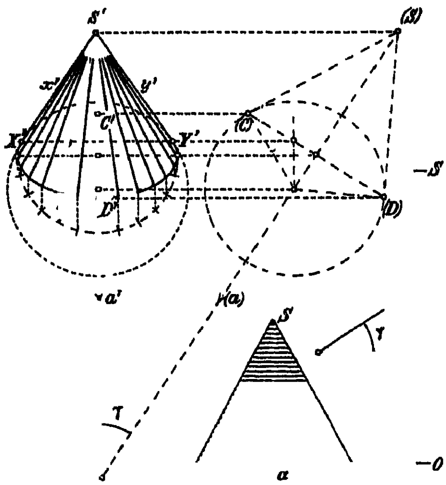


Fig 139

Der vorhin benutzte Gedanke, einen Rotationskegel als Tangentialkegel einer Kugel aufzufassen, d. h. die Tangentialebenen des Rotationskegels als diejenigen Tangentialebenen einer Kugel zu erzeugen, die von einem Punkte S ausgehen, wird sich auch bei anderen Aufgaben spater als fruchtbar erweisen, weshalb wir hier ausdrücklich darauf aufmerksam machen.

Der Umriß des durch den Grundkreis begrenzt gedachten Rotationskegels besteht aus den beiden Strecken $S'X'$, $S'Y'$ und einem Teil $X'D'Y'$ der Ellipse. Aber er ist nicht immer so beschaffen. Liegt nämlich S' im Innern der Ellipse, so gehen von S' nach allen Richtungen der Tafel die Bilder der Mantellinien des Kegels, so daß es keine äußersten Mantellinien gibt. Der Umriß des durch den Grundkreis begrenzten Kegels ist dann die Ellipse selbst in ihrem ganzen

Umfange. In diesem Fall empfiehlt es sich besonders, die Zeichnung des Kegels durch Schraffen in der Richtung der Mantellinien kenntlicher zu machen, indem man den Grundkreis in gleiche Teile teilt, die selbstredend in der Zeichnung verschieden groß erscheinen werden. In Fig. 140 ist ein und derselbe hohle Rotationskegel in verschiedenen Lagen dargestellt. Im Fall c liegt S' auf der Ellipse. Dies ist der Übergangsfall von Kegeln ohne äußerste Mantellinien zu denen mit äußersten Mantellinien.

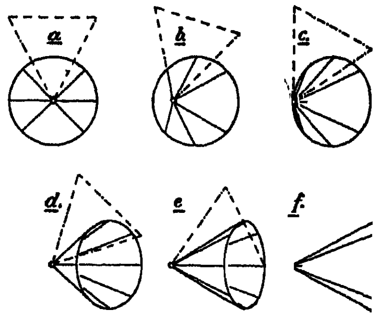


Fig 140

95. Konische Räder. Eine Drehung um eine Achse heißt gleichförmig, wenn in gleichen Zeiten gleiche Winkel zurückgelegt werden Als Maß der Geschwindigkeit dient dabei der Winkel, der in der Zeiteinheit beschrieben wird, dies ist die Winkelgeschwindigkeit der Drehung.

Sind g_1 und g_2 einander in einem Punkt S schneidende Achsen, so kann man eine gleichformige Drehung um g_1 mit der Winkelgeschwindigkeit v_1 als eine gleichförmige Drehung um g_2 mit der Winkelgeschwindigkeit v_2 dadurch fortpflanzen, daß man konische Rader, d h Rader, die aus geraden Kreiskegeln ausgeschnitten werden, auf den Achsen g_1 und g_2 anbringt, indem sie sich längs einer Mantellinie beruhren, so daß sich die Drehung des einen Rades durch die Reibung oder durch eine Verzahnung auf das andere Rad ubertragt. Zunächst handelt es sich, wenn die beiden Winkelgeschwindigkeiten v_1 und v_2 vorgeschrieben sind, um die Ermittlung der Ausmessungen der beiden Rotationskegel. Ihre Achsen sind g_1 und g_2, ihre gemeinsame Spitze ist der Schnittpunkt S von g_1 und g_2, und die Ebene von g_1 und g_2 enthalt von jedem Kegel einen Axialschnitt. Damit sich die Kegel berühren, müssen beide Axialschnitte eine Mantellinie gemein haben. Laßt man diese Mantellinie in irgendeinem Punkt P enden, so sind die Lote PK_1 und PK_2 von P auf g_1 und g_2 die Radien r_1 und r_2 der Grundkreise beider Kegel. Offenbar verhalten sich die Winkelgeschwindigkeiten umgekehrt wie die Radien. Man muß daher P in der Ebene von g_1 und g_2 so wahlen, daß die Abstände r_1 und r_2 dieses Punktes P von g_1 und g_2 die Proportion $r_1 : r_2 = v_2 : v_1$ befriedigen.

In Fig. 141 sind die Spurpunkte G_1, G_2 der Achsen g_1, g_2 gegeben. Ferner ist der Schnittpunkt S der Achsen durch seine Projektion und Höhe gegeben. Den wahren Winkel der Achsen findet man dann durch Umlegen ihrer Ebene um ihre Spurgerade G_1G_2 oder s. Hat man den umgelegten Punkt (S) nach Nr. 13 ermittelt, also auch die umgelegten Geraden (g_1) und (g_2), so ist (P) so zu wahlen, daß sich die Abstande $(P)(K_1)$ und $(P)(K_2)$ dieses Punktes von (g_1) und (g_2) umgekehrt verhalten wie die vorgeschriebenen Geschwindigkeiten. (In Fig. 141 ist $v_1 : v_2 = 2 : 3$ angenommen worden.) Indem man die Umlegung rückwärts ausführt, bekommt man die Projektionen P', K_1', K_2' der Punkte P, K_1, K_2. Die Grundkreise der Kegel sind diejenigen Kreise um die Punkte K_1 und K_2, die P bei den Drehungen um g_1 und g_2 beschreibt.

Die Radien der Kreise sind aus der Umlegung bekannt. Die Bildellipsen haben Hauptachsen gleich den wahren Durchmessern, und diese Hauptachsen sind zu g_1' und g_2' senkrecht Da man ferner den gemeinsamen Punkt P' beider Ellipsen kennt, vermag man nach Nr 83 ihre Nebenachsen zu bestimmen. Die gemeinsame Tangente der beiden Kreise in P ist zur Ebene der Achsen senkrecht, d. h die gemeinsame Tangente der beiden Ellipsen in P' ist zur Spurgeraden s senkrecht. Hat man die Zeichnungen der Kegel hergestellt, so schneidet man die konischen Räder aus, indem man außer P noch einen zweiten Punkt auf SP wahlt und durch ihn die zu den Achsen senkrechten Ebenen legt. Sie liefern zwei Kreise, die sich im Bilde als Ellipsen darstellen, ähnlich und ähnlich gelegen zu den beiden schon ermittelten Ellipsen

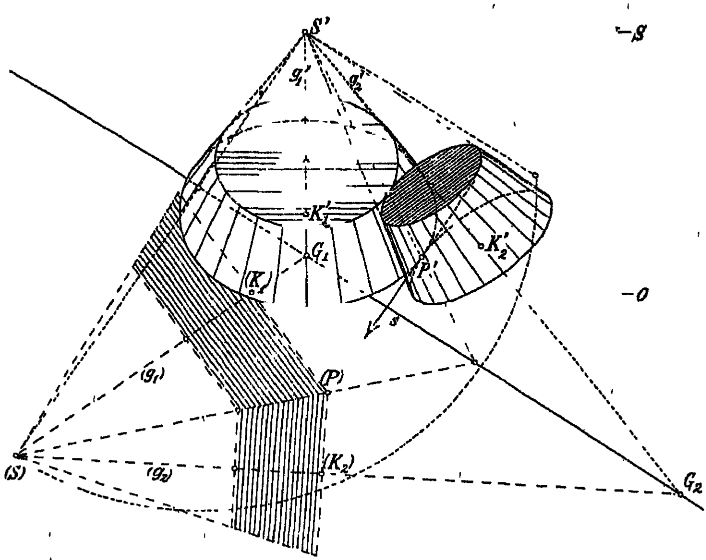


Fig 141

96. Parallelogramm als senkrechte Projektion eines Quadrats. Nach Nr 85 ist ein beliebig gegebenes Parallelogramm $A'B'C'D'$ stets die senkrechte Projektion eines Quadrats $ABCD$. Anders gesagt· Das auf dem Parallelogramm $A'B'C'D'$ senkrecht aufstehende Prisma kann stets in einem Quadrat geschnitten werden. Sobald eine Ebene das Prisma in einem Quadrat schneidet, gilt dasselbe für jede parallele Ebene. Deshalb kann man eine Ecke A des Quadrats beliebig hoch über A' annehmen; dann besteht die Aufgabe darin, die Höhen der drei anderen Eckpunkte B, C, D zu ermitteln Dies tun wir, indem wir das Netz des Prismas herstellen

Der dem Quadrat einzuschreibende Kreis projiziert sich als die Ellipse, für die die Mittellinien des Parallelogramms $A'B'C'D'$ konjugierte Durchmesser sind. Indem man nach Nr 85 die Achsen dieser Ellipse bestimmt, bekommt man zugleich den Durchmesser des Kreises, weil er gleich der Hauptachse $2a$ der Ellipse ist, und damit auch die Kantenlange des Quadrats, die ja gerade so groß ist. Um nun in Fig. 142 das Netz des Prismas zu zeichnen, setzt man die Parallelogrammseiten $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ geradlinig aneinander und errichtet in ihren Endpunkten die fünf Lote Auf den in den beiden Punkten A' errichteten Loten kann man wie gesagt die Höhe von A beliebig (aber selbstverstandlich gleich) wahlen. Nun hat man von A aus die Strecke $2a$ bis zu einem

Punkt B auf dem in B' errichteten Lot, dann von B aus bis zu einem Punkt C auf dem in C' errichteten Lot usw. einzutragen. So geht eine gebrochene Linie $ABCDA$ hervor, die in dem zweiten Punkt A enden muß Aber bei dem jedesmaligen Eintragen der Strecke $2a$ in die Streifen sind zwei Möglichkeiten vorhanden Um nun den richtigen Weg einzuschlagen, muß man beachten, daß die Hauptachse der Ellipse die Projektion des zur Tafel parallelen Kreisdurchmessers ist Man darf annehmen, daß A etwa tiefer als dieser Durchmesser liegt Wegen der Lage der Punkte A', B', C', D' gegenüber der Hauptachse der Ellipse in der ursprünglichen Zeichnung erhellt, daß B dann noch tiefer, dagegen C höher als jener Kreisdurchmesser liegt, und daß D die höchste Ecke des Quadrats ist Dementsprechend trägt man die Strecke $2a$ in die Streifen des Netzes nach der einen oder anderen Seite hin ein Man könnte auch annehmen, daß A höher als jener Kreisdurchmesser läge Dann verhält es sich überall gerade umgekehrt, so daß sich die gestrichelte Linie ergibt Die Aufgabe hat demnach zwei wesentlich verschiedene Lösungen Durch Ansetzen des Parallelogramms und des Quadrats vervollständigt man schließlich das Netz des Prismas

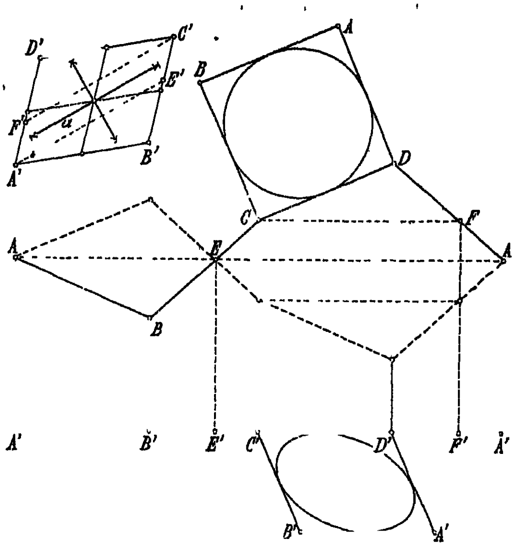


Fig 142

Die Ermittlung der Punkte B, C, D im Netz wird nicht scharf genug, wenn eine Parallelogrammseite nur um ein geringes kürzer als die Quadratseite ist Zur Verschärfung kann man dann noch andere Punkte der gebrochenen Linie ermitteln Zieht man nämlich in der ursprünglichen Figur z B die durch A' gehende Parallele zur Hauptachse, d h die Projektion der durch A gehenden Höhenlinie der Quadratebene, so wird sie $B'C'$ in einem Punkt E' schneiden Der zugehörige Punkt E auf BC hat daher dieselbe Höhe wie A, d h er muß im Netz auf der die beiden Punkte A verbindenden Geraden liegen Indem man ferner $B'E'$ im Netz auf $B'C'$ einträgt und in E' das Lot darauf errichtet, bekommt man einen zweiten geometrischen Ort für E. Somit wird E ganz genau bestimmt, und die Kante BC des Netzes muß durch E gehen Ebenso kann man sich des gerade so hoch wie C gelegenen Hilfspunktes F bedienen.

97. Dreieck als senkrechte Projektion eines Dreiecks von gegebener Gestalt. Gegeben sei ein Dreieck $A'B'E'$ als senkrechte Projektion eines noch gesuchten Dreiecks ABE. Vom gesuchten Dreieck ABE werde verlangt, daß es einem gezeichnet vorliegenden Dreieck 𝔄𝔅𝔈 ähnlich sei Daß dieser Forderung genügt werden kann,

ergibt sich durch Zurückführung der Aufgabe auf die in der letzten Nummer behandelte:

Über 𝔄𝔅 als Grundseite werde das Quadrat 𝔄𝔅ℭ𝔇 gezeichnet, siehe Fig 143. Die Gerade ℭ𝔈 schneide 𝔄𝔅 in 𝔉. Nun werde F' auf $A'B'$ so bestimmt, daß F' die Strecke $A'B'$ in demselben Verhaltnis teilt wie 𝔉 die Strecke 𝔄𝔅 Dann werde $F'E'$ gezogen und C' auf $F'E'$ so bestimmt, daß C' die Strecke $F'E'$ geradeso teilt wie 𝔈 die Strecke 𝔉𝔈. (In Fig. 143 sind es äußere Teilungen, vgl. Nr. 9) Indem man schließlich noch durch A' die Parallele zu $B'C'$ und durch C' die Parallele zu $A'B'$ zieht und beide Geraden in D' zum Schnitt bringt, bekommt man ein Parallelogramm $A'B'C'D'$

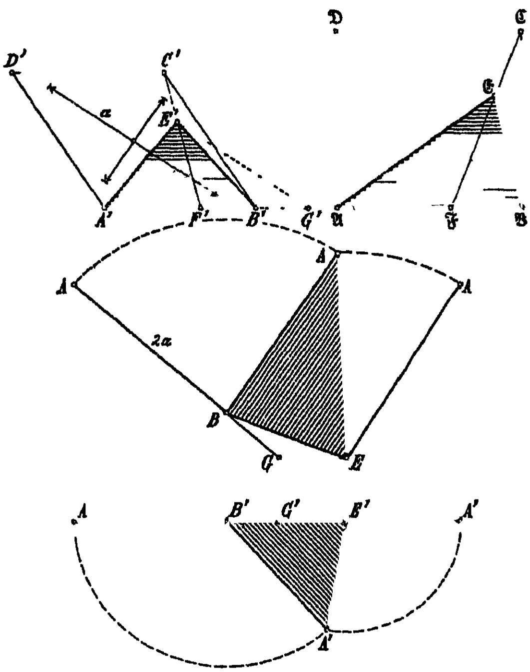


Fig 143

Nun wissen wir, daß das Parallelogramm $A'B'C'D'$ die senkrechte Projektion eines gewissen Quadrates $ABCD$ ist, also das Dreieck $A'B'E'$ die senkrechte Projektion eines gewissen Dreiecks ABE in der Ebene dieses Quadrats Infolge der vorhin überall beibehaltenen Teilverhältnisse macht das Quadrat $ABCD$ zusammen mit dem Dreieck ABE eine Figur aus, die der Figur des Quadrats 𝔄𝔅ℭ𝔇 und des Dreiecks 𝔄𝔅𝔈 ahnlich ist, d h.: das Dreieck ABE ist in der Tat dem gegebenen Dreieck 𝔄𝔅𝔈 ahnlich. Daher gilt der Satz·

Ein gegebenes Dreieck laßt sich stets als senkrechte Projektion eines Dreiecks von vorgeschriebener Gestalt auffassen. Oder auch: Ein gegebenes Dreieck kann man stets in eine derartige Lage gegenuber der Tafel bringen, daß seine senkrechte Projektion eine vorgeschriebene Gestalt bekommt. Man kann auch so sagen: Ein gegebenes dreiseitiges Prisma laßt sich stets durch eine geeignet gelegte Ebene in einem Dreieck von vorgeschriebener Gestalt schneiden. Da ein Dreieck die Halfte eines Parallelogramms ist, folgt sofort: Ein gegebenes Parallelogramm laßt sich stets als senkrechte Projektion eines Parallelogramms von vorgeschriebener Gestalt auffassen

Ein entsprechender Satz gilt nicht fur beliebige ebene Vierecke. Aber man kann das Folgende erschließen: Zwei ebene Vierecke $A'B'C'D'$ und 𝔄𝔅ℭ𝔇 seien gegeben. Der Schnittpunkt der Diagonalen $A'C'$ und $B'D'$ sei E', der Schnittpunkt der Diagonalen 𝔄ℭ und 𝔅𝔇 sei 𝔈. Nun ist $\triangle A'B'C'$ die senkrechte Projektion eines dem Dreieck 𝔄𝔅ℭ ähnlichen Dreiecks, und nur wenn E' die Diagonalen $A'C'$ und $B'D$

in denselben Verhältnissen teilt wie $\mathfrak{C}$ die Diagonalen $\mathfrak{AC}$ und $\mathfrak{BD}$, ist das Viereck $A'B'C'D'$ die senkrechte Projektion eines dem Viereck $\mathfrak{ABCD}$ ähnlichen Vierecks.

Wir kehren zu Fig. 143 zurück und bestimmen noch das Netz eines geraden dreiseitigen Prismas mit der gegebenen Grundfläche $A'B'E'$ und einer dem gegebenen Dreieck $\mathfrak{ABC}$ ähnlichen zweiten Endfläche ABE. Wie hoch A über A' liegt, kann dabei wieder wie in voriger Nummer beliebig angenommen werden. Wie in voriger Nummer bestimmt man die Achsen der Ellipse, die die Mittellinien des Parallelogramms $A'B'C'D'$ als konjugierte Durchmesser hat. Dann weiß man, daß AB gleich der Hauptachse $2a$ der Ellipse ist. Man zeichnet daher das Trapez $A'B'BA$ des Netzes wie das erste Trapez des Netzes in Fig. 142 der letzten Nummer, siehe den unteren Teil der Fig. 143. Dann wird $B'E'$ und $E'A'$ geradlinig an $A'B'$ angetragen. Die letzte Kante $A'A$ des Netzes ist gleich der ersten Kante $A'A$ zu machen. Es erübrigt also nur noch die Bestimmung von E. Die Projektion der durch E gehenden Höhenlinie ist zur Hauptachse der Ellipse parallel und schneidet $A'B'$ in einem Punkt G'. Den zugehörigen Punkt G ermittelt man im Netz auf AB, indem man $A'G'$ auf $A'B'$ abträgt und durch G' die Lotrechte zieht Die Parallele zur Grundlinie des Netzes durch G gibt dann auf der Lotrechten durch E' den gesuchten Punkt E. Das Netz ist durch Ansetzen des gegebenen Grunddreiecks $A'B'E'$ und des zum Dreieck $\mathfrak{ABC}$ ähnlichen oberen Dreiecks ABE zu vervollständigen Die Aufgabe hat wie die der letzten Nummer zwei wesentlich verschiedene Lösungen Fig. 143 zeigt nur eine

***98. Momentenellipsen**[1]. Ist in der Ebene eine Gruppe von Punkten P gegeben, so kommt ihnen nach Nr 55 in bezug auf irgendeine Gerade l der Ebene ein quadratisches Moment T_l zu. Man sagt auch· Der Geraden l kommt in bezug auf die Punktgruppe P ein quadratisches Moment T_l zu. Insbesondere betrachten wir jetzt bei gegebener Punktgruppe die Momente T_l aller derjenigen Geraden l der Ebene, die durch einen bestimmt angenommenen Punkt M gehen

Durch M seien zwei zueinander senkrechte Geraden k und g gezogen und irgendwie mit Pfeilen versehen, siehe Fig 144 Einer der Punkte P der Punktgruppe habe von g den Abstand x und von k den Abstand y. Dabei sei verabredet x soll positiv oder negativ gerechnet werden, je nachdem x auf derjenigen Seite von g liegt, nach der der Pfeil von k weist, oder nicht, Entsprechendes gelte für y. Wir verstehen also unter x und y die sogenannten rechtwinkligen Koordinaten (d. h. zugeordneten Größen oder Bestimmungsstücke) des Punktes P in bezug auf das Achsenkreuz k, g. Verfahren wir so mit allen Punkten P der gegebenen Punktgruppe, so ist das Moment T_g der Geraden g die Summe aller x^2 und das Moment T_k der Geraden k die Summe aller y^2. Nun aber ist für jeden einzelnen Punkt P die Summe $x^2 + y^2$ gleich

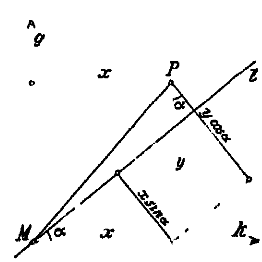


Fig 144

[1]) Die mit Sternchen versehenen Nummern sind überschlagbar

MP^2. Mithin ist die Summe der quadratischen Momente T_k und T_g zweier zueinander senkrechter Geraden k und g durch M gleich dem quadratischen Moment des Punktes M (vgl Nr. 55). Deshalb behalt die Summe $T_k + T_g$ immer denselben Wert, wenn man das Achsenkreuz k, g um M dreht Unter allen Geraden l durch M sei nun die in Fig. 144 gezeichnete Linie g eine solche, für die das Moment den überhaupt größten Wert T_g annimmt. Dann folgt, daß die zu g senkrechte Gerade k eine solche ist, fur die das Moment den überhaupt kleinsten Wert T_k annimmt. Vorlaufig steht es noch nicht fest, ob es nicht mehrere solche rechtwinklige Paare mit größtem und kleinstem Moment gibt, es wird sich nachher zeigen, daß es nicht der Fall ist, es sei denn, daß das Moment uberhaupt fur alle Geraden durch M denselben Wert bekommt. In diesem besonderen Falle verstehen wir unter k, g irgendein rechtwinkliges Geradenpaar durch M

Nun sei l eine beliebige Gerade der Ebene durch den Punkt M Sie bilde mit k den spitzen Winkel α Aus Fig 144 liest man alsdann ab, daß $x \sin\alpha - y \cos\alpha$ oder der entgegengesetzte Wert der Abstand des Punktes P von l ist. Mithin ist die Summe der Quadrate der Abstande

$$(x \sin\alpha - y \cos\alpha)^2 \quad \text{oder} \quad x^2 \sin^2\alpha - 2\,x\,y \sin\alpha \cos\alpha + y^2 \cos^2\alpha\,,$$

gebildet in bezug auf alle Punkte P der Punktgruppe, das quadratische Moment T_l von l. Die Summe aller x^2 ist T_g, die aller y^2 ist T_k. Wird die Summe aller Produkte $x\,y$, d h. die Summe der Flachen aller Rechtecke mit den Diagonalen MP und Kantenpaaren x, y, mit Z_{gk} bezeichnet, so ergibt sich daher.

$$T_l = T_g \sin^2\alpha - 2\,Z_{gk} \sin\alpha \cos\alpha + T_k \cos^2\alpha$$

Nebenbei bemerkt wird Z_{gk} ein Zentrifugalmoment genannt Man beachte, daß ein Rechteckinhalt $x\,y$ positiv oder negativ ausfallt, je nachdem x und y dasselbe oder verschiedene Vorzeichen haben Deshalb kann Z_{gk} sehr wohl eine negative Große sein Dagegen sind die quadratischen Momente T_g, T_k und T_l nach ihrer Erklarung als Summen von Quadraten stets positiv

Da nun nach Voraussetzung T_g der großte und T_k der kleinste Wert ist, den das Moment T_l fur irgendwelche Geraden l durch M annehmen kann, liegt T_l zwischen T_g und T_k. Mithin muß sein

$$T_g \geqq T_g \sin^2\alpha - 2\,Z_{gk} \sin\alpha \cos\alpha + T_k \cos^2\alpha \geqq T_k$$

oder

$$-(T_g - T_k)\cos^2\alpha \leqq 2\,Z_{gk} \sin\alpha \cos\alpha \leqq (T_g - T_k)\sin^2\alpha$$

Durch Division mit $2 \sin\alpha \cos\alpha$ geht hervor, daß der Wert von Z_{gk} zwischen den beiden Schranken

$$-(T_g - T_k)\,\mathrm{ctg}\,\alpha \quad \text{und} \quad (T_g - T_k)\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

liegt. Dies gilt, wie auch die Gerade l durch M gezogen sein mag, d. h. wie groß auch immer der spitze Winkel α gewahlt sein mag. Man kann daher auch für α bei der einen Schranke einen beliebigen anderen spitzen Winkel als bei der anderen Schranke annehmen. Man beachte weiterhin, daß $T_g - T_k$ positiv ist, weil T_g den größten und T_k den kleinsten Wert des Moments darstellt. Die negative Schranke $-(T_g - T_k)\,\mathrm{ctg}\,\alpha$ rückt um so naher an den Wert Null heran, je naher α bei 90° gewählt wird, die positive Schranke $(T_g - T_k)\,\mathrm{tg}\,\alpha$, je näher α bei 0° gewählt wird.

Da man die Annaherung beliebig weit treiben kann, folgt daraus, daß der zwischen beiden Schranken gelegene Wert von Z_{gk} gleich Null ist. Mithin vereinfacht sich die vorhin für T_l aufgestellte Formel. Es kommt

$$T_l = T_g \sin^2\alpha + T_k \cos^2\alpha .$$

Diese Formel hat nun eine einfache geometrische Bedeutung. Um zu ihr zu gelangen, legen wir um M die Kreise mit den Radien

$$a = \sqrt{T_g}, \qquad b = \sqrt{T_k}$$

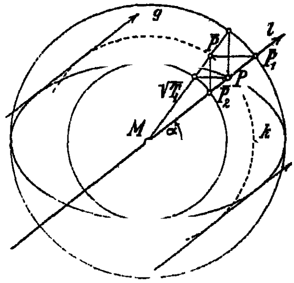


Fig 145

Die Gerade l treffe einerseits von M den großen Kreis (vom Radius a) in $\bar{P}_1$ und den kleinen Kreis (vom Radius b) in $\bar{P}_2$, siehe Fig 145 Die Parallele zu k durch $\bar{P}_1$ schneide die Parallele zu g durch $\bar{P}_2$ in $\bar{P}$. Dann ist der Abstand des Punktes P von k gleich dem des Punktes P_1 von k, d. h. gleich $a \sin\alpha$ oder $\sqrt{T_g}\sin\alpha$, und der Abstand des Punktes $\bar{P}$ von g gleich dem des Punktes $\bar{P}_2$ von g, d. h gleich $b\cos\alpha$ oder $\sqrt{T_k}\cos\alpha$ Nun ist $M\bar{P}^2$ die Summe der Quadrate beider Abstande und also nach der fur T_l aufgestellten Formel gleich T_l Somit ist

$$M\bar{P} = \sqrt{T_l}$$

Wenn wir nun diejenige Ellipse konstruieren, deren Hauptachse der auf k gelegene Durchmesser des großen Kreises und deren Nebenachse der auf g gelegene Durchmesser des kleinen Kreises ist, so wissen wir nach dem Satz von Nr. 86, daß die zu l parallelen Tangenten dieser Ellipse vom Mittelpunkt M die Entfernung MP haben Da sie gleich $\sqrt{T_l}$ ist, ergibt sich also Wenn man zu jeder Geraden l durch M diejenigen Parallelen zieht, deren Abstandsquadrate gleich dem zu l gehorigen Moment T_l sind, bekommt man alle Tangenten jener Ellipse Daraus erkennt man nun nachtraglich, daß das Moment T_l nur fur eine Gerade durch M seinen großten Wert erreicht, namlich fur die Gerade g, denn die zu g parallelen Tangenten haben von der Mitte die großte Entfernung Nur wenn $T_g = T_k$, also $a = b$ ist, sind alle Momente T_l gleich groß Somit gilt der Satz

Wenn nicht alle Geraden durch einen Punkt M der Ebene hinsichtlich einer in der Ebene gegebenen Punktgruppe dasselbe quadratische Moment haben, gibt es nur eine Gerade g durch M, fur die das Moment den größten Wert T_g bekommt, und die zu g senkrechte Gerade k durch M ist dann die einzige, fur die das Moment den kleinsten Wert T_k bekommt. Zieht man ferner zu jeder durch M gehenden Geraden l die Parallelen, deren Abstandsquadrate von M gleich dem quadratischen Moment T_l von l sind, so umhüllen alle diese Parallelen eine Ellipse. Die halbe Hauptachse der Ellipse ist gleich $\sqrt{T_g}$ und liegt auf k, die halbe Nebenachse ist gleich $\sqrt{T_k}$ und liegt auf g.

Diese Ellipse heißt die Momentenellipse des Punktes M in bezug auf die gegebene Punktgruppe. In dem besonderen Fall, wo allen Geraden durch M dasselbe Moment zukommt, geht ein Momentenkreis hervor. Dieser besondere Fall lag in Nr. 57 vor, denn dort ergab sich zum Schluß: Wenn $O'X'Y'Z'$ die senkrechte Projektion eines rechtwinkligen Achsenkreuzes mit gleichlangen Achsen OX, OY, OZ ist, kommt jeder durch O' gehenden Geraden der Tafel dasselbe quadratische Moment in bezug auf X', Y', Z' zu. Dieser Satz läßt sich deshalb so aussprechen:

Drei auf der Tafel von einem Punkt O' ausgehende Strecken $O'X'$, $O'Y$, $O'Z'$ stellen dann, aber auch nur dann die senkrechte Projektion eines rechtwinkligen Achsenkreuzes mit gleichlangen Achsen OX, OY, OZ dar, wenn die Momentenellipse von O' in bezug auf die Gruppe der drei Punkte X', Y', Z' ein Kreis ist, und zwar ist dann der Radius des Kreises die wahre Achsenlänge

Nach dieser Zwischenbemerkung kehren wir zur allgemeinen Betrachtung zurück: Wenn man durch den Schnittpunkt des Strahls $M\bar{P}$ mit dem großen Kreis die Senkrechte zu k und durch seinen Schnittpunkt mit dem kleinen Kreis die Senkrechte zu g zieht, treffen sich die beiden Geraden in demjenigen Punkt P, in dem der Strahl $M\bar{P}_2P_1$ oder l die Ellipse schneidet (vgl. Fig. 127 von Nr. 86) Vorhin ergab sich, daß $\bar{P}$ von k und g die Entfernungen $a\sin\alpha$ und $b\cos\alpha$ hat Bildet $M\bar{P}$ mit k den Winkel $\bar{\alpha}$, so ist daher

$$\sin\bar{\alpha} : \cos\bar{\alpha} = a\sin\alpha : b\cos\alpha$$

woraus wegen $\sin^2\bar{\alpha} + \cos^2\bar{\alpha} = 1$ folgt:

$$\sin^2\bar{\alpha} = \frac{a^2\sin^2\alpha}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}, \quad \cos^2\bar{\alpha} = \frac{b^2\cos^2\alpha}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}.$$

Nun hat P von k den Abstand $b\sin\bar{\alpha}$ und von g den Abstand $a\cos\bar{\alpha}$. Somit ist das Quadrat von MP als Summe der Quadrate dieser beiden Abstande gleich $b^2\sin^2\bar{\alpha} + a^2\cos^2\bar{\alpha}$, so daß die vorstehenden Formeln liefern.

$$MP^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}.$$

Hierin können für a^2 und b^2 die Werte T_g und T_k eingesetzt werden. Mithin ist·

$$\frac{1}{MP^2} = \frac{T_g\sin^2\alpha + T_k\cos^2\alpha}{T_g T_k}.$$

Es wa aber $T_l = T_g\sin^2\alpha + T_k\cos^2\alpha$. Somit geht schließlich hervor.

$$\frac{1}{MP} = \frac{\sqrt{T_l}}{\sqrt{T_g}\sqrt{T_k}}.$$

Dreht sich die Gerade l um M, so bleibt der Nenner rechterhand ungeändert, und die Formel besagt daher, daß der reziproke Wert des auf einem Strahl l durch M gelegenen Halbmessers MP der Momentenellipse des Punktes M proportional zur Quadratwurzel aus dem zu l gehörigen Moment T_l ist.

Anmerkung. Wenn drei nach verschiedenen Richtungen gehende Halbmesser einer Ellipse gleichlang sind, ist die Ellipse allemal ein Kreis, wie sich leicht aus Nr. 73 ergibt. Wenn also drei verschiedenen Geraden durch M dasselbe Moment zukommt, haben alle Geraden durch M (in derselben Ebene) ebenfalls dies Moment. Damit ist die in der Anmerkung von Nr 57 aufgestellte Behauptung bewiesen.

Der Begriff des quadratischen Moments einer Geraden in bezug auf ein System von Massen oder materiellen Punkten und der Name Tragheitsmoment (momentum inertiae) wurde von Euler (Nr. 65) eingeführt in seiner „Scientia navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus, pars prior, complectens theoriam universam de situ ac motu corporum aquae innatantium" (Lehre vom Schiff oder Abhandlung über den Bau und die Fuhrung von Schiffen, erster Teil, enthaltend die vollstandige Lehre von der Lage und Bewegung der im Wasser schwimmenden Korper), Supplement zum 1. Bd. der Comment. nov. Acad scientiar Petropol., Petersburg 1749, S. 70. Siehe auch seine „Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum, ex primis nostrae cognitionis principiis stabilita ed ad omnes motus, qui in hujusmodi corpora cadere possunt, accomodata" (Lehre von den Bewegungen der festen oder starren Korper, auf den ersten Grundsatzen unserer Erkenntnis aufgebaut und allen Bewegungen angepaßt, die bei derartigen Korpern vorkommen konnen), Rostock und Greifswald 1765, S 166. Euler sowie die noch zu Nennenden beschränkten sich dabei nicht auf die Ebene, sondern dehnten die Betrachtung sogleich auf den Raum aus Jacques Ph. Marie Binet (geb. 1786 zu Rennes, Professor der Mathematik und Astronomie am Collège de France, gest. 1856 zu Paris) fuhrte den Begriff des Trägheitsmoments einer Ebene ein (Nr 55) in der Abhandlung: „Mémoire sur la théorie des axes conjugués et des momens d'inertie des corps", Journ de l'École polyt. 16. cah, 9 Bd, 1813, S 41—67, insbes S 42. Dabei veranschaulichte er (S 64) alle diese Momente, soweit sie sich auf Ebenen durch einen Punkt M beziehen, durch ein gewisses Ellipsoid, das jedoch fur uns nicht in Betracht kommt. Augustin Louis (Baron de) Cauchy (geb 1789 in Paris, Professor der Mathematik an der Sorbonne, gest 1857 in Sceaux) gelangte alsdann in der Abhandlung: „Sur les moments d'inertie" in seinen „Exercices de Mathématiques", 2. Bd Paris 1827 (abgedruckt in den „Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy, publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences", 2 Serie, 7 Bd. Paris 1889, S 124—136, insbes S 127), zu einem anderen Ellipsoid, indem er auf allen Strahlen l durch einen Punkt M die reziproken Werte der Quadratwurzeln aus den Momenten T_l als Strecken auftrug Beschrankt man sich auf Betrachtungen in der Ebene, so handelt es sich um eine Ellipse Da man zur Darstellung des reziproken Wertes der Quadratwurzel von T_l einer Langeneinheit bedarf, die willkurlich angenommen werden kann, gehoren zu jedem Punkt M unendlich viele derartige Ellipsen. Sie sind alle einander ahnlich und ähnlich gelegen, indem ihr Mittelpunkt M der Ähnlichkeitspunkt ist. Fur die Zwecke der Konstruktion ist jene Willkur in der Wahl der Langeneinheit lastig Deshalb hat Karl Culmann (geb 1821 in Bergzabern, Professor der Ingenieurwissenschaften am eidgenossischen Polytechnikum zu Zurich, Begrunder der graphischen Statik, gest 1881 in Riesbach bei Zurich) in seinem Werke „Die graphische Statik", Zurich 1866, S. 176 (2 Aufl in zwei Banden, 1 Bd Zurich 1875, S 401) unter allen diesen Ellipsen eine bestimmte ausgewahlt, die von der Wahl der Langeneinheit unabhängig ist Wir haben jedoch diese Culmannsche Tragheitsellipse durch eine andere ersetzt: Besteht die Punktgruppe, hinsichtlich deren die Momente gebildet werden, aus n Punkten, die man sich alle mit der Masseneinheit belegt zu denken hat (Nr. 55), so ist die Gesamtmasse der Punktgruppen gleich n. Culmann zieht nun zu irgendeiner Geraden l die parallelen Geraden nicht im Abstand $\pm\sqrt{T_l}$, sondern im Abstand $\pm\sqrt{T_l : n}$. Die Culmannsche Tragheitsellipse geht also aus der von uns benutzten Momentenellipse hervor, indem man die Figur im Maßstab $1 \cdot \sqrt{n}$ von M aus verkleinert. Daß die Momentenellipse fur die Zwecke der darstellenden Geometrie geeigneter als die Culmannsche Tragheitsellipse ist, bemerkte Karl Heuman (geb. 1870 in Morlanda, Professor der Mechanik an der technischen Hochschule Stockholm) in der Abhandlung. „Über Trägheitsmomente von Punktsystemen und uber eine fundamentale Aufgabe in der Theorie der axonometrischen Abbildung", Arkiv for Mathematik, Astronomi och Fysik, 2 Bd 1905, Nr. 16, S. 1—18. Wir werden auf diese wichtige Arbeit noch einige Male hinzuweisen haben.

***99. Momentenellipsen für einen einzelnen Punkt und für eine Gruppe von nur zwei Punkten.** Welche Verwendung die Momentenellipsen in

der darstellenden Geometrie finden, kann erst später erörtert werden. Gegenwartig soll die Frage beantwortet werden, wie man für irgendeinen Mittelpunkt M diejenige Momentenellipse ermittelt, die zu einer gegebenen Punktgruppe in der Ebene gehört.

Besteht die Punktgruppe aus nur einem Punkt P, so ist das quadratische Moment T_l einer Geraden l gleich dem Quadrat des Abstandes des Punktes P von l, die Quadratwurzel daraus also gleich dem Abstand selbst. Daraus folgt: Die zu allen Geraden l durch einen Punkt M parallel zu ziehenden Geraden im Abstand $\pm\sqrt{T_l}$ gehen durch P oder durch denjenigen Punkt Q, der hervorgeht, wenn man die Strecke PM über M hinaus verdoppelt. Diese Geraden sind also die Tangenten der Momentenellipse, die demnach in die doppeltzahlende Strecke PQ ausartet.

Besteht die Punktgruppe aus zwei Punkten P_1 und P_2, so leuchtet ein, daß eine zu MP_2 parallele Tangente der Momentenellipse von M durch P_1 und eine zu MP_1 parallele durch P_2 geht Es gibt sonst keine durch P_1 oder P_2 gehende Tangente der Ellipse. Denn wenn t eine durch P_1 gehende Tangente ist und l die Parallele zu ihr durch M bedeutet, muß das Quadrat der Entfernung zwischen t und l gleich der Summe der Quadrate der Abstande der Punkte P_1 und P_2 von l sein, d. h l muß durch P_2 gehen Folglich geht durch P_1 nur eine Tangente, namlich die Parallele zu MP_2. Ebenso geht durch P_2 nur eine Tangente, namlich die Parallele zu MP_1. Deshalb sind P_1 und P_2 die Berührungspunkte dieser beiden Tangenten. In der Tat. Sonst lage P_1 (oder P_2) außerhalb der Ellipse, d. h es waren doch zwei Tangenten durch P_1 (oder P_2) vorhanden Hieraus folgt nach Nr 72: MP_1 und MP_2 sind konjugierte Halbmesser der Momentenellipse. Ihre Achsen lassen sich daher nach Nr 85 ermitteln.

Wenn die beiden Punkte P_1 und P_2 auf einer Geraden durch M liegen, und nur dann artet die Momentenellipse in die doppeltzahlende Strecke P_1P_2 aus

***100. Ermittlung der Momentenellipse für größere Punktgruppen.** Die Aufgabe, die Momentenellipse eines Punktes M fur eine aus mehr als zwei Punkten bestehende Punktgruppe zu ermitteln, läßt sich dadurch losen, daß man die Punktgruppe in zwei kleinere Gruppen zerlegt, fur jede einzelne die Momentenellipse von M bestimmt und daraus die gesuchte Ellipse ableitet. Daß dies möglich ist, erhellt wie folgt:

Wie in Nr 98 mögen g und k diejenigen (noch unbekannten) Geraden durch M sein, fur die das Moment seinen größten Wert T_g und seinen kleinsten Wert T_k annimmt. Dann sind g und k, wie wir wissen, zueinander senkrecht. Man nennt sie übrigens die Hauptmomentenachsen des Punktes M. Bildet eine beliebige Gerade l durch M mit k den Winkel α, so ist nach Nr. 98

$$T_l = T_g \sin^2\alpha + T_k \cos^2\alpha$$

oder

$$T_l = (T_g - T_k)\sin^2\alpha + T_k\,.$$

Sind ferner a und b die Halbachsen der Ellipse, so ist $T_g = a^2$, $T_k = b^2$, also $T_g - T_k = a^2 - b^2$, und dies ist nach Nr. 74 das Quadrat der Entfernung c der Brennpunkte von M. Wenn also F einen der

beiden Brennpunkte bezeichnet, ist $(T_g - T_k)\sin^2\alpha$ gleich dem Quadrat des Abstandes des Punktes F von l, mit anderen Worten: gleich dem quadratischen Moment der Geraden l hinsichtlich des Punktes F. Die Formel liefert daher den Satz.

Wenn b die halbe Nebenachse und F einer der Brennpunkte der Momentenellipse eines Punktes M ist, kann das quadratische Moment irgendeiner durch M gehenden Geraden l als die Summe aus b^2 und dem quadratischen Moment von l hinsichtlich des Brennpunktes F allein dargestellt werden.

Dies wenden wir sogleich an: *Es mögen zwei Punktgruppen vorliegen.* Die Momentenellipse von M hinsichtlich der ersten Gruppe habe die halbe Nebenachse b_1 und den einen Brennpunkt F_1, die Momentenellipse von M hinsichtlich der zweiten Gruppe die halbe Nebenachse b_2 und den einen Brennpunkt F_2. Ferner sei l wieder irgendeine Gerade durch M. Nun setzt sich das quadratische Moment von l hinsichtlich derjenigen Punktgruppe, die von den beiden gegebenen Gruppen zusammen gebildet wird, als Summe aus den quadratischen Momenten von l hinsichtlich jeder einzelnen der beiden gegebenen Gruppen zusammen. Nach dem Vorhergehenden ist es demnach gleich $b_1^2 + b_2^2$, vermehrt um das quadratische Moment, das der Geraden l hinsichtlich derjenigen Punktgruppe zukommt, die von F_1 und F_2 gebildet wird. Jetzt werde die Momentenellipse von M hinsichtlich dieser aus F_1 und F_2 bestehenden Punktgruppe hergestellt. Sie hat nach voriger Nummer die konjugierten Halbmesser MF_1 und MF_2. Ihre halbe Nebenachse sei b_0, und mit F_0 sei einer ihrer Brennpunkte bezeichnet Nach dem vorausgeschickten Satz ist das Moment von l hinsichtlich F_1 und F_2 gleich b_0^2, vermehrt um das Moment von l hinsichtlich F_0 Wird dies Ergebnis mit dem vorhergehenden zusammengefaßt, so folgt. Das Moment von l hinsichtlich derjenigen Punktgruppe, die aus den beiden gegebenen Punktgruppen zusammen besteht, ist gleich $b_0^2 + b_1^2 + b_2^2$, vermehrt um das Moment von l hinsichtlich F_0.

Dies gilt nun fur jede Gerade l durch M Man sieht also, daß das Gesamtmoment von l, d h. das Moment von l hinsichtlich der aus den beiden gegebenen Punktgruppen zusammen gebildeten Punktgruppe, seinen kleinsten Wert erreicht, wenn l durch F_0 geht, indem es dann gleich $b_0^2 + b_1^2 + b_2^2$ ist Die zugehorige Momentenellipse hat demnach eine halbe Nebenachse b, deren Quadrat gleich $b_0^2 + b_1^2 + b_2^2$ ist, und ihre Hauptachse liegt auf MF_0. Auf der anderen Seite aber besagt der vorausgeschickte Satz, daß das Gesamtmoment einer Geraden l durch M gleich der Summe aus b^2 und dem Quadrat des Abstandes eines der beiden Brennpunkte der zugehörigen Ellipse von l ist. Folglich ist F_0 selbst einer der Brennpunkte dieser Ellipse. *Somit kennt man von der Momentenellipse des Punktes M hinsichtlich der aus den beiden gegebenen Punktgruppen gebildeten Gruppe außer dem Mittelpunkt M den einen Brennpunkt F_0 sowie das Quadrat $b_0^2 + b_1^2 + b_2^2$ der halben Nebenachse b.* Nach Nr. 75 kann man also auch die Hauptachse finden.

Weil man nach Nr. 99 die Momentenellipsen für Punktgruppen von höchstens zwei Punkten ermitteln kann, läßt sich somit die Aufgabe, die Momentenellipse eines Punktes M hinsichtlich irgendeiner Punkt-

gruppe zu bestimmen, Schritt für Schritt erledigen, indem man zuerst nur zwei, dann drei, vier usw. Punkte der Gruppe berücksichtigt.

Anmerkung: Dies Verfahren sowie seine Anwendung in der nächsten Nummer ist von K. Heuman in seiner bei Nr. 98 genannten Arbeit angegeben worden.

***101. Momentenellipsen für Gruppen von drei Punkten.** Besteht die gegebene Punktgruppe aus drei Punkten P_1, P_2, P_3 und soll die Momentenellipse für irgendeinen Mittelpunkt M gefunden werden, so bestimmt man zuerst die Achsen der Momentenellipse von M hinsichtlich des Punktepaares P_1, P_2 allein, nämlich nach Nr. 99 aus den beiden konjugierten Halbmessern MP_1 und MP_2, siehe Fig. 146, wo die Konstruktion nach Nr. 85 durchgeführt worden ist: MP_2 wird um M durch den rechten Winkel in die Lage MQ gedreht. Der Kreis um die Mitte Z von P_1Q und durch M schneidet P_1Q in Punkten X und Y der Achsen. Ist X der näher bei P_1 gelegene Schnittpunkt, so ist die halbe Hauptachse gleich P_1Y und auf MX gelegen, die halbe Nebenachse b_1 gleich P_1X und auf MY gelegen. Die Ellipse selbst braucht aber nicht gezeichnet zu werden. Einer ihrer Nebenscheitel sei B_1. Nach Nr. 74 bekommt man einen Brennpunkt F_1 als Schnitt von MX mit dem Kreis vom Radius P_1Y um B_1.

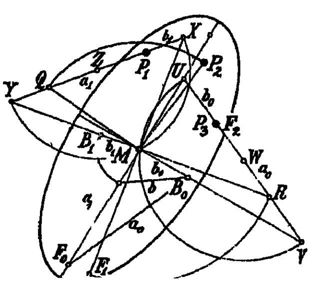


Fig 146

Die Momentenellipse von M hinsichtlich des Punktes P_3 allein ist nach Nr. 99 die über M hinaus verdoppelte Strecke MP_3, also P_3 einer ihrer Brennpunkte F_2; ihre halbe Hauptachse ist gleich MP_3, ihre halbe Nebenachse b_2 gleich Null.

Nun ist nach voriger Nummer die halbe Nebenachse b_0 sowie ein Brennpunkt F_0 der Momentenellipse von M hinsichtlich der Punktgruppe F_1, F_2 zu bestimmen. Dabei sind MF_1 und MF_2 nach Nr. 99 konjugierte Halbmesser. Man dreht also MF_1 um M durch einen rechten Winkel in die Lage MR, wobei man sieht, daß R auf MY zu liegen kommt. Ist W die Mitte von P_3R und schneidet der Kreis um W durch M die Gerade P_3R in U und V, so sind U und V auf den Ellipsenachsen gelegen. Ist U der naher bei P_3 gelegene Schnittpunkt, so ist die halbe Hauptachse gleich P_3V und auf MU gelegen, die halbe Nebenachse b_0 gleich P_3U und auf MV gelegen. Einer der Nebenscheitel sei B_0; der Kreis um B_0 mit dem Radius P_3V schneidet die Brennpunkte auf der Hauptachse aus. Der eine Brennpunkt sei F_0.

Schließlich ist nun nach voriger Nummer dieser Punkt F_0 einer der Brennpunkte der gesuchten Momtentenellipse, indem sich nebenbei ergibt, daß ihr anderer Brennpunkt der zweite Brennpunkt der zuletzt bestimmten Ellipse ist. Da $b_2 = 0$ ist, hat die gesuchte Momentenellipse die halbe Nebenachse $b = \sqrt{b_0^2 + b_1^2}$. Man kennt also ihre Brennpunkte und ihre Nebenscheitel, daher auch ihre Hauptscheitel und kann sie zeichnen, wie es in Fig. 146 geschehen ist.

***102. Die Momentenellipse als Umschließende aller Punkte der Punktgruppe.** Zunächst stellen wir fest, wann die Momentenellipse eines Punktes M hinsichtlich einer Punktgruppe P_1, P_2, P_3 ... in eine doppelt-

zählende Strecke ausartet, indem ihre Nebenachse gleich Null wird. Dies kann nur dann vorkommen, wenn M die Mitte der Strecke ist, und die Gerade, auf der die Strecke liegt, bedeutet dann eine Tangente, d. h., da sie von M die Entfernung Null hat, nach Nr. 98: Diese Gerade hat das quadratische Moment Null, was besagt, daß alle Punkte der Punktgruppe auf ihr liegen müssen. Umgekehrt sieht man nach Nr. 98 leicht ein, daß diese Lage der Punkte P_1, P_2, P_3 . . nach sich zieht, daß die Ellipse ausartet. Demnach artet die Momentenellipse eines Punktes M hinsichtlich einer Punktgruppe dann, aber auch nur dann in eine doppeltzahlende Strecke aus, wenn alle Punkte der Gruppe auf einer Geraden durch M liegen

Dieser Fall werde jetzt ausdrücklich ausgeschlossen, die Ellipse sei also nicht ausgeartet Ist nun ein Punkt P_1 der Punktgruppe außerhalb der Ellipse gelegen, so gehen von ihm zwei Tangenten t_1 und t_2 an die Ellipse. Zu ihnen sind zwei verschiedene Geraden l_1 und l_2 durch M parallel, da wir selbstverständlich annehmen, daß P_1 nicht unendlich fern liege. Nach Nr. 98 sind die Quadrate der Abstände zwischen t_1 und l_1 und zwischen t_2 und l_2 gleich den Momenten von l_1 und l_2. Sie sind aber andererseits gleich den Quadraten der Abstände des Punktes P_1 von l_1 und l_2. Also haben alle anderen Punkte P_2, P_3 der Punktgruppe sowohl von l_1 als auch von l_2 die Entfernung Null, d h sie fallen sämtlich mit M zusammen, so daß die Ellipse entgegen der Voraussetzung ausartet. Mithin durfte die Annahme, P_1 liege außerhalb der Ellipse, nicht gemacht werden, d. h · Ist die Momentenellipse eines Punktes M hinsichtlich einer Punktgruppe nicht ausgeartet, so liegt kein Punkt der Gruppe außerhalb der Ellipse.

Wenn P_1 gerade auf der Ellipse liegt und t_1 die zugehörige Tangente und l_1 die Parallele zu t_1 durch M ist, schließt man ebenso, daß die übrigen Punkte P_2, P_3 . . der Punktgruppe sämtlich auf l_1 liegen müssen Nun mögen P_2, P_3 . von M die Entfernungen p_2, p_3 . . haben Dann bedeute P_0 einen Punkt auf l_1, dessen Abstandsquadrat von M gleich $p_2^2 + p_3^2 + .$. sei Jetzt ist das quadratische Moment irgendeiner Geraden l durch M hinsichtlich der Punktgruppe P_1, P_2, P_3 augenscheinlich gleich dem quadratischen Moment der Geraden l hinsichtlich der beiden Punkte P_0 und P_1 allein Nach Nr 99 sind MP_0 und MP_1 konjugierte Halbmesser der zugehörigen Ellipse Also folgt Ist die Momentenellipse eines Punktes M hinsichtlich einer Punktgruppe P_1, P_2, P_3 nicht ausgeartet und liegt ein Punkt P_1 der Gruppe auf der Ellipse, so liegen alle übrigen Punkte P_2, P_3 . der Punktgruppe auf demjenigen Durchmesser der Ellipse, der zu dem nach P_1 gehenden Durchmesser konjugiert ist

Anmerkung Die Culmannsche Ellipse, von der in der Anmerkung zu Nr 98 die Rede war, geht durch Verkleinerung der Momentenellipse hervor und deshalb gelten für sie die beiden letzten Sätze nicht. Der Vorzug der Momentenellipse gegenüber der Culmannschen Ellipse beruht gerade auf diesen beiden Sätzen.

103. Übungen. 1) Gegeben der Umriß einer Kugel und die senkrechte Projektion eines Kugelpunktes S, außerdem ein Winkel α. Es soll der Schnitt der Kugel mit demjenigen Rotationskegel gezeichnet werden, dessen Mantellinien die mit dem Radius von S den Winkel α bildenden Radien sind (Nr. 89, 90).

2) Gegeben der Umriß einer Kugel sowie die senkrechten Projektionen zweier Kugelpunkte P und Q. Gesucht die Projektion des durch P und Q gehenden Großkreises der Kugel. Die Projektion des Schnittpunktes der Geraden PQ mit der durch die Kugelmitte gehenden Höhenebene liegt auf der Hauptachse der Bildellipse (Nr. 89).

3) Gegeben eine Ellipse als senkrechte Projektion eines Kreises k. Auf der Kreisachse, die in der Projektion mit der Nebenachse der Ellipse zusammenfällt (Nr. 88), ist außerdem die Projektion eines Punktes M gegeben. Gesucht der Umriß derjenigen Kugel, die M zur Mitte hat und worauf der Kreis k liegt. Aus den Brennpunkten und Hauptscheiteln ergeben sich Punkte des Umrisses (Nr. 90).

4) Zu beweisen: Diejenigen Radien des Krümmungskreises eines Nebenscheitels einer Ellipse, die durch die Brennpunkte gehen, enden auf den Tangenten der Hauptscheitel. Man fasse den Krümmungskreis als den Umriß einer Kugel, die Ellipse als Projektion eines Kugelkreises auf (Nr. 90).

5) Die senkrechte Projektion solcher aufeinander rollender konischer Räder zu zeichnen, bei denen das kleinere Rad das größere von innen berührt und das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten gleich 1 · 3 ist (Nr. 95)

6) Ein gerades dreikantiges Prisma, dessen Grundfläche ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck ist, soll durch eine Ebene in einem gleichseitigen Dreieck geschnitten werden (Nr 97).

Zweites Kapitel [1]).

Parallelprojektion auf eine Tafel.

§ 1. Kavalierperspektive.

104. Begriff der allgemeinen Parallelprojektion. Die nicht senkrechte, sondern schiefe Parallelprojektion unterscheidet sich von der senkrechten bloß dadurch, daß bei ihr die projizierenden Strahlen eine beliebige gemeinsame Richtung haben, die selbstverständlich nicht zur Tafel parallel sein darf. Diese Richtung heißt die Projektionsrichtung. Die Bezeichnung Parallelprojektion soll zum Ausdruck bringen, daß alle projizierenden Strahlen einander parallel sind. Die senkrechte Projektion ist ein Sonderfall der allgemeinen Parallelprojektion. Wenden wir eine schiefe Parallelprojektion an, so werden wir die Bilder der Punkte P, Geraden g usw. meistens nicht wie früher mit P', g' usw., sondern mit deutschen Buchstaben, also mit $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{g}$ usw. bezeichnen.

Wie in Nr. 8 leuchtet ein: Das Bild einer Geraden g, die nicht die Projektionsrichtung hat, ist eine Gerade $\mathfrak{g}$, die durch den Spurpunkt von g geht. Hat dagegen die Gerade $\mathfrak{g}$ die Projektionsrichtung, so ist ihr Bild bloß der Spurpunkt. Parallele Geraden in einer von der Projektionsrichtung verschiedenen Richtung haben zueinander parallele Projektionen. Teilt ein Punkt P eine Strecke AB irgendwie, so teilt die Projektion $\mathfrak{P}$ des Punktes die Projektion $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ der Strecke in demselben Verhältnis:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{P} : \mathfrak{B}\mathfrak{P} = AP : BP.$$

Das Teilverhältnis ist demnach wie insbesondere im Falle der senkrechten Projektion (Nr. 9) eine Invariante der Parallelprojektion. Auch das Verhältnis zweier paralleler Strecken bleibt hier wie damals bei der Projektion unverändert.

Enthält eine Ebene die Projektionsrichtung, so erfüllen die Projektionen ihrer Punkte nur ihre Spurgerade. Sonst dagegen erfüllen sie die ganze Tafel. Auch jetzt sind die Projektionen der Höhenlinien einer Ebene zueinander wie zu den Höhenlinien selbst, insbesondere zur Spurgeraden, parallel. Eine zur Tafel parallele Figur ist auch bei schiefer Parallelprojektion ihrem Bilde kongruent.

[1]) Es ist die Einrichtung getroffen worden, daß der Leser nach eigenem Gutdünken statt dieses zweiten Kapitels zunächst § 1—4 des dritten Kapitels (mit Ausnahme von Nr. 241) durchnehmen kann. Erst von § 5 des dritten Kapitels an wird der Inhalt des zweiten Kapitels als bekannt vorausgesetzt, und auch dann nur zum Teil, nämlich wesentlich nur der Inhalt der ersten fünf Paragraphen des gegenwärtigen Kapitels.

Gelten soweit dieselben Gesetze wie bei der senkrechten Projektion, so darf man doch nicht ohne weiteres jeden Satz, der im Falle der senkrechten Projektion besteht, als richtig im Falle einer schiefen Parallelprojektion annehmen, denn was in einem Sonderfall richtig ist, braucht nicht im allgemeinen Fall zu gelten. Unterschiede sind z. B. diese: Die senkrechte Projektion einer Strecke ist nie länger als die Strecke selbst (Nr. 8), wohl aber kann eine schiefe Parallelprojektion einer Strecke länger als die Strecke selbst ausfallen. Ein rechter Winkel, der einen zur Tafel parallelen Schenkel hat, wird bei senkrechter Projektion wieder als rechter Winkel abgebildet (Nr. 18), dagegen im allgemeinen nicht bei schiefer Parallelprojektion. Deshalb erscheinen die Fallinien einer Ebene bei schiefer Parallelprojektion im Bilde im allgemeinen nicht als die Senkrechten zu den Höhenlinien.

Eine in schiefer Parallelprojektion entworfene Zeichnung täuscht dem Betrachter den dargestellten Gegenstand um so besser vor, je weniger seine Sehstrahlen von den projizierenden Strahlen abweichen. Man muß also das Bild aus gehöriger Entfernung betrachten und in der schrägen Projektionsrichtung darauf blicken. Da man aber die Gewohnheit hat, eine Zeichnung gerade vor sich zu halten, erscheint z. B. das Bild eines in schiefer Parallelprojektion entworfenen Würfels nach einer Richtung hin zu länglich, weil man nicht auf die richtige Sehrichtung achtet. Es gibt jedoch viele geometrische Figuren, die so allgemeine Gestalt haben, daß bei ihnen derartige Verzerrungen nicht auffallen. Man zieht die schräge oder beliebige Parallelprojektion häufig deshalb der senkrechten vor, weil sie leichter herzustellen und oft anschaulicher ist.

Sind zwei Punkte auf demselben projizierenden Strahl gelegen, so fallen ihre Bilder zusammen, und bezüglich ihrer Sichtbarkeit gilt dieselbe Regel wie in Nr. 15. Der höher über der Tafel gelegene Punkt ist dem Betrachter näher und verdeckt daher den tiefer gelegenen Punkt.

Zunächst besprechen wir Parallelprojektionen, die voraussetzen, daß von den zu zeichnenden Gegenständen schon eine senkrechte Projektion vorliege.

105. Begriff der Kavalierperspektive. Von einem Punkt A sei die senkrechte Projektion A' sowie die Höhe über der Tafel gegeben. Dann kann man die Richtung einer schiefen Parallelprojektion dadurch festlegen, daß man irgendeine bestimmte Stelle 𝔄 der Tafel als das Bild von A bezeichnet. Man kann nun ohne weiteres die Parallelprojektion irgendeines Gegenstandes ermitteln, sobald man schon die senkrechten Projektionen und Höhen der Punkte des Gegenstandes kennt. Denn wenn z. B. P ein Punkt des Gegenstandes, also P' seine senkrechte Projektion ist, sind die Lote $P'P$ und $A'A$ parallel. Mithin müssen ihre Bilder P'𝔓 und A'𝔄, die vermöge der Parallelprojektion entstehen, einander parallel sein und sich wie sie selbst verhalten. Man ermittelt also das Bild 𝔓 von P, indem man von P' aus die zu A'𝔄 parallele Gerade zieht und auf ihr von P' aus die zugehörige Strecke P'𝔓 abträgt. Die Länge dieser Strecke stellt man am bequemsten mit Hilfe des Höhenmaßstabes in Fig. 147 fest, worin man senkrecht zum

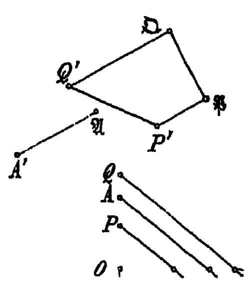


Fig. 147

Höhenmaßstab von O aus die Strecke $A'\mathfrak{A}$ abträgt, ihren Endpunkt mit der Marke A verbindet und dann durch die Marke P die Parallele zu dieser Verbindenden zieht. Die Strecke PQ hat die senkrechte Projektion $P'Q'$ und die schiefe Projektion $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$.

Insbesondere kommt den Bauwerken, die man sich auf der wagerechten Ebene stehend denkt, die Eigenschaft zu, daß man meistens außer den senkrechten Projektionen ihrer Punkte auch die Höhen ihrer Punkte aus ihren Plänen kennt. Deshalb lassen sie sich leicht in schiefer Parallelprojektion darstellen. Am bequemsten ist es, wenn die Projektionsrichtung mit der Tafel einen Winkel von 45° bildet, da dann $A'\mathfrak{A} = A'A$ und allgemein $P'\mathfrak{P} = P'P$ ist. Jedes auf der Tafel errichtete Lot $P'P$ erscheint also im Bilde in der wahren Länge, so daß die Konstruktion am Höhenmaßstab überflüssig wird. Die Richtung, aus der man eine auf dem Tisch vor dem Sitzplatz liegende Zeichnung betrachtet, pflegt auch ungefähr 45° mit der Ebene des Tisches zu bilden. Man entspricht dieser Lage, wenn man im Bilde alle Strecken $A'\mathfrak{A}$, $P'\mathfrak{P}$ usw. so zieht, daß sie zur Tischkante senkrecht sind, also wie in Fig. 148, die sich auf dieselben drei Punkte A, P, Q wie Fig. 147 bezieht.

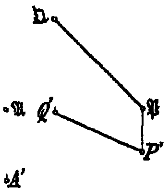


Fig 148

Diese Parallelprojektion unter 45° heißt **Kavalierperspektive** oder **Militärperspektive**. Das Wort **Perspektive** (vom lat. perspicere, hindurchsehen) bedeutet einen Anblick oder eine Abbildung, wir werden es später für andere Arten der Abbildung benutzen. Im Festungswesen waren **Kavaliere** hohe Festungswerke, deren Bestimmung es war, das vom Wall aus nicht sichtbare Gelände zu beherrschen. Da die Kavalierperspektive namentlich zur Darstellung von Befestigungen benutzt wurde, erhielt sie ihren altväterischen Namen. In früheren Zeiten wurde sie auch häufig zur anschaulichen Darstellung von Stadtplanen benutzt.

Das Wesen der Kavalierperspektive wird dadurch, daß man sagt, sie sei eine Parallelprojektion unter 45°, noch nicht vollkommen erschöpft. Ganz wesentlich ist vielmehr außerdem der Umstand, daß die abzubildenden Gegenstände auf der wagerecht gedachten Tafel als der Geländeebene aufgebaut sein sollen, so daß die Grundlinien der Bauwerke auf der Tafel selbst gelegen sind und sich in ihrer wahren Gestalt zeigen. Hierdurch zeichnen sich die in Kavalierperspektive entworfenen Bilder gegenüber denjenigen aus, die man **Ansichten aus der Vogelschau** nennt, mit denen sie oft verwechselt werden und von denen später (Nr. 166) die Rede sein wird.

Da man vor der Herstellung der Kavalierperspektive die senkrechte Projektion des Bauwerkes entwirft, liegt das Bedürfnis vor, dieser senkrechten Projektion einen eigenen Namen zu geben, wodurch sie von der schiefen Projektion unterschieden wird. Man nennt sie den **Grundriß**, und die wagerecht gedachte Tafel wird dementsprechend als die **Grundrißtafel** bezeichnet.

Ein einfaches Beispiel bietet ein auf der Tafel stehender, etwa hohler und oben offener **Würfel**, siehe Fig. 149. Diese Abbildung ist viel anschaulicher als die in senkrechter Projektion, die ja nur ein Quadrat zeigt. Wie dieser Würfelkasten haben die Bauwerke in der Hauptsache

lotrechte Seitenwände, und diese Seitenwände erscheinen eben im Grundriß bloß als Strecken, dagegen in Kavalierperspektive wirklich flächenhaft. Daraus ist auch die Regel zu ziehen, daß man vermeiden soll, wichtige Seitenwände parallel zur projizierenden Richtung anzunehmen. So z. B. stellt Fig. 150 denselben Würfel wie Fig. 149 dar, aber in ungeschickter Stellung: die Flächen *1265* und *3478* erscheinen nur als Strecken.

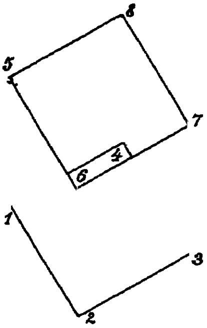


Fig 149

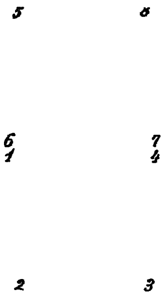


Fig 150

106. Dächer in Kavalierperspektive. In Fig. 151 ist der Grundriß eines Hauses durch zwei aneinandergesetzte Rechtecke gegeben. Die Höhe der Traufen (Nr 25) ist durch die Marke h_1 am Hohenmaßstab festgelegt. Die Neigungen der von den Traufen *1*, *2*, *3* ansteigenden Dachebenen seien gleich groß, ebenso die der Dachebenen über den Traufen *4*, *5*, *6*; die Neigungswinkel sind am Maßstab angegeben. Nach Nr. 25 entwirft man die senkrechte Projektion des Daches, indem man sich eines Höhenschnittes in beliebig gewahlter Höhe h_2 bedient. Alsdann ergibt sich die zugehörige Kavalierperspektive leicht: Die Grundrißprojektionen der Höhenlinien schneiden sich in den durch kleine Kreise kenntlich gemachten Punkten. Diese Punkte sind die

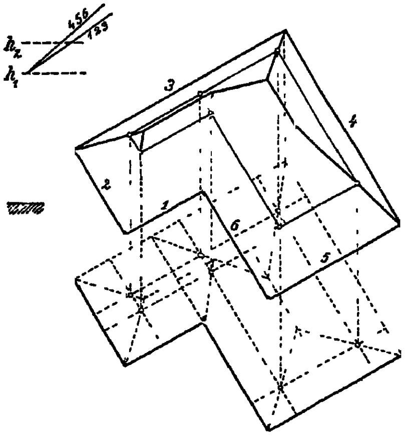


Fig 151

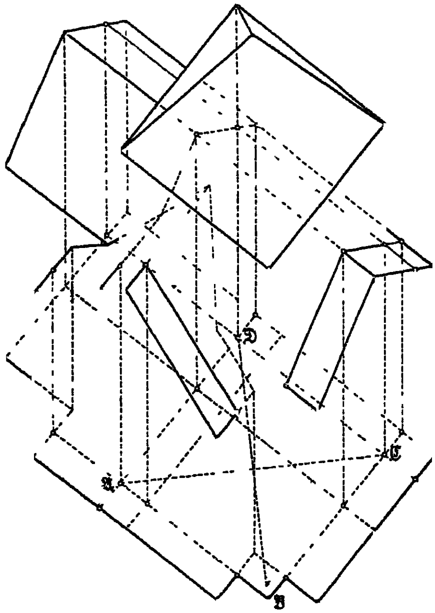


Fig 152

senkrechten Projektionen von Punkten der Grate und Kehlen, die in der Höhe h_2 liegen, so daß man die Parallelprojektionen dieser Punkte sofort bekommt. Alles übrige ergibt sich von selbst.

Der Vorteil der Anschaulichkeit kommt besonders zur Geltung, wenn man nachtraglich etwa einen Turm mit z. B. quadratischer Grundflache

𝔄𝔅ℭ𝔇 in ein Haus einbaut. Dabei benutzt man als Hilfsebenen die Seitenwände des Turms und bestimmt ihre Schnitte mit den Dachebenen, siehe Fig 152.

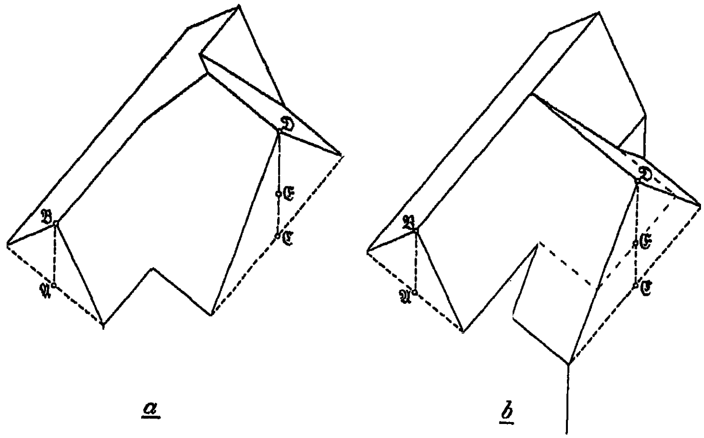


Fig 153

In Nr. 28 wurde gesagt, daß man zur Beseitigung nicht wagerechter Firste einzelne Traufen höher als andere legen kann. So lassen sich die in Fig. 153 a vorkommenden ansteigenden Firste beseitigen, indem man die Traufen des rechten Flügels hinreichend tiefer legt, nämlich um die Differenz von ℭ𝔇 und 𝔄𝔅, diese Differenz ist gleich der Strecke ℭ𝔈 in Fig 153 b, wo die schrägen Firste verschwunden sind

107. Böschungen in Kavalierperspektive. Ein Böschungskegel (Nr 31) hat in Kavalierperspektive als Grundlinie den zugehörigen Böschungskreis in seiner wahren Gestalt. Dagegen liegt das Bild 𝔖 der Kegelspitze S jetzt nicht im Mittelpunkt S' des Kreises, sondern weiter oben, indem S' 𝔖 die wahre Höhe des Kegels ist, siehe Fig 154. (Bei einer Zeichnung aus der Vogelschau, wovon in Nr. 105 die Rede war, würde die Grundlinie durchaus nicht als Kreis erscheinen, sondern als Ellipse, wie sich später herausstellen wird.)

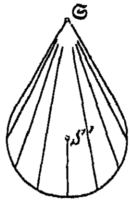


Fig. 154.

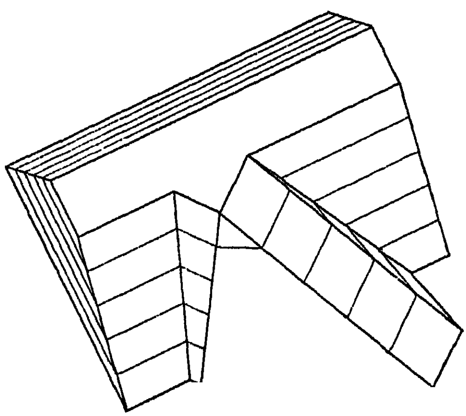


Fig 155

Man kann nun ohne weiteres alle Böschungsaufgaben (§ 3 des 1 Kap.) auch in Kavalierperspektive erledigen. So ist in Fig. 155 die Aufgabe gelöst, von einem wagerechten Dammweg einen fallenden Weg abzuzweigen, und zwar sind dabei dieselben Maße wie in Fig. 60 von Nr. 37 benutzt.

108. Verflachung oder Überhöhung der Kavalierperspektive. Es empfiehlt sich oft, zur Erzielung einer besseren Wirkung die Projektionsrichtung nicht unter 45°, sondern steiler zu wählen. Am bequemsten ist es, sie so steil anzunehmen, daß eine zur Tafel senkrechte Strecke im Bilde eine Länge bekommt, die zur wahren Länge in einem einfachen Verhältnis steht, z. B. halb so groß ist, so daß der Tangens des Winkels, unter dem die projizierenden Strahlen zur Tafel geneigt sind, gleich 2, daher der Winkel selbst gleich rund $63^1/_2$° ist. Die Zeichnung wäre demnach unter diesem Winkel zu betrachten. Selbstredend bedarf man der Bestimmung des Winkels nicht, zur Feststellung der Projektionsrichtung genügt die Angabe des Tangens.

Statt der Verflachung der Kavalierperspektive wird man seltener ihre Überhöhung benutzen, weil die Bilder zu hoch werden und die Richtung, aus der man die Zeichnung betrachten muß, einen zu geringen Winkel mit der Tafel bildet. Wird z. B. jedes Lot zur Tafel im Bilde in doppelter Länge dargestellt, so macht die Projektionsrichtung mit der Tafel einen Winkel von nur rund $26^1/_2$° aus. Die Überhöhung würde sich nur für die Darstellung allzu flacher Gegenstände empfehlen.

109. Übungen. 1) Ein Ikosaeder oder Dodekaeder in Kavalierperspektive zu zeichnen (Nr. 67, 68, 105)

2) Bestimmung des Schnittes einer Dreiecksebene mit einer Geraden in Kavalierperspektive.

3) Bestimmung der wahren Länge einer in Kavalierperspektive gegebenen Strecke.

4) Bestimmung der wahren Gestalt und Größe eines in Kavalierperspektive gezeichneten Dreiecks.

§ 2. Schatten bei Parallelbeleuchtung.

110. Schlagschatten. Die Lichtstrahlen, die von einer genügend weit entfernten Lichtquelle, z. B. von der Sonne, ausgehen, kann man als parallele Strahlen auffassen. Man spricht dann von einer Parallelbeleuchtung, während man von einer Zentralbeleuchtung redet, wenn die Lichtquelle ein im Endlichen gelegener Punkt ist. Bis auf weiteres untersuchen wir nur die Parallelbeleuchtung oder, wie man auch sagt, die Beleuchtung durch die Sonne.

Die Oberfläche eines undurchsichtigen Körpers wird zum Teil von Lichtstrahlen getroffen, und an allen Treffstellen ist sie hell, sonst dunkel. Ein die Oberfläche treffender Lichtstrahl endet dort eigentlich seine Laufbahn als Lichtstrahl. Dennoch nennt man der Einfachheit des Ausdrucks halber die ganze unbegrenzte Gerade des Strahls einen Lichtstrahl. Hinter dem Körper, von der Lichtquelle aus gerechnet, ist ein lichtleerer zylindrischer Raum, begrenzt von allen denjenigen Lichtstrahlen, die den Körper streifen. Daß dieser Raum lichtleer ist, wird jedoch nur dann bemerkbar, wenn ein anderer Körper ganz oder zum Teil in diesem Raum liegt, indem dieser dann ganz oder zum Teil verdunkelt wird. Wäre der erste Körper nicht vorhanden, so würde die Oberfläche des zweiten Körpers einerseits beleuchtet sein; durch den ersten Körper aber wird ein Teil seiner an sich hellen Oberfläche oder seine ganze Oberfläche in Schatten gesetzt.

Man sagt, daß der zweite Körper vom ersten einen *Schlagschatten* empfange.

Ein Körper kann auch auf sich selbst einen Schlagschatten werfen, namlich wenn er Einknickungen oder Einbiegungen hat, wie z. B. ein Kreuz. Zwei Körper können so gelegen sein, daß sowohl der eine auf den anderen als auch dieser auf jenen einen Schlagschatten wirft, wie z. B. zwei ineinanderhangende Ringe. Ein Körper kann auf mehrere Körper Schlagschatten werfen. Dann zerfallt sein gesamter Schlagschatten in mehrere getrennte Teile

Der wirkliche Schlagschatten eines einzelnen Punktes P ist derjenige Punkt, in dem die Verlangerung des nach P gehenden Lichtstrahls zum ersten Mal — wenn überhaupt — einen undurchsichtigen Gegenstand trifft. Indem wir immer annehmen wollen, die unendlich ferne Lichtquelle befinde sich *oberhalb* der Tafel, verstehen wir unter dem Schlagschatten, den ein Punkt P auf die Tafel wirft, den Punkt $\mathfrak{P}$, in dem der durch P gehende Lichtstrahl die Tafel schneidet, und zwar auch dann, wenn dieser Schatten gar nicht zustande kommt, sei es, daß ein undurchsichtiger Gegenstand schon vorher den Schatten auffangt, sei es, daß die Tafel durchsichtig ist, sei es schließlich. daß der Punkt P selbst unter der Tafel liegt. Auch von Punkten im Innern undurchsichtiger Gegenstande, z. B. vom Mittelpunkt einer Kugel, kann man geometrisch die Schlagschatten auf der Tafel bestimmen, obgleich diese Schatten physikalisch gar nicht zustände kommen. Derartige tatsachlich nicht in Erscheinung tretende, also nicht physikalische und nicht wahrnehmbare Schlagschatten sind für die Konstruktion der wirklich vorkommenden Schatten nicht selten nutzlich. Wir werden sie gelegentlich *geometrische Schlagschatten* nennen

Der Schlagschatten, den ein Punkt P auf die Tafel wirft, ist nichts anderes als die in der Lichtrichtung ausgeführte Parallelprojektion $\mathfrak{P}$ des Punktes auf die Tafel. Nach Nr. 104 ist also der Schlagschatten, den eine Gerade g auf die Tafel wirft, ebenfalls eine Gerade $\mathfrak{g}$, es sei denn, daß g selbst die Lichtrichtung hat, in welchem Falle der Schlagschatten von g bloß ein Punkt ist. Von diesem Sonderfall abgesehen, *ist der geometrische Schlagschatten von g eine Gerade $\mathfrak{g}$, die durch den Spurpunkt von g geht.* Kommt der Schlagschatten auf der Tafel wirklich zustande, so ist es freilich immer nur ein Teil von $\mathfrak{g}$, der den Schatten wirft, namlich nur der über der Tafel gelegene Teil. Parallele Strecken, die nicht die Lichtrichtung haben, werfen parallele Schlagschatten auf die Tafel, und die Längen dieser Schlagschatten verhalten sich zueinander wie die Strecken selbst

Kennt man von einem Punkt P die senkrechte Projektion P' und die Höhe, so kann man nach Nr. 105 seinen Schlagschatten $\mathfrak{P}$ ermitteln, sobald man nur für einen durch seine senkrechte Projektion A' und Höhe gegebenen Punkt A den Schlagschatten $\mathfrak{A}$ angenommen hat.

Der Schlagschatten, den ein Körper auf die Tafel wirft, ist dasjenige Flächenstück der Tafel, das von den Schlagschatten aller Punkte des Körpers bedeckt wird.

111. Eigenschatten einer Ebene. Der geometrische Schlagschatten, den ein ebenes Dreieck ABC auf die Tafel wirft, ist die Fläche des Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, das sich durch die Parallelprojektion in der Lichtrichtung

ergibt. Er schrumpft auf eine Strecke zusammen, wenn die Ebene ABC zur Lichtrichtung parallel ist, also Streiflicht oder Dämmerlicht empfängt, indem beide Seiten der Ebene gleich matt beleuchtet werden. Ist die Ebene ABC nicht zur Lichtrichtung parallel, so empfängt nur eine ihrer beiden Seiten Licht. Man sagt, daß die andere Seite Eigenschatten habe. Ein Beobachter, der von der Lichtrichtung her auf das Dreieck ABC blickt, sieht die helle Seite, und für ihn deckt sich A mit $\mathfrak{A}$, B mit $\mathfrak{B}$ und C mit $\mathfrak{C}$. Verfolgt er den Umfang des Dreiecks ABC von A über B und C bis A zurück, so durchläuft sein Blick den Umfang des Dreiecks $\mathfrak{ABC}$ ebenfalls von $\mathfrak{A}$ über $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ bis $\mathfrak{A}$ zurück. Für den Beobachter hat also die helle Seite des Dreiecks ABC denselben Umlaufsinn wie der Schlagschatten $\mathfrak{ABC}$. Wenn angenommen wird, der Beobachter sehe senkrecht auf die Tafel, so erblickt der Beobachter allemal die Oberseite des Dreiecks. Diese Oberseite hat aber denselben Umlaufsinn wie die senkrechte Projektion $A'B'C'$ des Dreiecks. Folglich ist die Oberseite des Dreiecks ABC hell, sobald die senkrechte Projektion $A'B'C'$ denselben Umlaufsinn wie der Schlagschatten $\mathfrak{ABC}$ hat. Da nun, wie gesagt, die senkrechte Projektion dem Betrachter den Anblick der Oberseite bietet, ergibt sich die Regel.

Die senkrechte Projektion $A'B'C'$ eines undurchsichtigen ebenen Dreiecks ABC ist hell oder dunkel, je nachdem ihr Umlaufsinn mit dem des Schlagschattens $\mathfrak{ABC}$, den das Dreieck auf die Tafel wirft, übereinstimmt oder ihm entgegengesetzt ist.

Diese Regel versagt, wenn dem Dreieck $\mathfrak{ABC}$ kein Umlaufsinn zukommt, nämlich wenn es in eine Strecke zusammenschrumpft, also im Fall des Streiflichts Sie versagt ferner, wenn der senkrechten Projektion $A'B'C'$ kein Umlaufsinn zukommt, nämlich wenn sie in eine Strecke zusammenschrumpft. Dann bedarf man der Regel aber auch gar nicht, weil die senkrechte Projektion keine der beiden Seiten des Dreiecks zeigt, denn in diesem Fall steht die Ebene des Dreiecks auf der Tafel senkrecht.

112. Zurückgehen in der Lichtrichtung. Aus den Schlagschatten, die zwei Gegenstände auf die Tafel werfen, kann man erkennen, welche Schlagschatten sie aufeinander werfen. Denn ein Punkt P des einen Gegenstandes kann nur dann auf eine Stelle Q der Oberfläche des anderen Gegenstandes einen Schatten werfen, wenn P und Q auf demselben Lichtstrahl liegen und daher ihre Schlagschatten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ auf der Tafel zusammenfallen. Man sucht deshalb die sogenannten Deckstellen derjenigen Schlagschatten auf, die auf der Tafel durch die beiden Gegenstände verursacht werden, und verfolgt von ihnen aus rückwärts die Lichtstrahlen, wodurch man zu den zugehörigen Punkten P und Q der Gegenstände gelangt. Ist etwa Q diejenige Stelle, die man beim Zurückgehen in der Lichtrichtung zuerst erreicht, d. h. liegt P vor Q — von der Lichtquelle aus gerechnet —, so stellt Q den Schlagschatten dar, den P wirft.

Der einfachste Fall ist in Fig. 156 dargestellt. Hier sind zwei Strecken AB und CD durch ihre senkrechten Projektionen $A'B'$, $C'D'$ und Höhen gegeben. Der Schlagschatten $\mathfrak{A}$ von A ist beliebig gewählt worden. Wie in Nr. 105 ergeben sich dann die Schlagschatten $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ von B, C, D,

indem man in der Nebenfigur $O\mathfrak{A}$ gleich der Strecke $A'\mathfrak{A}$ der Hauptfigur auftragt und durch die Marken B, C, D die Parallelen zu $A\mathfrak{A}$ zieht Man erhält dadurch auf der Wagerechten Punkte $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, und die Schatten von B, C, D haben nun von B', C', D' die von der Wagerechten zu entnehmenden Entfernungen $O\mathfrak{B}$, $O\mathfrak{C}$, $O\mathfrak{D}$. Die Schlagschatten $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ haben eine Deckstelle, die sowohl der Schlagschatten $\mathfrak{P}$ eines Punktes P von AB als auch der Schlagschatten $\mathfrak{Q}$ eines Punktes Q von CD ist. Im vorliegenden Fall wirft die Stelle P von AB auf die Strecke CD einen Schlagschatten und zwar nach Q. In Fig. 156 sind, wie es auch später geschehen soll, die senkrechten Projektionen $A'\mathfrak{A}$, $B'\mathfrak{B}$ usw. der Lichtstrahlen durch Pfeile gekennzeichnet.

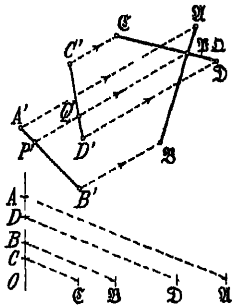


Fig 156

Einen anderen Fall stellt Fig. 157 dar Hier ist ein Punkt P sowie ein Dreieck ABC gegeben, beide vermöge der senkrechten Projektionen und Höhen der Punkte. Nachdem man den Schlagschatten $\mathfrak{A}$ eines Punktes A angenommen hat, ergibt sich der des Punktes P und des ganzen Dreiecks ABC ohne weiteres Im Fall unserer Figur hat die Projektion $A'B'C'$ des Dreiecks denselben Umlaufsinn wie der Schlagschatten $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, d. h die Projektion zeigt die helle Seite des Dreiecks. Auf diese helle Seite wirft nun der Punkt P einen Schlagschatten $\mathfrak{P}$, der mit Hilfe der Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{P}$, die $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{Q}$ trifft, gefunden wird, da man weiß, daß $\mathfrak{Q}$ der Schatten eines Punktes Q von BC, also $\mathfrak{A}\mathfrak{Q}$ der Schatten einer Geraden AQ der Dreiecksebene ist

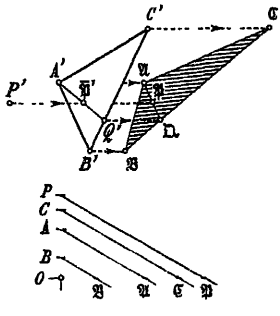


Fig 157

113. Ermittlung von Durchdringungen mit Hilfe der Schlagschatten. Kennt man die senkrechte Projektion g' einer Geraden sowie den Schlagschatten $\mathfrak{g}$, den die Gerade auf die Tafel wirft, so kennt man, selbst wenn man nichts über die Höhen der Punkte und über die Lichtrichtung weiß, auch den S p u r p u n k t der Geraden, denn er ist der Schnittpunkt von g' mit $\mathfrak{g}$ (Nr. 110).

Hat man also in Fig. 158 den Schlagschatten $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ eines Dreiecks ABC hergestellt, so sind die Punkte X, Y, Z, in denen $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ bzw. $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ schneiden, die Spurpunkte der Seiten des Dreiecks, d h. X, Y, Z liegen in einer Geraden, nämlich der S p u r g e r a d e n s der Ebene ABC (Nr. 12).

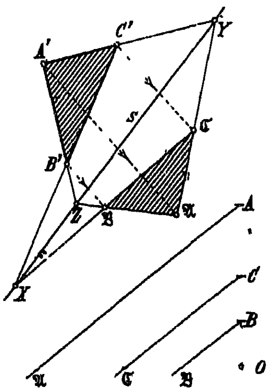


Fig 158

Hiernach kann der Schlagschatten zur Ermittlung der Schnitte mit der Tafel dienen Man kann aber mit seiner Hilfe auch die gegenseitigen Schnitte von beliebigen Geraden mit Ebenen oder von beliebigen Ebenen mit Ebenen finden. Dies erläutert Fig. 159, worin die senkrechten Projektionen eines Dreiecks ABC und eine Strecke

PQ sowie die Höhen aller fünf Punkte gegeben sind. Nachdem man den Schatten 𝔄 von A beliebig gewählt hat, ergeben sich in bekannter Weise die Schlagschatten 𝔄𝔅ℭ und 𝔓𝔔. Weil $A'B'C'$ in unserer Figur denselben Umlaufsinn wie 𝔄𝔅ℭ hat, sieht man die helle Seite des Dreiecks. Auf sie wirft nun die Strecke PQ einen Schlagschatten. Man ermittelt ihn, indem man von den Deckstellen von 𝔓𝔔 mit den Seiten des Dreiecks 𝔄𝔅ℭ zurückgeht. Zum Überfluß sind alle drei Deckstellen 𝔛, 𝔜, ℨ verwendet; die auf 𝔄𝔅 ergibt sich allerdings erst, wenn man die Schatten verlängert. Man hat sich also vorzustellen, die Strecken PQ und AB seien über Q und A hinaus fortgesetzt worden. Durch Zurückgehen in der Lichtrichtung bekommt man drei Punkte X, Y, Z auf BC, CA, AB. Man kann auch auf PQ zurückgehen, wodurch man drei Punkte U, V, W erhalt, die allerdings eigentlich nicht gebraucht werden, deren Angabe aber nützlich ist Diese drei Punkte U, V, W werfen auf die Ebene ABC die Schlagschatten X, Y, Z, und da der Schlagschatten, den die Strecke PQ auf die Ebene ABC wirft, auch eine geradlinige Strecke sein muß, liegen X', Y', Z' in gerader Linie. Die Gerade XYZ ist der geometrische Schlagschatten der Geraden PQ auf der Ebene ABC. Als wirklich wahrnehmbarer oder physikalischer Schlagschatten kommt zunachst nur das Stück zwischen den von P und Q ausgehenden Lichtstrahlen in Betracht, aber auch nur ein Teil davon Denn der physikalische Schlagschatten muß allemal, von der Lichtquelle aus gerechnet, hinter dem schattenwerfenden Gegenstand gelegen sein. Die Reihenfolge muß also sein:

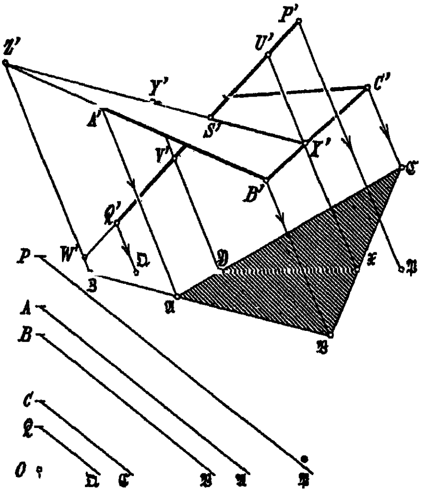


Fig. 159

Lichtquelle → Gegenstand → physikalischer Schlagschatten.

Demnach ist nur dasjenige Stück von $X'Y'Z'$ zu benutzen, das, von der Lichtquelle aus gerechnet, jenseits PQ liegt. Dieses Stück ist in Fig. 159 kraftig ausgezogon. Es geht von X' bis zu einem Punkt S', dem Schnittpunkt von $P'Q'$ mit $X'Y'$. Also schneidet die Gerade PQ die Ebene ABC in S, denn der Schlagschatten XYZ, den eine Gerade PQ auf eine Ebene ABC wirft, geht durch den Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene (Nr. 110).

Man kann also mit Hilfe der auf die Tafel fallenden Schlagschatten den Schnitt S einer Geraden PQ mit einer Ebene ABC bestimmen. Dies Verfahren kommt geometrisch darauf hinaus, daß man durch PQ eine Hilfsebene legt, nämlich die Ebene aller PQ treffenden Lichtstrahlen, die sogenannte Lichtebene von PQ. Man könnte sie auch als Schattenebene bezeichnen, aber beide Namen sind mangelhaft, da jeder nur für einen Teil der Hilfsebene zutrifft.

Die Konstruktion des Schnittpunktes S ist auch dann ausführbar, wenn der Schatten, den PQ auf ABC wirft, gar nicht zu sehen ist, nämlich wenn das Dreieck ABC auf seiner Oberseite Eigenschatten hat.

Das auseinandergesetzte Verfahren gestattet auch sofort festzustellen, welcher Teil der Strecke PQ sichtbar ist. Denn da in Fig. 159 der Schlagschatten SX zu sehen ist, muß auch das zugehörige Stück SU der Strecke PQ sichtbar sein, d. h von der Strecke PQ liegt das Stück SP oberhalb des Dreiecks

Wiederholte Anwendung desselben Verfahrens ermöglicht es, mit Hilfe der Schlagschatten, die zwei Dreiecke ABC und PQR auf die Tafel werfen, die Durchdringung zweier Ebenen zu ermitteln, indem man die Schatten herstellt, die die Dreiecke aufeinander werfen. Hierbei ist zu bemerken: Wenn die Dreiecke ABC und PQR einander wirklich schneiden, besteht ihr Schnitt aus einer Strecke. Die beiden Endpunkte der Strecke sind entweder die Punkte, in denen zwei Kanten des einen Dreiecks die Ebene des anderen Dreiecks treffen, oder der eine Endpunkt ist der Schnittpunkt einer Kante des ersten Dreiecks mit der Ebene des zweiten und der andere der Schnittpunkt einer Kante des zweiten Dreiecks mit der Ebene des ersten Im ersten Falle tritt eine Durchdringung des einen Dreiecks durch das andere, im zweiten Falle ein gegenseitiges Anschneiden beider Dreiecke ein Hierauf kommen wir gelegentlich (in Nr 200) zurück.

114. Grenzen der Eigenschatten und Schlagschatten konvexer Vielflache. Liegt ein geschlossenes konvexes Vielflach (Nr 65) vor, so durchdringt ein Lichtstrahl, der diesen Körper trifft, seine Oberfläche nur zweimal, einmal beim Eintritt und dann beim Austritt Beide Stellen fallen zusammen, wenn der Strahl den Körper streift Es kann aber auch Lichtstrahlen geben, die den Körper längs Strecken seiner Oberfläche streifen, wenn nämlich ein Vieleck der Oberfläche im Streiflicht liegt (Nr. 111). Jedenfalls erkennt man Kein Teil eines geschlossenen konvexen Vielflachs kann einen Schlagschatten auf die eigene Oberfläche des Vielflachs werfen Ein Vieleck der Oberfläche ist deshalb entweder durchaus hell oder durchaus dunkel, oder es liegt im Streiflicht. Die Gesamtheit derjenigen Vielecke der Oberfläche, die dunkel sind, weisen den sogenannten Eigenschatten des Vielflachs auf. Diejenigen Kanten, die diese dunklen Vielecke von den hellen trennen, bilden die Grenze des Eigenschattens. Zu dieser Grenze wollen wir auch diejenigen Vielecksflächen rechnen, die unter Umständen im Streiflicht liegen. Die Grenze des Eigenschattens ist also eine geschlossene gebrochene Linie, deren Strecken auch durch Vielecke im Streiflicht ersetzt sein können.

Nun stelle man von jedem einzelnen Vieleck der Oberfläche den Schlagschatten auf der Tafel so her, als ob nur dies einzelne Vieleck, nicht der ganze Körper vorhanden wäre Die Gesamtheit dieser Schlagschatten bildet den Schlagschatten des Vielflachs. Das Netz der Schlagschatten aller Vielecke überdeckt ein gewisses Gebiet der Tafel überall doppelt.

Unter AB sei eine der Grenzkanten des Eigenschattens verstanden. An AB möge also ein außen helles sowie ein außen dunkles Vieleck grenzen, siehe Fig. 160, worin der Einfachheit halber nur dreieckige

Stücke *ABC* und *ABD* der beiden Vielecke dargestellt sind, was die Allgemeingültigkeit der folgenden Betrachtungen nicht beeinträchtigt. Die Figur sei der besseren Anschaulichkeit wegen so entworfen worden, daß die in der Zeichnung sichtbaren Dreieckseiten zugleich ihre Außenseiten sind; man hat sich also den Korper unterhalb der beiden Dreiecke vorzustellen. Nach der Regel von Nr 111 muß der Schlagschatten 𝔄𝔅ℭ des hellen Dreiecks *ABC* denselben Umlaufsinn wie die Projektion *A'B'C'* haben, dagegen der Schlagschatten 𝔄𝔅𝔇 des dunklen Dreiecks *ABD* den umgekehrten Umlaufsinn wie die Projektion *A'B'D'*. Daraus folgt Die beiden Schlagschatten 𝔄𝔅ℭ und 𝔄𝔅𝔇 liegen auf derselben Seite von 𝔄𝔅 Ist nun 𝔓 ein Punkt der Tafel, der auf der anderen Seite von 𝔄𝔅 liegt, so ergibt sich daraus, daß der nach 𝔓 gehende Lichtstrahl den Korper überhaupt nicht trifft, mit anderen Worten· Die Tafel wird jenseits 𝔄𝔅 nicht in Schatten gesetzt, d h. die Strecke 𝔄𝔅 gehort zur Umrandung des Gesamtschlagschattens des Korpers. Ist also *AB* ein Stuck der Grenze des Eigenschattens, so ist auch 𝔄𝔅 ein Stuck der Grenze des Schlagschattens.

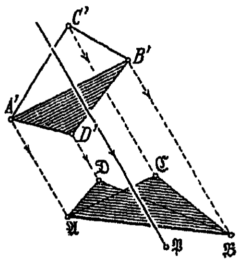


Fig 160

Dieser Schluß laßt sich umkehren Ist 𝔄𝔅 ein Stück der Umrandung des Schlagschattens des Korpers, so ist 𝔄𝔅 der Schlagschatten einer Kante *AB*, langs deren zwei Ebenenstucke *ABC* und *ABD* so aneinanderstoßen, daß ihre Schlagschatten 𝔄𝔅ℭ und 𝔄𝔅𝔇 beide aut dieselbe Seite von 𝔄𝔅 fallen. Dann aber stimmt eine der beiden Flachen *ABC* und *ABD* in ihrem Umlaufsinn mit ihrem Schlagschatten uberein und die andere nicht, d h. die eine ist hell, die andere dunkel, was besagt, daß *AB* zur Grenze des Eigenschattens gehört.

Was diejenigen Vielecke betrifft, die unter Umstanden im Streiflicht liegen, so ist daran zu erinnern, daß wir sie vorhin ausdrucklich mit zur Grenze des Eigenschattens gerechnet haben Ihre Schlagschatten sind bloß Strecken, und diese Strecken gehören der Grenze des Schlagschattens des Korpers an Demnach gilt der Satz.

Der Schlagschatten, den die Grenze des Eigenschattens eines geschlossenen konvexen Vielflachs auf eine Ebene wirft, ist die Grenze des Schlagschattens, den das Vielflach auf die Ebene wirft.

Hieraus ergibt sich das Verfahren zur Ermittlung der Grenze des Eigenschattens Man stellt zuerst den Schlagschatten auf der Tafel her und geht von seiner Grenzlinie in der Lichtrichtung zum Körper zuruck. Zur Erlauterung diene die Zeichnung eines schattenwerfenden Würfels in Fig 161. Die senkrechte Projektion des Würfels ist nach Nr. 53, 54 mit Hilfe des Spurdreiecks der von einer Ecke *O* ausgehenden Kanten entworfen worden, wie es zum Teil in der Zeichnung angedeutet ist. Wird der Schlagschatten 𝔒 der Ecke *O* beliebig auf der Tafel gewählt, so sind die Schlagschatten der drei von *O* ausgehenden Kanten auf den Geraden von 𝔒 nach den Ecken des Spurdreiecks gelegen. Daher ist es leicht, die Schlagschatten aller Eckpunkte und damit das Doppelnetz der Schlagschatten aller sechs Quadrate ausfindig zu machen. Der Rand des Wurfelschlagschattens ist ein Sechseck 𝔒 *I II . . . V* mit

zu zweien parallelen Kanten Durch Zurückgehen von dieser Grenze in der Lichtrichtung ergibt sich die aus sechs Kanten bestehende Grenze $0\,1\,2\ldots5\,0$ des Würfeleigenschattens. Man braucht schließlich nur noch für irgendeines der Quadrate nach Nr. 111 festzustellen, ob es hell oder dunkel ist. Dabei muß vor einem falschen Schluß gewarnt werden Die Regel von Nr 111 gibt Auskunft über Hell oder Dunkel auf der Oberseite eines ebenen Flächenstücks Von den sechs Quadraten des Würfels sind aber nur drei solche, deren Oberseiten zugleich

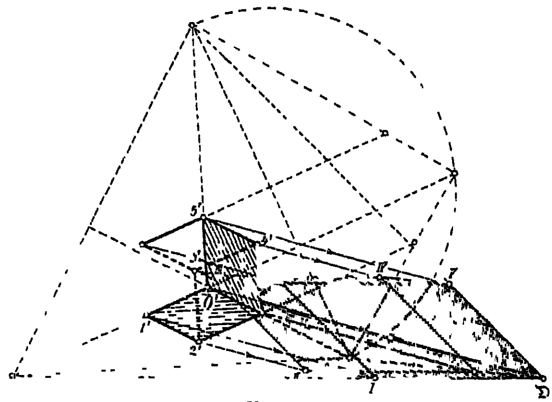


Fig 161

Außenseiten des Würfels sind, nämlich die drei sichtbaren Die drei anderen haben ihre Oberseiten im Innern des Würfels, die auf sie angewandte Regel von Nr 111 würde also gerade das Falsche ergeben Sobald man nur darüber Bescheid weiß, ob eine einzelne Fläche des Körpers hell oder dunkel ist, steht es auch für alle anderen Flächen fest, da ja die Eigenschattengrenze alle hellen von allen dunklen trennt

115. Grenzen der Eigenschatten und Schlagschatten konkaver Vielflache. Ein nicht konvexes Vielflach heißt konkav Unter den geschlossenen konkaven Vielflachen gibt es auch verschränkte, nämlich solche, deren Vielecksflächen sich außer in ihren Rändern sonst noch durchsetzen Bei ihnen kann man nicht von einem bestimmten Innern, also auch nicht von einem Körper des Vielflachs reden Wir betrachten nur nicht verschränkte, aber geschlossene konkave Vielflache und die von ihnen eingeschlossenen Körper

Der in der letzten Nummer bewiesene Satz gilt für derartige Vielflache nur dann, wenn man darin die Grenzen des Schlagschattens und des Eigenschattens durch die sogenannten geometrischen Grenzen dieser Schatten ersetzt, von denen die wahrnehmbaren oder physikalischen Schattengrenzen nur Teile zu sein brauchen Es kann nämlich Lichtstrahlen geben, die nicht nur einmal in die Oberfläche des Körpers eintreten und dann wieder austreten, sondern noch ein zweites Mal und vielleicht noch öfter Eine Gerade kann z. B sowohl den Schaft eines Kreuzes als auch einen Kreuzesarm durchbohren. Infolge dieses Umstandes kann die Gesamtheit der Schlagschatten aller Vielecke des Körpers so beschaffen sein, daß ein Teil der Tafel mehr als zweimal, nämlich viermal oder sechsmal usw von Schlagschatten einzelner Vielecke überdeckt wird. Selbstverständlich zieht dies nicht nach sich, daß etwa ein Teil des Schlagschattens dunkler wäre, aber sehr wohl folgt daraus, daß die geometrische Grenze des Schlagschattens nicht nur aus seinem wahrnehmbaren äußeren Umriß zu bestehen braucht, vielmehr ihre Wahrnehmbarkeit zum Teil durch andere darüberfallende Schlagschatten aufgehoben wird. Wir setzen daher fest· Ist AB eine

nte des Körpers und liegen die Schlagschatten der längs AB aneinanderstoßenden beiden Flächen auf einerlei Seite des Schlagschattens $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ von AB, so soll $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ mit zur geometrischen Grenze des Schlagschattens rechnen, ganz einerlei, ob nicht etwa andere Teile des Körpers noch über $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ Schlagschatten werfen, so daß das Stück $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ der Grenze des Schlagschattens gar nicht oder nur zum Teil physikalisch erkennbar ist. Wenn ein Teil der Tafel mehr als doppelt durch Schlagschatten einzelner Vielecke des Vielflachs überdeckt wird, zeigt dies an, daß der Körper auch auf sich selbst Schlagschatten wirft, und durch Zurückgehen von den Deckstellen in der Lichtrichtung findet man diejenigen Vielecke, worauf andere Schatten werfen. Der dunkle Teil der Oberfläche des Vielflachs besteht dann nicht bloß aus Eigenschatten, sondern auch aus Schlagschatten. Der Unterschied ist physikalisch nicht wahrzunehmen, wohl aber laßt er sich geometrisch feststellen. Ein Vieleck der Oberfläche des Körpers weist ja dann und nur dann Eigenschatten auf, wenn seine Außenfläche an sich auf Grund der Regel von Nr. 111 dunkel ist. Wenn also ein Teil eines Vielecks oder seine ganze Fläche Schatten trägt, obwohl die Fläche an sich hell sein mußte, liegt ein Schlagschatten vor, den ein anderer Teil des Körpers auf diese Fläche wirft. Wenn man demgemäß zwischen dem Eigenschatten auf der Oberfläche und dem etwa noch auf der Oberfläche vorkommenden Schlagschatten unterscheidet, gilt auch jetzt der Satz

Der Schlagschatten, den die geometrische Grenze des Eigenschattens eines geschlossenen konkaven und nicht verschränkten Vielflachs auf eine Ebene wirft, ist die geometrische Grenze des Schlagschattens, den das Vielflach auf die Ebene wirft.

Dies wird durch Fig. 162 erläutert, die die senkrechte Projektion eines aus fünf kongruenten Würfeln zusammengesetzten *Kreuzes* nebst den Schatten darstellt Die Zeichnung stellt man her, indem man wie in Fig. 161 von Nr. 114 zunächst einen Würfel und seinen Schlagschatten entwirft und dann die übrigen Würfel ansetzt Die geometrische Grenze des Schlagschattens ist die im Schlagschatten auf der Tafel kräftig ausgezogene geschlossene gebrochene Linie $I\ II \ldots XVIII\ I$, die sich zweimal selbst überschneidet. Durch Zurückgehen von ihr in der Lichtrichtung kommt man zu denjenigen Kanten des Kreuzes, die zur Grenze $1\ 2 \ldots 18\ 1$ des Eigenschattens gehören. Die physikalische Grenze des Schlagschattens auf der Tafel, der sichtbare Umriß dieses Schlagschattens, ist nur ein Teil der geometrischen Grenze. Die Stellen, an denen die geometrische Grenze

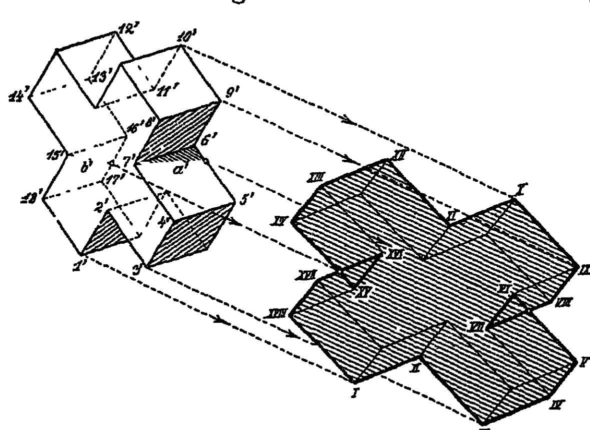


Fig 162

des Schlagschattens sich selbst schneidet, nämlich die Schnittpunkte von *V VI* und *VII VIII* sowie von *XIV XV* und *XVI XVII*, geben durch Zurückgehen in der Lichtrichtung die Stellen auf *5 6* und *16 17*, auf die Schatten der Kanten *7 8* und *15 16* fallen, so daß sich auf dem Körper noch zwei Grenzlinien *a* und *b* von Schlagschatten ergeben. Die Grenze *b* ist nicht sichtbar.

Noch sei bemerkt: Liegt ein Vielflach auf der Tafel, so daß eine seiner Flächen der Tafel angehört, so ist diese Fläche allemal sowohl Teil des Eigenschattens als auch Teil des Schlagschattens auf der Tafel. Aber dieser Teil wird durch den Körper verdeckt und ist also unsichtbar. Deshalb wird er leicht bei der Feststellung der Gesamtgrenzen übersehen, wovor gewarnt werden muß.

116. Schatten von Hohlkörpern. Die Betrachtungen lassen sich leicht auf Hohlkörper ausdehnen, z. B. auf den Fall eines hohlen Würfels, dem eine der sechs Flächen fehlt. Man stelle sich nämlich zunächst vor, daß die Wandungen des Hohlkörpers eine gewisse, wenn auch geringe Dicke haben. Dann bildet die gesamte Oberfläche, zu der auch die nach dem Hohlraum gerichteten Teile gehören, ein geschlossenes und nicht verschranktes konkaves Vielflach, auf das die Betrachtungen der letzten Nummer anwendbar sind. Nun lasse man die Dicke der Wandungen zu Null werden. Dann erkennt man, daß nunmehr von jeder Fläche des Hohlkörpers beide Seiten, auch die nach dem Hohlraum hin gerichtete, als Außenseiten der gesamten Oberfläche gelten. Demnach hat der Hohlwürfel nicht fünf, sondern zehn Außenflächenstücke. Man muß infolgedessen auch die Schlagschatten der Vielecke auf der Tafel doppelt in Anrechnung bringen, wenn man die Betrachtungen der letzten Nummer folgerichtig durchführen will.

In Fig. 163 mit der Darstellung des Hohlwürfels besteht die geometrische Grenze des Schlagschattens auf der Tafel nicht nur aus dem Umriß des Schattens, sondern auch aus den beiden Strecken ℭ𝔊 und 𝔊ℌ. Denn an *CG* schließt sich auf dem Hohlkörper sowohl die äußere als auch die innere Fläche des Quadrats *CGBA* als Teil der gesamten Oberfläche an, und beide werfen denselben Schatten, d. h. beide werfen den Schlagschatten nach derselben Seite von ℭ𝔊 hin, so daß ℭ𝔊 zur geometrischen Grenze des Schlagschattens gehört. In bezug auf 𝔊ℌ gilt Entsprechendes. Geht man von der vollständigen geometrischen Grenze des Schlagschattens in der Lichtrichtung zurück, so gelangt man zur vollständigen Grenze des Eigenschattens. Sie besteht aus dem räumlichen Sechseck *ABEHFCA* und den beiden Kanten *CG* und *GH*. Um festzustellen,

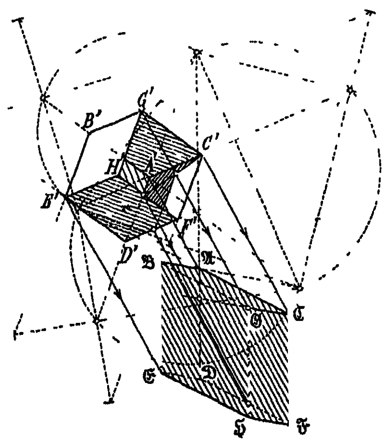


Fig. 163

welcher Teil der gesamten Oberfläche Eigenschatten hat, genügt es, auf eine der sichtbaren Flächen, z. B. auf die Fläche *BGHE*, die Regel von Nr. 111 anzuwenden, die zeigt, daß diese Fläche hell ist. Mit ihr sind dann auch alle anderen Flächen hell, die auf derselben Seite der Grenzlinie des Eigenschattens liegen. Schließlich muß man noch die auf den Hohlkörper selbst fallenden Schlagschatten ermitteln. Diese Schlagschatten können nur auf an sich hellen, d. h. keinen Eigenschatten aufweisenden Flächen auftreten. Da in unserer Figur nur die Innenfläche *ACFD* zugleich sichtbar und ohne Eigenschatten ist, bedarf es nur der Ermittlung des auf sie fallenden Schlagschattens. Man geht von den auf 𝔄𝔈𝔉𝔇 gelegenen Teilen der Grenzen 𝔈𝔊 und 𝔊𝔋 des geometrischen Schlagschattens in der Lichtrichtung zurück. Dabei kann man auch Verlängerungen der Strecken benutzen, z. B. die Verlängerung von 𝔈𝔊, und den Schnitt dieser Verlängerung mit 𝔄𝔇.

117. Schatten krummflächiger Körper. Die Betrachtungen lassen sich auch auf die Schatten krummflächig begrenzter Körper ausdehnen. Wir werden auf Einzelheiten später gelegentlich zu sprechen kommen. Hier genüge eine allgemeine Bemerkung. Eine krumme Oberfläche kann man sich immer durch einen Grenzübergang aus einer Oberfläche entstanden denken, die aus sehr vielen und sehr kleinen ebenen Flächenstücken besteht. So kann man den Zylinder aus einem Prisma, den Kegel aus einer Pyramide hervorgehen lassen. Deshalb findet man auch jetzt den Satz bestätigt, daß die geometrische Grenze des Schlagschattens auf der Tafel dasselbe ist wie der Schlagschatten, den die geometrische Grenze des Eigenschattens auf die Tafel wirft.

Wenn z. B. auf der Tafel ein gerader Kegel steht, dessen Spitze *S* den Schlagschatten 𝔖 auf die Tafel wirft, siehe Fig. 164 a, ersetze man den Grundkreis zunächst durch ein Vieleck, wodurch man zu einer Pyramide gelangt, siehe Fig. 164 b. Die Dreiecke der Pyramide haben als Schlagschatten die Dreiecke mit der gemeinsamen Spitze 𝔖 und den Kanten des Vielecks als gegenüberliegenden Seiten, und der Schlagschatten der Grundfläche ist diese Grundfläche selbst. Demnach besteht die Grenze des Schlagschattens aus zwei Strecken 𝔖*P* und 𝔖*Q* und einem Stück *PRQ* des Randes der Grundfläche. Wir erinnern hierbei an die letzte Bemerkung in Nr. 115. Der Schatten, der unter der Grundfläche liegt, ist nicht sichtbar, aber doch vorhanden. Durch Zurückgehen in der Lichtrichtung ergibt sich, daß die Grenze des Eigenschattens der Pyramide aus den beiden Kanten *SP* und *SQ* sowie aus dem Stück *PRQ* des Randes der Grundfläche besteht. Vom Eigenschatten ist aber nur ein Teil zu sehen, er besteht aus den mit Schraffen versehenen Dreiecken. Geht man wieder zum Kegel in Fig. 164 a über, so sieht man, daß die Grenze seines Eigenschattens aus dem Bogen *PRQ* des Grundkreises und aus den beiden Mantellinien *SP* und *SQ* besteht, die nach den Punkten *P* und *Q* gehen, in denen die Tangenten von 𝔖 den Kreis berühren. Längs

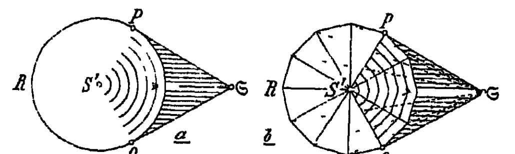


Fig. 164

der Mantellinien SP und SQ ist Streiflicht, deshalb sind diese Schattengrenzen nicht scharf zu sehen. In Fig. 164 a sind daher die Linien $S'P$ und $S'Q$ nicht ausgezogen worden.

Der Schlagschatten $\mathfrak{S}$ der Kegelspitze S kann auch innerhalb des Grundkreises liegen. Es ist aber nicht richtig, dann zu sagen, daß gar kein Schlag- oder Eigenschatten vorkomme. Denn auch jetzt liegt unter der Grundfläche ein Schlagschatten, und die Grundfläche hat Eigenschatten. Aber allerdings sind beide Schatten unsichtbar

Wenn der Schlagschatten $\mathfrak{S}$ der Kegelspitze S gerade auf dem Grundkreis liegt, rücken SP und SQ in eine Mantellinie zusammen Dann weist der Kegelmantel nur längs dieser Geraden Schatten auf, und zwar, da hier Streiflicht herrscht, einen nur schwach sichtbaren Schatten

118. Schatten bei Beleuchtung parallel zur Tafel. Ist die Lichtrichtung zur Tafel senkrecht, so ist die senkrechte Projektion des beleuchteten Gegenstandes sein Schlagschatten, er ist bei der Darstellung des Gegenstandes in senkrechter Projektion unsichtbar Ist die Lichtrichtung zur Tafel parallel, so empfängt die Tafel schwaches Streiflicht Gegenstände, die sich über der Tafel befinden, werfen dann gar keine Schlagschatten, richtiger gesagt, nur unendlich fern gelegene Schlagschatten Steht aber ein Gegenstand auf der Tafel auf, so kommen im Endlichen gelegene Schlagschatten vor. Steht z. B ein Dreieck ABC mit der Kante AB auf der Tafel, während sich C über der Tafel befindet, so liegt der Schlagschatten $\mathfrak{C}$ von C unendlich fern, d h die Schlagschatten von AC und BC sind jetzt zueinander parallel, so daß der Schlagschatten des Dreiecks ein sich ins Unendlichferne erstreckender Streifen ist, siehe Fig 165 Dieser Teil der Tafel ist also dunkler als der übrige im Streiflicht gelegene Teil

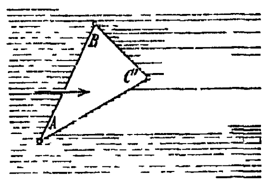


Fig 165

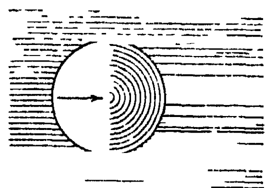


Fig 166

Der Schlagschatten einer auf der Tafel stehenden Pyramide wie der in Fig 164 b der letzten Nummer ist im gegenwärtigen Fall ebenfalls unbegrenzt. Dasselbe gilt vom Schlagschatten eines auf der Tafel stehenden Kegels, siehe Fig 166.

119. Übungen. 1) Gegeben die senkrechte Projektion einer auf der Tafel stehenden Pyramide und die Höhe der Pyramidenspitze S. Außerdem sei die senkrechte Projektion und Höhe eines Punktes P gegeben Wirft nun S auf die Tafel den irgendwo zu wählenden Schlagschatten $\mathfrak{S}$, so kann es vorkommen, daß P einen Schatten auf die Pyramide wirft Er soll bestimmt werden

2) In einen auf der Tafel liegenden Würfel zeichne man nach Nr. 68 die senkrechte Projektion eines Ikosaeders. Außerdem sei der Schatten gegeben, den eine der oberen Würfelecken auf die Tafel wirft. Gesucht der Schlag- und Eigenschatten des Ikosaeders.

3) Können zwei windschiefe Geraden auf die Tafel parallele Schatten werfen?

4) Man zeichne die senkrechte Projektion einer einfachen Treppe, die von der wagerecht gedachten Tafel emporsteigt, gebe die Höhe der Treppenstufen an und wähle die senkrechten Projektionen und Höhen zweier Punkte P und Q. Bei irgendeiner Lichtrichtung den Schatten zu bestimmen, den die Strecke PQ auf die Stufen der Treppe wirft.

5) Kann man eine nicht zur Tafel parallele Ebene und eine Lichtrichtung so annehmen, daß jede in der Ebene gelegene Figur einen mit ihr kongruenten Schlagschatten auf der Tafel bekommt? Diese Frage wird weiter unten in Nr. 123 in anderer Einkleidung behandelt werden.

§ 3. Affinität.

120. Begriff der Affinität. Wir nehmen zwei Ebenen E und 𝔈 und eine Richtung an, die weder zur ersten noch zur zweiten Ebene parallel sei. Irgendein Strahl, der diese Richtung hat, schneidet E und 𝔈 in Punkten P und 𝔓. Man kann nun entweder 𝔓 als Parallelprojektion von P oder P als Parallelprojektion von 𝔓 in der angenommenen Richtung betrachten, je nachdem man 𝔈 oder E als Tafel benutzt. Die Punkte P und 𝔓 der Ebenen E und 𝔈 sind einander also derart zugeordnet, daß jeder Figur der einen Ebene eine Figur der anderen entspricht, indem man nach Belieben die erste oder zweite Figur als die Parallelprojektion der zweiten oder ersten Figur auffassen kann. Aus den allgemeinen Eigenschaften der Parallelprojektion (Nr 104) geht hervor, daß diese Zuordnung zwischen den Punkten P und 𝔓 der beiden Ebenen die folgenden drei Gesetze erfüllt:

Erstens: Ein Punkt fällt mit dem zugeordneten Punkt dann, aber auch nur dann zusammen, wenn er auf der Schnittgeraden beider Ebenen liegt

Zweitens Beschreibt einer der beiden Punkte in seiner Ebene eine Gerade, so gilt dasselbe vom zugeordneten Punkt. Mit anderen Worten: Jeder Geraden der einen Ebene ist eine Gerade der anderen Ebene zugeordnet

Drittens: Einander parallelen Geraden der einen Ebene sind ebenfalls einander parallele Geraden der anderen Ebene zugeordnet.

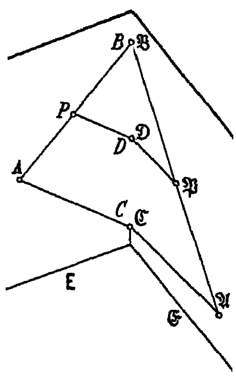


Fig 167

Nun wollen wir annehmen, es seien zwar wie vorher zwei verschiedene Ebenen E und 𝔈 gegeben, dagegen sei nicht wie vorher eine bestimmte Richtung gegeben. Dann wollen wir in allgemeinster Weise eine Zuordnung zwischen den Punkten beider Ebenen ermitteln, bei der die drei soeben aufgestellten Gesetze gelten. Dies geschieht so:

Man wählt ein Punktepaar A, 𝔄 beliebig, d. h. man setzt fest, einem gewissen Punkt A von E soll ein gewisser Punkt 𝔄 von 𝔈 entsprechen. Dann ist man imstande, den einem beliebigen Punkt P von E zugeordneten Punkt 𝔓 von 𝔈 auf Grund der drei Gesetze ausfindig zu machen. Man ziehe nämlich die Gerade AP, siehe Fig. 167. Sie treffe die Schnittgerade beider Ebenen in B. Eine beliebige andere von A ausgehende Gerade der Ebene E treffe sie in C, und die Parallele zu AC durch P

treffe sie in D. Nach dem ersten Gesetz entsprechen die Punkte B, C, D als Punkte der Schnittgeraden sich selbst; sie können also auch mit $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ bezeichnet werden. Nach dem zweiten Gesetz entspricht der Geraden AB die Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und der Geraden AC die Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$. Nach dem dritten Gesetz endlich entsprechen den parallelen Geraden AC und PD wieder zueinander parallele Geraden, und da zu AC die Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ zugeordnet ist, muß also der Geraden PD die Parallele zu $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ durch $\mathfrak{D}$ zugeordnet sein. Mithin entsprechen den beiden durch P gehenden Geraden PB und PD zwei bekannte Geraden, so daß ihr Schnittpunkt der dem Punkt P zugeordnete Punkt $\mathfrak{P}$ sein muß.

In der Tat bekommt man also auf diese Art zu jedem Punkt P von E einen zugeordneten Punkt $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{E}$. Aber es muß noch gezeigt werden, daß jene drei Gesetze für die so gewonnene Zuordnung überall gelten. Dies ergibt sich so: Es ist

$$BA \cdot BP = BC \cdot BD = \mathfrak{B}\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{D} = \mathfrak{B}\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{P},$$

woraus folgt, daß die Gerade $A\mathfrak{A}$ im Raume zur Geraden $P\mathfrak{P}$ parallel ist. Somit stellt sich nachträglich heraus, daß die soeben allein durch Konstruktionen in den beiden Ebenen gewonnene Zuordnung auch durch die Parallelprojektion der Ebene E auf die Ebene $\mathfrak{E}$ in der Richtung des Strahls $A\mathfrak{A}$ vermittelt werden kann. Wir wissen aber, daß bei Parallelprojektion jene drei Gesetze in der Tat erfüllt sind.

Unsere Betrachtung zeigt, daß man eine Zuordnung zwischen den Punkten zweier Ebenen E und $\mathfrak{E}$, bei der die drei angegebenen Gesetze gelten, ohne Benutzung der Parallelprojektion finden kann. Deshalb und aus einem demnächst zu erwähnenden Grunde liegt das Bedürfnis vor, allen Zuordnungen von dieser Art eine besondere Bezeichnung zu geben. Man nennt sie Affinitäten (vom lat. affinitas, Verwandtschaft), und sagt, die einander entsprechenden Figuren beider Ebenen seien zueinander affin; die Schnittgerade der beiden Ebenen heißt die Achse der Affinität.

121. Affinität in einer Doppelebene. Daß die soeben eingeführte Bezeichnung nicht überflüssig ist, erkennt man, wenn man die Zuordnung in dem Fall betrachtet, wo gar nicht mehr von einer Parallelprojektion geredet werden kann, nämlich im Fall zweier in einer Doppelebene zusammenliegender Ebenen E und $\mathfrak{E}$. In diesem Fall bezeichnen wir irgendeine bestimmt gewählte Gerade s als diejenige Gerade, die im ersten Gesetz als die Schnittgerade von E und $\mathfrak{E}$ auftrat, d. h. als die Achse der Affinität.

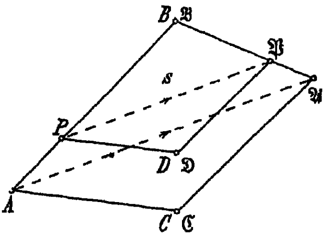


Fig. 168

Geht man jetzt wieder von irgendeinem beliebig, aber bestimmt gewählten Punktepaar A, $\mathfrak{A}$ aus, so liefert genau dieselbe Konstruktion wie vorhin auch jetzt in Fig. 168 den zu irgendeinem Punkt P auf Grund der drei Gesetze zugeordneten Punkt, also den zu ihm affinen Punkt $\mathfrak{P}$. Der einzige Unterschied besteht darin, daß Fig. 168 eine Konstruktion in einer einzigen Ebene, dagegen Fig. 167 eine Konstruktion in zwei verschiedenen Ebenen darstellt. Aber jetzt ist eben wegen dieses Unterschiedes noch eine kleine Schwierigkeit

zu überwinden: In voriger Nummer wurde nachträglich bewiesen, daß für die gewonnene Zuordnung die drei Gesetze überall bestehen, und zwar ergab sich dies einfach daraus, daß wir erkannten, daß die Zuordnung durch Parallelprojektion vermittelt werden kann. Dieser Schluß ist jetzt nicht mehr möglich. Zwar gelten auch jetzt die Proportionen

$$BA : BP = BC : BD = \mathfrak{B}\mathfrak{C} : \mathfrak{B}\mathfrak{D} = \mathfrak{B}\mathfrak{A} : \mathfrak{B}\mathfrak{P},$$

und sie lehren, daß auch bei der Affinität in einer Doppelebene wie bei einer Affinität zwischen zwei verschiedenen Ebenen einander entsprechende Punkte auf parallelen Strahlen liegen $P\mathfrak{P} \parallel A\mathfrak{A}$, aber man kann doch jetzt, wo $A\mathfrak{A}$ und $P\mathfrak{P}$ beide der Doppelebene selbst angehören, nicht mehr von einer Parallelprojektion sprechen. Den also noch fehlenden Nachweis von der ausnahmslosen Gültigkeit der drei Gesetze können wir nun so erbringen. Zuerst nehmen wir wie in voriger Nummer zwei verschiedene Ebenen an und führen den Nachweis wie dort. Alsdann projizieren wir die ganze Fig. 167 in irgendeiner Richtung durch parallele Strahlen auf die Ebene der Zeichnung. Dann geht aus der räumlichen Figur eine ebene Figur wie Fig. 168 hervor, und da in der räumlichen Figur jene drei Gesetze richtig sind, gilt es auch für diese ebene Figur, so daß folgt:

Besteht zwischen zwei Ebenen eine Affinität, so geht daraus durch Parallelprojektion auf eine Tafel eine Affinität auf der Tafel als Doppelebene hervor.

Somit hat sich ergeben:

Falls die in Nr. 120 ausgesprochenen drei Gesetze gelten und die Affinitätsachse s im Endlichen liegt, sind auch im Fall der Doppelebene einander entsprechende Punkte auf lauter parallelen Geraden gelegen. Die Richtung dieser Geraden heißt die Richtung der Affinität, ob nun die Ebenen E und 𝔈 zusammenfallen oder nicht. Wie sich die Sache verhält, wenn die Affinitätsachse s unendlich fern ist, soll später besprochen werden (Nr. 122).

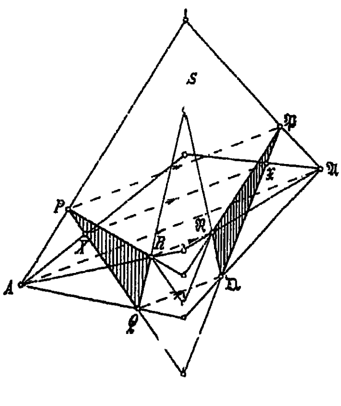


Fig. 169.

Durch zweckmäßige Anwendung der Gesetze kann man zu irgendeiner gegebenen Figur Punkt für Punkt in der Doppelebene die affine finden, sobald nur die Affinitätsachse s und ein affines Punktepaar A, 𝔄 vorliegt. In Fig. 169 ist z. B. ein Dreieck PQR vorgelegt. Die zu P, Q, R affinen Punkte 𝔓, 𝔔, ℜ ergeben sich, wie es die Zeichnung lehrt. Dabei kann man auch davon Gebrauch machen, daß sich PQ und 𝔓𝔔 auf s schneiden müssen, ebenso QR und 𝔔ℜ sowie RP und ℜ𝔓. Sind Schnittpunkte mit s unerreichbar, z. B. der von AP mit s, so kann man zur Ermittlung von 𝔓 die Parallele zu PQ durch R ziehen. Hat man die zu ihr affine Gerade ermittelt, so muß 𝔓𝔔 zu ihr parallel sein. Oder auch: Man wählt auf PQ irgendeinen bequemer als P gelegenen Punkt X und bestimmt den affinen Punkt 𝔛. Dann muß 𝔓 auf 𝔔𝔛 gelegen sein. Jedenfalls kann man stets die durch unerreichbare Schnitt-

punkte mit s entstehenden Schwierigkeiten überwinden. Es ist kaum nötig zu bemerken, daß das Ausgangspunktepaar A, 𝔄 durch jedes andere affine Paar, z. B durch P, 𝔓, ersetzt werden darf.

Bisher wurde stillschweigend angenommen, daß das affine Punktepaar A, 𝔄 auf derselben Seite von s liege, aber das ist nicht nötig. Fig 170 stellt den anderen Fall dar Man bemerkt Sobald die Affinitatsachse in der Doppelebene ein affines Punktepaar trennt, gilt dasselbe für jedes affine Punktepaar

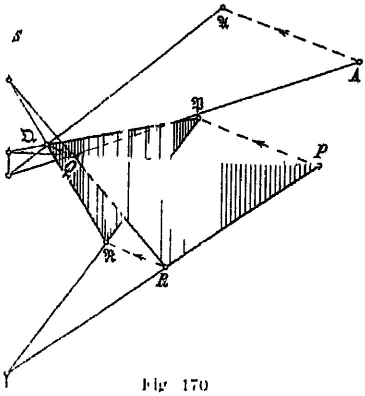


Fig 170

Eine Figur in der Doppelebene kann auch über die Affinitatsachse s hinausgehen Diesen Fall zeigt Fig 171

Je nachdem die Affinitatsachse s in der Doppelebene die affinen Punktepaare nicht trennt (Fig 170) oder trennt (Fig 169, 171), haben zueinander affine Dreiecke den gleichen oder verschiedenen Umlaufsinn Im ersten Fall heißt die Affinitat gleichsinnig, im zweiten ungleichsinnig

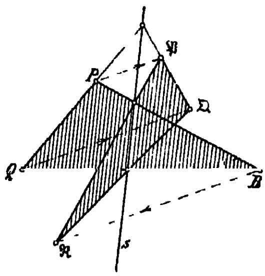


Fig 171

Unter Benutzung der eingeführten Bezeichnungen kann man die in Nr 120 aufgestellten Gesetze sowohl für den Fall zweier verschiedener Ebenen als auch für den einer Doppelebene als Grundgesetze der Affinitat so aussprechen

Erstens Zu sich selbst affin sind nur die Punkte der Affinitatsachse

Zweitens Zu jeder Geraden ist eine Gerade affin

Drittens Zu parallelen Geraden sind ebenfalls zueinander parallele Geraden affin

Wenn dabei die Affinitatsachse s im Endlichen liegt, folgt

Viertens Die Geraden die affine Punkte verbinden, haben einerlei Richtung, die der Affinitat

Insbesondere sei noch die Folgerung hervorgehoben, daß, falls eine Gerade zur Affinitatsachse parallel ist, dasselbe von der affinen Geraden gilt Denn die Affinitatsachse ist zu sich selbst affin Nebenbei sei bemerkt Sind die Ebenen von einander verschieden, so ist die Affinitatsachse die einzige zu sich selbst affine Gerade, indem jeder ihrer Punkte zu sich selbst affin ist Im Fall der Doppelebenen dagegen ist auch jede Gerade, deren Richtung die der Affinität ist, zu sich selbst affin. Aber dies braucht dann nicht von ihren einzelnen Punkten zu gelten.

122. Affinität mit unendlich ferner Affinitätsachse. Zwei Ebenen E und 𝔈 mögen sich zunachst in einer im Endlichen gelegenen Geraden s schneiden. Dann wird eine Affinität zwischen ihnen nach Nr. 120 durch eine Parallelprojektion vermittelt. Wir behalten nun die Parallelprojek-

tion bei, ändern aber die Lage der Ebenen so, daß sie zueinander parallel werden. Dann rückt die Affinitätsachse ins Unendlichferne, und jeder Figur der Ebene E entspricht infolge der Parallelprojektion eine kongruente und kongruent gelegene Figur der Ebene 𝔈, indem die zweite Figur aus der ersten durch eine Schiebung in der Richtung der Projektion hervorgeht. Unter einer Affinität zwischen zwei verschiedenen Ebenen mit unendlich ferner Affinitatsachse, d. h. zwischen zwei parallelen Ebenen soll daher eine Kongruenz zwischen beiden Ebenen verstanden werden, die durch irgendeine Parallelverschiebung der einen Ebene nach der anderen hin hervorgeht.

Derselbe Grenzübergang läßt sich auch machen, um festzustellen, was unter einer Affinitat in der Doppelebene mit unendlich ferner Affinitätsachse zu verstehen ist Da die Achse s ins Unendlichferne rücken soll, müssen wir zunächst, solange sie noch im Endlichen liegt, einander entsprechende Punkte auf derselben Seite von s annehmen, weil ja sonst einer der Punkte zugleich mit s ins Unendlichferne rücken würde. Die Affinitat muß also gleichsinnig sein. Da nun zueinander affine Strecken wie PQ und $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ auf Geraden liegen, die sich auf s schneiden, und da $P\mathfrak{P} \parallel Q\mathfrak{Q}$ ist, ergibt sich Rückt s ins Unendlichferne, so werden PQ und $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ die Gegenseiten eines Parallelogramms. Man schließt hieraus· Unter einer Affinitat in der Doppelebene mit unendlich ferner Affinitätsachse ist eine Kongruenz zu verstehen, die dadurch hervorgeht, daß man eine Parallelverschiebung in irgendeiner bestimmten Richtung vornimmt.

Anmerkung. Man konnte auch versuchen, den Begriff einer Affinität mit unendlich ferner Affinitatsachse dadurch zu gewinnen, daß man von den drei Grundgesetzen ausgeht Nach Nr 4 wird ein unendlich ferner Punkt durch eine Richtung bestimmt Das erste Gesetz besagt daher, daß im Fall einer unendlich fernen Affinitatsachse s jeder Richtung in E dieselbe Richtung in 𝔈 zugeordnet sein soll. Hat man dementsprechend zwei Punktepaare A, $\mathfrak{A}$ und B, $\mathfrak{B}$ in parallelen Ebenen E und 𝔈 so angenommen, daß $AB \parallel \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist, so bekommt man zu irgendeinem Punkt P von E den entsprechenden Punkt $\mathfrak{P}$ von 𝔈, indem man bedenkt, daß $\mathfrak{A}\mathfrak{P} \parallel AP$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{P} \parallel BP$ sein muß Somit entsteht ein zu ABP ahnliches und ahnlich gelegenes Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{P}$ Überhaupt entsteht so zu jeder Figur der Ebene E eine ähnliche und ähnlich gelegene Figur der Ebene 𝔈, und dabei ist auch das zweite und dritte Gesetz erfullt Man kommt also nicht zur Kongruenz mit kongruenter Lage, sondern zu der umfassenderen Ähnlichkeit mit ahnlicher Lage Aber wenn die Affinitatsachse s im Endlichen liegt, folgt aus den drei Gesetzen als viertes, daß einander entsprechende Punkte auf parallelen Geraden liegen Das ist zwar bei der Kongruenz, aber nicht bei der allgemeineren Ähnlichkeit der Fall Eine genauere Prufung des ersten Gesetzes zeigt nun auch, daß der ganze Inhalt des Gesetzes bei der Annahme einer unendlich fernen Affinitatsachse s doch nicht dadurch erschopft wird, daß man sagt, jeder Strecke soll eine parallele Strecke entsprechen Denn wenn s zunachst im Endlichen liegt, besagt das erste Gesetz auch, daß jeder auf s gelegenen Strecke PQ eine mit ihr zusammenfallende Strecke $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ entsprechen soll Beim Übergang zu einer unendlich fernen Affinitätsachse hatte man also zu verlangen, daß jede unendlich ferne Strecke sich selbst entspreche. Der Begriff einer Strecke verliert jedoch seine Bedeutung, wenn die Gerade der Strecke ins Unendlichferne ruckt Das erste Gesetz wird also unbestimmt, und man muß folglich die Definition einer Affinität mit unendlich ferner Affinitatsachse auf andere Art, nämlich, wie es oben geschehen, durch einen Grenzubergang ermitteln, und dies Verfahren fuhrt zur Kongruenz, nicht zur Ähnlichkeit Vgl auch Nr. 129.

123. Kongruenz als Sonderfall der Affinität. Der Fall, wo die Affinitatsachse s unendlich fern liegt, ist nicht der einzige, in dem Kongruenz auftritt. Auch wenn s im Endlichen bleibt, kann Kongruenz vorkommen. Ist namlich P, $\mathfrak{P}$ ein Paar affiner Punkte und S der Fußpunkt des

Lotes von P auf s, so erfordert die Affinität, daß der Strecke PS die Strecke $\mathfrak{P}S$ entspricht, so daß Kongruenz nur dann eintreten kann, wenn PS gleich $\mathfrak{P}S$ ist. Da ferner PS mit s einen rechten Winkel bildet und s sich selbst entspricht, erfordert die Kongruenz auch, daß $\mathfrak{P}S$ zu s senkrecht sei. Hieraus ergibt sich:

Eine Affinitat zwischen zwei verschiedenen und nicht parallelen Ebenen E und 𝔈 ist dann und nur dann eine Kongruenz, wenn die Richtung $P\mathfrak{P}$ der Affinitat lotrecht zu einer derjenigen beiden Ebenen ist, durch die man einen der beiden Winkel der Ebenen E und 𝔈 in zwei gleiche Teile zerlegt.

Wir machen hiervon eine wichtige Anwendung: Liegt der Fall vor und ist k ein Kreis der Ebene E, so daß die zu k affine Figur $\mathfrak{k}$ ein gleichgroßer Kreis der Ebene 𝔈 ist, so entsteht $\mathfrak{k}$ als Schnitt von 𝔈 mit den durch die Punkte von k gelegten Strahlen in der Affinitatsrichtung, d. h $\mathfrak{k}$ ist der Schnitt von 𝔈 mit einem gewissen schiefen Kreiszylinder, dessen Grundkreis k ist Bemerkenswert ist nun, daß man einen beliebig gewahlten allgemeinen Kreiszylinder immer in diese Lage bringen kann. In der Tat, k sei der Grundkreis des Zylinders, M sein Mittelpunkt, z seine Achse Als Ebene E diene die Ebene des Grundkreises Als Ebene der Zeichnung in Fig 172 benutzen wir diejenige, die z enthalt und auf E senkrecht steht Sie heißt die Hauptebene des Zylinders und teilt ihn symmetrisch Ihre Schnittgerade mit der Grundkreisebene E ist ein Durchmesser AB von k Nun werde irgendeine zur Achse z senkrechte Ebene angenommen Sie schneide die Achse in Z Ihre Schnittgerade mit der Hauptebene treffe die Gerade AB in S Man bestimme $\mathfrak{M}$ auf z so, daß Z die Mitte von $M\mathfrak{M}$ ist und ziehe die Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ durch S und $\mathfrak{M}$ Dabei seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Schnittpunkte der Geraden mit den Parallelen zu z durch A und B. Schließlich sei 𝔈 diejenige Ebene, die langs $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ auf der Hauptebene, also auf der Ebene der Zeichnung, senkrecht steht. Damit ist die gesuchte Lage der Ebenen E und 𝔈 gewonnen, denn jetzt ist z zu derjenigen Ebene senkrecht, die den einen Winkel der Ebenen E und 𝔈 in gleiche Teile zerlegt Mithin schneidet 𝔈 den Zylinder in einem mit k kongruenten Kreis $\mathfrak{k}$. Er hat den Durchmesser $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Man darf ubrigens sowohl die Ebene E als auch die Ebene 𝔈 parallel mit sich verschieben Der Begriff der Hauptebene des Zylinders wird nur dann unbestimmt, wenn die Achse z des Zylinders auf der Ebene E des Grundkreises senkrecht steht, der Zylinder also ein gerader ist Dann kann jede Ebene durch z als Hauptebene dienen, aber dann wird 𝔈 zu E parallel Wir haben also gefunden.

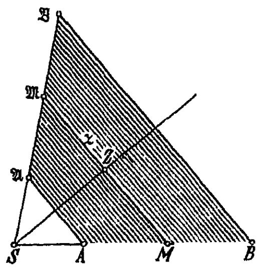


Fig 172

Ein nicht gerader Kreiszylinder wird durch zwei verschiedene Scharen von parallelen Ebenen in gleichgroßen Kreisen geschnitten. Beide Ebenenscharen stehen auf der Hauptebene des Zylinders senkrecht und sind zur Achse des Zylinders gleich geneigt, aber in verschiedenem Sinne.

Was den Fall der Kongruenz als Affinitat betrifft, so lehren die Betrachtungen zu Anfang dieser Nummer noch, wenn es sich um Affinitat in einer Doppelebene handelt:

e Affinitat in einer Doppelebene mit im Endlichen ge- r Affinitatsachse ist dann und nur dann eine Kon- z, wenn entweder jeder Punkt mit dem affinen Punkt zusammenfallt oder jeder Punkt durch Spiegelung an der Affinitatsachse in den affinen Punkt ubergeht. Der erste Fall ist der vollkommener Kongruenz, der zweite Fall der einer Kongruenz mit Anderung des Umlaufsinnes der Figuren, also eine Symmetrie.

Anmerkung· Die beiden Arten von Kreisschnitten des schiefen Kreiszylinders zusammen mit denen des schiefen Kegels, von denen spater zu reden sein wird, kommen in den „Vier Buchern der Kegelschnitte" des Apollonius (Nr 77) im 1 Buch, 5 Satz vor (a a O S 7)

124. Drehung affiner Ebenen um die Affinitätsachse. Wenn man in zwei verschiedenen und sich in einer Geraden s schneidenden Ebenen E und 𝔈 Punkte A und 𝔄 willkürlich angenommen hat, ist dadurch nach Nr. 120 diejenige Affinitat zwischen beiden Ebenen, bei der A und 𝔄 zueinander affin sind, vollkommen bestimmt. Nach Fig 167 ebenda findet man den zu irgendeinem Punkt P von E affinen Punkt 𝔓 von 𝔈 durch Konstruktion einiger Geraden innerhalb der Ebenen E und 𝔈 selbst. Diese Zeichnung wird in keiner Weise behelligt, wenn man eine der beiden Ebenen als starres Gebilde um die Affinitatsachse s dreht Daher gilt der Satz

Sind zwei sich in einer Geraden s schneidende Ebenen zueinander affin, so bleibt die Zuordnung auch dann eine Affinitat, wenn man eine der beiden starr gedachten Ebenen beliebig um die Affinitatsachse s dreht Nach der Drehung werden also immer noch einander entsprechende Punkte auf lauter parallelen Geraden liegen, so daß man auch sagen kann. Wenn eine Figur F einer Ebene E durch Parallelprojektion auf eine andere Ebene 𝔈 als Figur 𝔉 abgebildet worden ist, bleibt 𝔉 auch dann eine Parallelprojektion von F, wenn man eine der beiden starr gedachten Ebenen beliebig um die Schnittgerade beider Ebenen dreht

Die Drehung kann man so weit fortsetzen, bis beide Ebenen in eine zusammenfallen. Dies laßt sich auf zwei Arten bewerkstelligen, und so geht entweder eine gleichsinnige oder eine ungleichsinnige Affinitat in einer Doppelebene hervor.

Liegt im Raum eine ebene Figur $ABC\ldots$ vor, so besteht offenbar eine Affinitat zwischen der Ebene E der Figur und der Tafel T, wenn man den Punkten A, B, C ihre senkrechten Projektionen A', B', C' auf der Tafel T zuordnet. Wenn weiterhin die Ebene E um ihre Spurgerade s in die Tafel umgelegt wird, wodurch die Figur $ABC\ldots$ in eine kongruente Figur $(A)(B)(C)\ldots$ ubergeht, findet also nach wie vor eine Affinitat statt, indem jetzt den Punkten (A), (B), $(C)\ldots$ auf der Tafel als Doppelebene die Punkte $A', B', C'\ldots$ zugeordnet sind. Die Spurgerade s ist dabei die Affinitatsachse, und die Richtung dieser Affinitat ist zu s senkrecht. Nach Nr. 12 kann die Tafel auch durch eine Höhenebene ersetzt werden Somit ergibt sich, daß schon in fruheren Figuren haufig Affinitaten vorkamen, so z. B. in Fig. 10 von Nr 14, wo s' die Affinitatsachse ist. Die Sonnenuhrkonstruktionen in Fig. 64, 66 und 67 von Nr. 42, 44 und 45 zeigen Affinitaten zwischen

den verschiedenen Zifferblattern. Auch Fig. 103 von Nr 73 enthält eine Affinität in der Doppelebene, ja sogar ihrer zwei. Bei der einen ist die Hauptachse, bei der anderen die Nebenachse der Ellipse die Affinitatsachse. Bei der ersten entspricht dem Punkt P_1 des großen Kreises der Punkt P der Ellipse, bei der zweiten dem Punkt P der Ellipse der Punkt P_2 des kleinen Kreises. In Fig. 104 von Nr. 73, Fig 109 und 110 von Nr. 78 sind schon fruher tatsachlich mittels Affinitat Aufgaben gelost worden. Auch viel andere Figuren enthielten Affinitaten

Nach einem Satz von Nr 121 liefert irgendeine Parallelprojektion zweier affin aufeinander bezogener Ebenen eine Affinitat auf der Tafel Wenn z. B eine ebene Figur ABC . . auf die Tafel einen Schlagschatten 𝔄𝔅ℭ. . wirft, besteht zunachst eine Affinitat zwischen der Ebene E der Figur und der Tafel T, denn das Werfen des Schattens ist ja nichts anderes als eine Parallelprojektion der Ebene E auf die Tafel, d h eine Affinitat Nach dem angefuhrten Satz ergibt sich nun, daß auch zwischen der senkrechten Projektion $A'B'C'$. einer ebenen Figur und dem Schlagschatten 𝔄𝔅ℭ der Figur eine Affinitat auf der Tafel besteht Bei ihr ist die Spurgerade s der Ebene der Figur die Affinitatsachse Die Affinitatsrichtung ist die der senkrechten Projektionen A'𝔄, B'𝔅 . der Lichtstrahlen Deshalb enthalt Fig. 158 von Nr 113 eine Affinitat.

Wenn man die Ebene einer ebenen Figur ABC um ihre Spurgerade in die Tafel umlegt, so daß sich eine kongruente Figur $(A)(B)(C)$. ergibt, bestehen zwischen der umgelegten Figur $(A)(B)(C)$, der senkrechten Projektion $A'B'C'$ der Figur und dem Schlagschatten 𝔄𝔅ℭ . . . der Figur auf der Tafel jedesmal Affinitaten, bei allen dreien ist die Spurgerade die Affinitatsachse

Dadurch, daß eine Affinitat zwischen zwei Ebenen bestehen bleibt, wenn man eine der Ebenen ohne Abanderung der in ihr gelegenen Figuren so weit um die Affinitatsachse dreht, bis sie mit der anderen Ebene zusammenfallt, wird die Untersuchung der Eigenschaften affiner Figuren beträchtlich erleichtert: Man kann sich auf die Untersuchung der Affinitat in einer Doppelebene beschranken

125. Unveränderlichkeit von Strecken- und Flächenverhältnissen bei Affinitäten. Weil sich zwei parallele Strecken geradeso zueinander verhalten wie ihre Parallelprojektionen auf eine Tafel (Nr 104), ergibt sich Parallele Strecken einer ebenen Figur verhalten sich zueinander wie die zu ihnen affinen Strecken einer affinen Figur Das Verhaltnis zweier paralleler Strecken einer ebenen Figur bleibt also bei jeder Affinitat unverandert, es ist eine Invariante der Affinitat.

Wir nehmen nun eine Affinität in einer Doppelebene an Die Strahlen in der Affinitatsrichtung, die einander entsprechende Punkte A, 𝔄 — B, 𝔅 — . . . der beiden affinen Figuren verbinden, schneiden die Affinitatsachse s in Punkten S, T . ., die sich selbst entsprechen Demnach ist $AS : BT =$ 𝔄S : 𝔅T oder auch AS : 𝔄S = BT : 𝔅T. Um dies bequem auszudrücken, führen wir den Begriff der Ordinate ein: Liegt eine ebene Figur AB . . . und eine Achse s vor und zieht man durch alle Punkte A, B . . . der Figur in irgendeiner gemeinsamen Richtung die Geraden bis zum Schnitt S, T . . . mit der Achse s, so nennt man

die Strecken SA, TB ... die Ordinaten der Figur. Man könnte sie auch schiefe Abstände von s nennen, aber Abstände mißt man doch sonst senkrecht zu s, so daß der Name Ordinate vorzuziehen ist. Man setzt auch fest, daß man die Ordinaten positiv oder negativ rechnet, je nachdem die Ordinaten auf der einen oder anderen Seite der Achse liegen. Nun liefert die Proportion $AS : \mathfrak{A}S = BT : \mathfrak{B}T$ den Satz. Aus einer ebenen Figur geht stets eine affine Figur hervor, wenn man alle Ordinaten der Figur, gemessen in irgendeiner Richtung von irgendeiner Achse s aus, nach einem konstanten Verhältnis vergrößert oder verkleinert.

Weiterhin bemerkt man: Wenn man von A und B die Lote auf s fällt, verhalten sie sich zueinander wie die Ordinaten SA und TB. Entsprechendes gilt für die Lote von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auf die Achse. Also folgt. Das Verhältnis der lotrechten Abstände zweier Punkte A, B von der Affinitätsachse ist gleich dem Verhältnis der Abstände der affinen Punkte von der Achse, demnach eine Invariante der Affinität. Dieser Satz ist noch nicht in dem vorhin über Invarianten ausgesprochenen Satz enthalten, denn man muß beachten, daß die Lote von A und $\mathfrak{A}$ auf die Affinitätsachse einander im allgemeinen nicht affin zugeordnet sind, sondern nur dann, wenn die Affinitätsrichtung zur Achse senkrecht ist.

Nun liege ein Dreieck ABC vor, siehe Fig. 173, und seine Seiten BC, CA, AB mögen die Affinitätsachse s in X, Y, Z schneiden. Dann gehen auch die Seiten des affinen Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ nach X, Y, Z. Die Flächen der Dreiecke YAZ und $Y\mathfrak{A}Z$ verhalten sich zueinander wie ihre Höhen von A und $\mathfrak{A}$ aus. Entsprechendes gilt von den Flächen der Dreiecke ZBX und $Z\mathfrak{B}X$ sowie XCY und $X\mathfrak{C}Y$. Nach dem Vorhergehenden aber verhalten sich die Höhen von A, B, C aus zueinander wie die von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ aus, daher die Flächen der Dreiecke YAZ, ZBX, XCY zu den Flächen der Dreiecke $Y\mathfrak{A}Z$, $Z\mathfrak{B}X$, $X\mathfrak{C}Y$ wie die Abstände der Punkte A und $\mathfrak{A}$ von s. Nun sind die Flächen der Dreiecke ABC und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ algebraische Summen aus den Flächen jener Dreiecke. Mithin folgt: Die Fläche eines Dreiecks ABC und die Fläche des affinen Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ verhalten sich zueinander wie die Entfernungen irgend zweier affiner Punkte von der Affinitätsachse. Dies Verhältnis ist also dieselbe Invariante wie vorher. Wenn außer dem Dreieck ABC noch ein zweites Dreieck DEF betrachtet wird, ergibt sich daraus weiterhin:

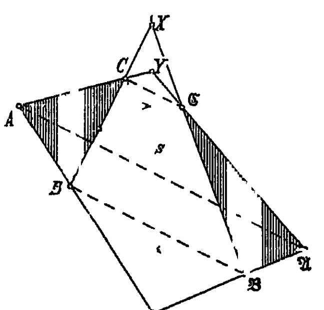


Fig. 173

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{\triangle \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{\triangle \mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{F}}.$$

Somit gilt der Satz:

Die Flächen zweier Dreiecke verhalten sich zueinander wie die der affinen Dreiecke. Demnach ist das Verhältnis der Flächen zweier Dreiecke eine Invariante der Affinität. Man kann auch so sagen. Beim Übergang von einem Dreieck zum affinen

Dreieck ändert sich der Flächeninhalt nach einem von der besonderen Wahl des Dreiecks unabhängigen Verhältnis, nämlich nach dem Verhältnis der Abstände irgend zweier affiner Punkte von der Affinitätsachse.

Ein beliebiges Flächenstück der Ebene läßt sich als eine Summe von Dreiecksflächen auffassen, auch wenn es krummlinig begrenzt ist, sobald man nur auch beliebig kleine Dreiecke benutzt. Deshalb ergibt sich schließlich, daß das Verhältnis irgend zweier Flächenstücke der Ebene eine Invariante der Affinität ist. Mit anderen Worten: Vermöge einer Affinität werden alle Flächeninhalte in einerlei Maßstab vergrößert oder verkleinert

Nach Nr. 73 geht aus einem Kreis vom Radius a eine Ellipse mit den Halbachsen a und b hervor, wenn man alle Höhen der Punkte des Kreises über einem Durchmesser im Verhältnis $b : a$ verkleinert. Dies Verfahren ist aber eine Affinität. Da nun das dem Kreis umschriebene Quadrat vom Inhalt $4a^2$ in das Rechteck vom Inhalt $4ab$ übergeht, verhält sich der Inhalt der Ellipse zu dem des Kreises wie $4ab$ zu $4a^2$ oder $b : a$. Aus dem Kreisinhalt πa^2 ergibt sich also πab als Inhalt der Ellipse mit den Halbachsen a und b.

126. Affine Gebilde und affin-ähnliche Gebilde in beliebiger Lage zueinander. Aus dem Umstand, daß die Teilverhältnisse von Strecken durch Affinität nicht geändert werden, ergibt sich, daß man den zu irgendeinem Punkt P eines ebenen Gebildes F affinen Punkt $\mathfrak{P}$ eines zu F affinen Gebildes $\mathfrak{F}$ ohne Benutzung der Affinitätsachse finden kann, sobald man nur ein Dreieck ABC von F und das dazu affine Dreieck $\mathfrak{ABC}$ von $\mathfrak{F}$ kennt. Man bringe nämlich etwa die Gerade CP mit AB in Q zum Schnitt, bestimme dann $\mathfrak{Q}$ auf $\mathfrak{AB}$ so, daß $\mathfrak{AB}$ durch $\mathfrak{Q}$ in demselben Verhältnis wie AB durch Q geteilt wird, und bestimme ferner $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{CQ}$ so, daß $\mathfrak{CQ}$ durch $\mathfrak{P}$ in demselben Verhältnis wie CQ durch P geteilt wird. Diese Art, den zu einem beliebigen Punkt P von F affinen Punkt $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{F}$ zu ermitteln, ist auch dann anwendbar, wenn sich die beiden Gebilde F und $\mathfrak{F}$ gar nicht mehr in der ursprünglichen affinen Lage gegeneinander befinden. Deshalb läßt sich sagen.

Eine affine Beziehung zwischen zwei ebenen Gebilden F und $\mathfrak{F}$ ist, falls sie nicht in affiner Lage sind, doch noch vollständig bestimmt, sobald man nur drei nicht in gerader Linie liegende Punkte A, B, C von F und die dazu affinen Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{F}$ kennt.

Wir können einen Schritt weitergehen Die Figur F werde ähnlich vergrößert oder verkleinert. Dadurch entsteht ein neues ebenes Gebilde $\bar{F}$. Jedem Punkt P von F entspricht alsdann sowohl ein affiner Punkt $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{F}$ als auch ein ähnlicher Punkt $\bar{P}$ von $\bar{F}$, d. h. es besteht auch zwischen $\bar{F}$ und $\mathfrak{F}$ eine gesetzmäßige Zuordnung ihrer Punkte $\bar{P}$ und $\mathfrak{P}$. Da die Teilverhältnisse von Strecken durch ähnliche Vergrößerung oder Verkleinerung nicht geändert werden, ist die vorhin ausgeführte Konstruktion auch jetzt zu verwenden, um zu irgendeinem Punkt $\bar{P}$ von $\bar{F}$ den zugeordneten Punkt $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{F}$ zu bestimmen. Die Gebilde $\bar{F}$ und $\mathfrak{F}$ nennen wir affin-ähnlich, da $\mathfrak{F}$ aus $\bar{F}$ durch eine Ähnlichkeit und eine Affinität hervorgeht.

Wir behaupten nun: Irgend zwei Dreiecke $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ sind stets zueinander affin-ähnlich, vorausgesetzt, daß weder die drei Punkte $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ noch die drei Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in gerader Linie liegen. Mit anderen Worten, wir behaupten: Dadurch, daß man das gegebene Dreieck $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ in einem geeigneten Maßstab vergrößert oder verkleinert, kann man immer erreichen, daß das hervorgehende Dreieck ABC zu dem anderen gegebenen Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ affin wird. Zum Beweis wählen wir z. B. C auf $\bar{B}\bar{C}$ so, daß $\bar{B}C = \mathfrak{B}\mathfrak{C}$ wird, siehe Fig. 174a, und bestimmen A auf $\bar{A}\bar{B}$ durch den Schnitt mit der Parallelen zu $\bar{A}\bar{C}$ durch C. Wird nun $\bar{B}$ noch mit B bezeichnet, so ist $\triangle ABC \sim \triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$. Wegen $BC = \mathfrak{B}\mathfrak{C}$ kann man die Dreiecke ABC und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ so hinlegen, daß sich B mit $\mathfrak{B}$ und C mit $\mathfrak{C}$ deckt, siehe Fig. 174b. Wird die Deckgerade als Affinitatsachse s benutzt und schreibt man vor, daß zu A der Punkt $\mathfrak{A}$ affin sei, so ist jetzt $\triangle ABC$ zu $\triangle \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ affin und affin gelegen, was zu beweisen war. Es erhellt, daß man dies auch auf andere Weise hätte erreichen können, denn wir haben hier beim Beweis willkürlich die $\bar{B}\bar{C}$- und $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$-Seiten der beiden gegebenen Dreiecke bevorzugt. In der Tat kann man die Affinitat zwischen einem zu $\triangle \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ähnlichen Dreieck ABC und dem Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ auf unendlich viele Arten herbeiführen. Um so bemerkenswerter ist folgender Umstand: Wie man auch immer durch ähnliche Vergrößerung oder Verkleinerung ein gegebenes Dreieck $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ so umwandeln mag, daß das hervorgehende ähnliche Dreieck ABC zu einem zweiten gegebenen Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ in affine Lage gebracht werden kann, stets entspricht dabei irgendeinem Punkte $\bar{P}$ der Ebene des Dreiecks $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ ein und derselbe Punkt $\mathfrak{P}$ der Ebene des Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$. Denn wenn man z. B. die Gerade $\bar{B}\bar{P}$ mit $\bar{A}\bar{C}$ in $\bar{Q}$ schneidet, wird der $\bar{Q}$ entsprechende Punkt $\mathfrak{Q}$ von $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ so liegen müssen, daß er $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ in demselben Verhältnis teilt, wie $\bar{Q}$ die Seite $\bar{A}\bar{C}$ teilt. Also hat $\mathfrak{Q}$ eine vollkommen bestimmte Lage. Nun muß $\mathfrak{P}$ so auf $\mathfrak{B}\mathfrak{Q}$ liegen, daß $\mathfrak{P}$ diese Strecke in demselben Verhältnis teilt wie $\bar{P}$ die Strecke $\bar{B}\bar{Q}$. Daher hat auch $\mathfrak{P}$ eine vollkommen bestimmte Lage.

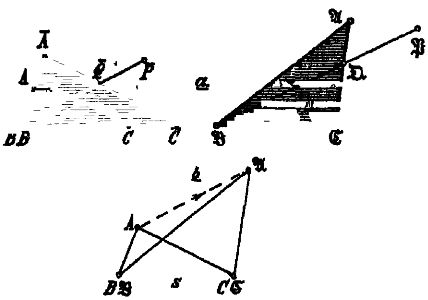


Fig. 174

Hiernach steht fest: Um zwei zueinander affin-ähnliche ebene Gebilde $\bar{F}$ und $\mathfrak{F}$ zu bekommen, darf man festsetzen, daß drei bestimmten und nicht in gerader Linie liegenden Punkten $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ von $\bar{F}$ drei bestimmte ebenfalls nicht in gerader Linie liegende Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{F}$ entsprechen. Alsdann ist die Beziehung vollkommen bestimmt, indem nunmehr jedem Punkt $\bar{P}$ von $\bar{F}$ ein und nur ein Punkt $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{F}$ entspricht.

127. Affine rechte Winkel. Wir suchen jetzt diejenigen rechten Winkel, die vermöge einer Affinität wieder in rechte Winkel übergehen. Es ist nur nötig, einen ausfindig zu machen, denn da parallele Geraden als

ebenfalls parallele Geraden abgebildet werden, hat dann jeder andere solche Schenkel, die zu denen dieses einen Winkels parallel sind. Der Scheitel sei also an einer bestimmten Stelle M gewählt. Nach Nr. 124 dürfen wir uns auf eine Affinitat in einer Doppelebene beschränken. Ist $\mathfrak{M}$ der zu M affine Punkt, so müssen die Schenkel des gesuchten rechten Winkels die Affinitatsachse s in Punkten X und Y derart treffen, daß $\sphericalangle XMY$ und $\sphericalangle X\mathfrak{M}Y$ rechte Winkel werden, d. h. M und $\mathfrak{M}$ müssen auf einem Kreis liegen, dessen Mitte Z auf s liegt, also der Schnittpunkt von s mit der Mittelsenkrechten von $M\mathfrak{M}$ ist, siehe Fig 175. Dieser Hilfskreis schneidet s in den Punkten X und Y.

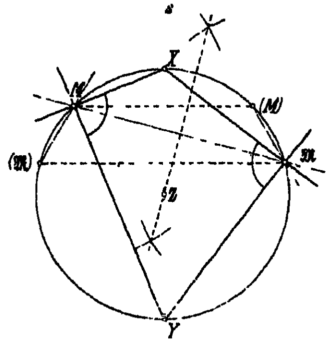


Fig 175

Unendlich viele derartige Hilfskreise sind nur dann vorhanden, wenn entweder die Mittelsenkrechte unbestimmt wird, d. h. wenn M mit $\mathfrak{M}$ zusammenfällt, oder wenn die Mittelsenkrechte mit s zusammenfallt, d. h. $\mathfrak{M}$ der Spiegelpunkt von M hinsichtlich s ist. Im ersten Fall liegt eine gleichsinnige, im zweiten eine ungleichsinnige Kongruenz (Nr. 123) vor, und es ist klar, daß bei einer Kongruenz jedem rechten Winkel ein rechter Winkel entspricht. Von diesen Fällen sehen wir daher ab.

Ist einer der beiden Punkte X und Y unerreichbar, z. B. Y so ist der andere Punkt X erreichbar; man kann also MX und $\mathfrak{M}X$ ziehen, aber auch die anderen Schenkel, da sie in M und $\mathfrak{M}$ auf MX und $\mathfrak{M}X$ senkrecht stehen.

Die Konstruktion versagt, wenn der Mittelpunkt Z, d. h der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von $M\mathfrak{M}$ mit s, unerreichbar ist. Man beachte daher. Der Spiegelpunkt $(\mathfrak{M})$ von $\mathfrak{M}$ in bezug auf die Affinitätsachse s liegt ebenfalls auf dem Hilfskreis, und der Bogen $X\mathfrak{M}$ ist dem Bogen $X(\mathfrak{M})$, der Bogen $Y\mathfrak{M}$ dem Bogen $Y(\mathfrak{M})$ gleich. Deshalb sind die Schenkel des gesuchten rechten Winkels mit dem Scheitel M diejenigen Geraden, mittels deren die Winkel der beiden Geraden $M\mathfrak{M}$ und $M(\mathfrak{M})$ in gleiche Teile geteilt werden. Indem man den Spiegelpunkt (M) von M in bezug auf s bestimmt, ergibt sich ebenso: Die Schenkel des rechten Winkels mit dem Scheitel $\mathfrak{M}$ sind diejenigen Geraden, mittels deren die Winkel der beiden Geraden $\mathfrak{M}M$ und $\mathfrak{M}(M)$ in gleiche Teile geteilt werden Man bedarf daher des Hilfskreises gar nicht, und die sich hiernach ergebende Konstruktion, siehe Fig. 176, hat überdies den Vorzug, der in Fig. 175 beim freihändigen Skizzieren überlegen zu sein.

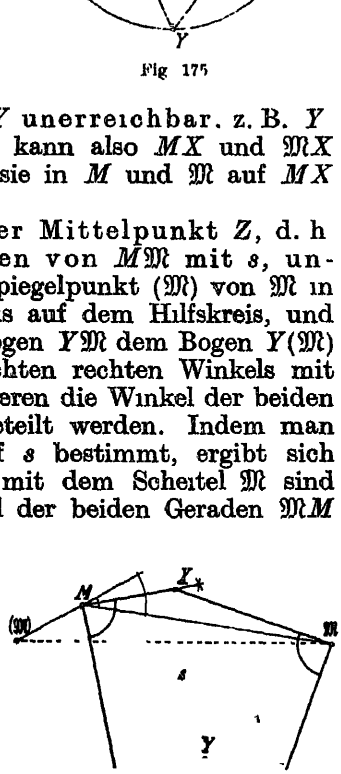


Fig 176

Nur dann, wenn die Richtung $M\mathfrak{M}$ der Affinität zur Affinitätsachse s senkrecht ist, bekommen die rechten Winkel je einen zur Affinitätsachse parallelen Schenkel.

Geht man zu einer Affinität in zwei verschiedenen Ebenen über, indem man eine der beiden in der Doppelebene zusammenfallenden Ebenen

um s durch einen beliebigen Winkel dreht (Nr. 124), so liegt eine Parallelprojektion einer Ebene E auf eine Ebene $\mathfrak{E}$ vor, und es ergibt sich:

Bei einer Parallelprojektion einer Ebene E auf eine andere Ebene $\mathfrak{E}$ gibt es, wenn die Projektion nicht insbesondere kongruente Figuren liefert, in der Ebene E nur ein bestimmtes Paar zueinander senkrechter Richtungen, die vermöge der Projektion in ebenfalls zueinander senkrechte Richtungen der Ebene $\mathfrak{E}$ übergehen. Nur dann ist eine dieser beiden Richtungen zur Schnittgeraden s beider Ebenen parallel, wenn die Projektionsrichtung in einer zur Geraden s senkrechten Ebene liegt. Dieser Fall liegt insbesondere vor, wenn man die Ebene E auf die Ebene $\mathfrak{E}$ senkrecht projiziert. Dann gelangt man wieder zu dem Satz von Nr 18 über die senkrechte Projektion eines rechten Winkels.

128. Maßbeziehungen bei Affinität. Die soeben konstruierten Geraden MX, MY und $\mathfrak{M}X$, $\mathfrak{M}Y$ benutzen wir als Achsen, um affine Punkte P oder $\mathfrak{P}$ durch Strecken festzulegen Wir geben den Geraden bestimmte Pfeile, etwa von M nach X und Y und von $\mathfrak{M}$ nach X und Y weisend, siehe Fig. 177, und nennen sie in diesen Richtungen die positive x- und y-Achse bzw. die positive $\mathfrak{x}$- und $\mathfrak{y}$-Achse Ist P irgendein Punkt der einen Ebene, so kann man den affinen Punkt $\mathfrak{P}$ auf Grund des Gesetzes, wonach sich parallele Geraden wieder als parallele Geraden abbilden, durch Benutzung der durch P gelegten Parallelen zu MX und MY finden, wie es die Figur zeigt. Die benutzten Hilfsgeraden schneiden auf den Achsen Strecken ab, die wir so bezeichnen:

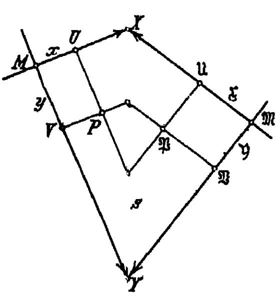


Fig 177

$$MU = x, \quad MV = y, \quad \mathfrak{M}\mathfrak{U} = \mathfrak{x}, \quad \mathfrak{M}\mathfrak{V} = \mathfrak{y}$$

Man bemerkt, daß U und $\mathfrak{U}$ und ebenso V und $\mathfrak{V}$ affine Punkte sind. Die Strecke x soll positiv oder negativ gerechnet werden, je nachdem der Sinn von M nach U mit dem Pfeil auf MX übereinstimmt oder ihm entgegen ist. Entsprechende Festsetzungen machen wir in bezug auf die Strecken y, $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$. Der Punkt P ist durch Angabe der beiden zugeordneten (koordinierten) positiven oder negativen Strecken x und y vollständig festgelegt, und man nennt x und y die rechtwinkligen Koordinaten von P in dem Achsenkreuz MX, MY. Ebenso heißen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die rechtwinkligen Koordinaten von $\mathfrak{P}$ in dem Achsenkreuz $\mathfrak{M}X$, $\mathfrak{M}Y$. (Vgl. Nr. 98.) In Fig. 177 sind x, y und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ sämtlich positiv. Das Folgende gilt aber auch für beliebige andere Lagen des Punktes P.

Man liest aus der Figur ab:

$$\frac{\mathfrak{x}}{x} = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{U}}{MU} = \frac{\mathfrak{M}X}{MX}, \qquad \frac{\mathfrak{y}}{y} = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{V}}{MV} = \frac{\mathfrak{M}Y}{MY}.$$

Die Verhältnisse $\mathfrak{M}X : MX$ und $\mathfrak{M}Y : MY$ sind von der Wahl des Punktes P unabhängig, also konstante Zahlen α und β. Aus den Koordinaten x, y des Punktes P gehen demnach die des affinen Punktes $\mathfrak{P}$ durch Multiplikation mit gewissen Zahlen α und β hervor.

$$\mathfrak{x} = \alpha x, \quad \mathfrak{y} = \beta y.$$

Die Zahlen α und β sind hier positive Größen, da $\mathfrak{M}X$, MX, $\mathfrak{M}Y$, MY nach den getroffenen Festsetzungen positiv zu messen sind. Dagegen wäre z. B. α negativ, wenn der Pfeil auf $\mathfrak{M}X$ entgegengesetzt, als es geschah, gewählt worden wäre. Es ist also nicht wesentlich, daß α und β positive Zahlen seien, aber man kann immer die Festsetzungen so machen, daß sie positiv ausfallen, und das ist das bequemste. Da MXY und $\mathfrak{M}XY$ rechtwinklige Dreiecke mit derselben Hypotenuse XY sind, ist

$$MX^2 + MY^2 = \mathfrak{M}X^2 + \mathfrak{M}Y^2$$

Wenn also z B. $MX < \mathfrak{M}X$, d h. $\alpha = \mathfrak{M}X : MX > 1$ ist, muß $MY > \mathfrak{M}Y$, also $\beta = \mathfrak{M}Y : MY < 1$ sein. Umgekehrt. Ist $\alpha < 1$, so fällt $\beta > 1$ aus.

***129. Affinität im weiteren Sinne**[1]**.** In zwei Ebenen, die wir uns in Fig 178 zunächst nebeneinandergelegt denken, seien rechtwinklige Achsenkreuze mit den Mittelpunkten M und $\mathfrak{M}$ angenommen, so daß Punkte P und $\mathfrak{P}$ der Ebenen wie vorhin durch ihre rechtwinkligen Koordinaten x, y und $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ bestimmt werden. Nun kann man die Frage aufwerfen, ob eine Zuordnung zwischen den Punkten P und $\mathfrak{P}$, die durch

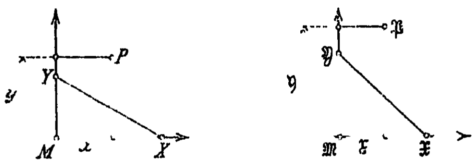


Fig 178

$$\mathfrak{x} = \alpha x, \qquad \mathfrak{y} = \beta y$$

vorgeschrieben wird, immer eine Affinität ist. Dabei sollen α und β gegebene Konstanten sein. Die Frage ist also die, ob sich die Betrachtung der letzten Nummer umkehren läßt. Wenn α etwa negativ ist, ändern wir den Pfeil auf der $\mathfrak{x}$-Achse, so daß sich dann der entgegengesetzte, also ein positiver Wert für α ergibt. Entsprechendes gilt von β. Durch geeignete Festlegung der positiven Achsenrichtungen erreichen wir also, daß α und β positiv werden, und diese Annahme dürfen wir daher für das Folgende machen.

Man kann die beiden Ebenen in diejenige Lage zueinander bringen, die sie in Fig 177 der letzten Nummer hatten, falls man Punkte X und Y auf den Achsen der einen Ebene und entsprechende Punkte $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ auf den Achsen der anderen Ebene so ermitteln kann, daß XY geradeso lang wie $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ wird, denn wenn man dann X mit $\mathfrak{X}$ und Y mit $\mathfrak{Y}$ zur Deckung bringt, ist das Verlangte erreicht. Als entsprechende Punkte X und $\mathfrak{X}$ sowie Y und $\mathfrak{Y}$ gelten dabei solche, deren Koordinaten MX, $\mathfrak{M}\mathfrak{X}$ und MY, $\mathfrak{M}\mathfrak{Y}$ den beiden durch die Gleichungen gegebenen Vorschriften gehorchen, d. h. es muß

$$\mathfrak{M}\mathfrak{X} = \alpha\, MX, \qquad \mathfrak{M}\mathfrak{Y} = \beta\, MY$$

sein. Die Forderung $XY = \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ läßt sich nun so ausdrücken:

$$MX^2 + MY^2 = \mathfrak{M}\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{M}\mathfrak{Y}^2,$$

[1]) Die mit Sternchen versehenen Nummern sind überschlagbar.

gibt also nach Einsetzen der beiden vorstehenden Werte:

$$MX^2 + MY^2 = \alpha^2 MX^2 + \beta^2 MY^2$$

oder:

$$(1 - \alpha^2) MX^2 = (\beta^2 - 1) MY^2,$$

d. h.:

$$\frac{MX^2}{MY^2} = \frac{\beta^2 - 1}{1 - \alpha^2}.$$

Punkte X und Y von der gewünschten Art lassen sich hiernach dann und nur dann ausfindig machen, wenn die rechte Seite der letzten Gleichung positiv ist.

Die durch $\mathfrak{x} = \alpha x$, $\mathfrak{y} = \beta y$ dargestellte Zuordnung zwischen den Punkten zweier Ebenen mit den rechtwinkligen Koordinaten x, y und $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ ist somit dann und nur dann eine Affinität, oder also sie kann dann und nur dann durch eine geeignete Parallelprojektion der einen Ebene auf die andere bewerkstelligt werden, wenn eine der beiden Zahlen α^2 und β^2 größer als Eins und die andere zugleich kleiner als Eins ist. Wir sehen hierbei von den Fallen ab, wo α^2 oder β^2 gleich Eins oder beide gleich Eins sind. Ihre Bedeutung erkennt man namlich ohne weiteres.

Wenn die für α^2 und β^2 angegebene Bedingung nicht erfüllt ist, wenn also α^2 und β^2 beide großer oder beide kleiner als Eins sind, kann man immerhin eine affin-ahnliche Zuordnung (Nr. 126) zwischen den beiden Ebenen herstellen. Man wähle nämlich X und Y beliebig auf der x- und y-Achse und bestimme $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ auf der $\mathfrak{x}$- und $\mathfrak{y}$-Achse so, daß $\mathfrak{M}\mathfrak{X} = \alpha\, MX$ und $\mathfrak{M}\mathfrak{Y} = \beta\, MY$ wird. Dann kann man nach Nr. 126 die eine Ebene durch eine ähnliche Vergrößerung oder Verkleinerung und eine darauffolgende Affinität so in die andere verwandeln, daß den Punkten M, X, Y die Punkte $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ entsprechen, und man erkennt leicht, daß dann auch für beliebige einander entsprechende Punktepaare P und $\mathfrak{P}$ die Vorschrift $\mathfrak{x} = \alpha x$, $\mathfrak{y} = \beta y$ erfüllt ist.

In der analytischen Geometrie wird die durch die Vorschrift $\mathfrak{x} = \alpha x$, $\mathfrak{y} = \beta y$ bedingte Zuordnung stets eine Affinitat genannt In der darstellenden Geometrie jedoch beschränken wir uns gegenuber dieser Affinität im weiteren Sinne, die durch eine ähnliche Veränderung und eine Parallelprojektion zustande kommt, auf die bisher betrachtete Affinität im engeren Sinne, zu deren Herstellung allein eine Parallelprojektion ohne ahnliche Vergrößerung oder Verkleinerung ausreicht. Wird $\beta = \alpha$ gewählt, so stellen die Gleichungen $\mathfrak{x} = \alpha x$, $\mathfrak{y} = \alpha y$ eine Ähnlichkeit dar. Die Ähnlichkeit gehört demnach zu den Affinitaten im weiteren Sinne.

Anmerkung. L Euler (Nr. 65) betrachtete in seiner „Introductio in analysin infinitorum“ (Einfuhrung in die Rechnung mit unendlich kleinen Größen), 2. Bd. Lausanne 1748, im Kap XVIII „De similitudine et affinitate linearum curvarum“ (Über die Ähnlichkeit und Affinität krummer Linien) auf S. 239 u. f. gewisse Kurvenpaare: Er ging von einer ebenen Kurve aus und multiplizierte die Koordinaten x und y ihrer Punkte mit Konstanten, wodurch er von jener Kurve zu einer neuen gelangte. Dabei bemerkte er fur den Fall, wo die beiden Konstanten nicht gleich groß sind. „Verum tamen, quia curvae hoc modo ortae inter se quamdam affinitatem tenent, has curvas affines vocabimus“ (Aber dennoch [nämlich obgleich sie nicht ähnlich sind], weil auf solche Art entstandene Kurven eine gewisse Verwandtschaft oder Affinität miteinander behalten, werden

wir diese Kurven affin nennen). Die Affinität im weiteren Sinne ist demnach als Eulersche Affinität zu bezeichnen.

Aus den Betrachtungen von Nr. 126 kann man schließen: Wird ein ebenes Gebilde F in ein affin-ähnliches Gebilde F_1 und weiterhin dies Gebilde F_1 auf irgendeine andere Art in ein affin-ähnliches Gebilde F_2 verwandelt, so kann man immer das Gebilde F_2 geradezu aus F selbst durch eine ähnliche Veränderung und Affinität ableiten. Mit anderen Worten: Die Aufeinanderfolge zweier Affinitäten im weiteren Sinne ist ersetzbar durch nur eine Affinität im weiteren Sinne. Ein entsprechender Satz gilt jedoch nicht, wenn man sich auf Affinitäten im engeren Sinne beschränkt.

Noch sei ohne Beweis erwähnt, daß allgemein zwei Gleichungen von der Form

$$\mathfrak{x} = a_1 x + b_1 y + c_1 , \qquad \mathfrak{y} = a_2 x + b_2 y + c_2 ,$$

in denen $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ Konstanten sind und $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ ist, stets eine Affinität im weiteren Sinne definieren. Dies sind die sogenannten linearen Transformationen in der analytischen Geometrie der Ebene.

130. Übungen. 1) Man zeichne eine zu einem regelmäßigen Vieleck affine Figur.

2) Eine Affinität in der Doppelebene sei gegeben durch ihre Achse s und durch ein affines Punktepaar $A, \mathfrak{A}$. Ferner sei auf s ein Punkt S gegeben. Dann ist zur Geraden AS die Gerade $\mathfrak{A}S$ affin. Gesucht wird nun eine Gerade durch A derart, daß sie mit AS denselben Winkel bildet wie die zu ihr affine Gerade mit $\mathfrak{A}S$. Liegen A und $\mathfrak{A}$ auf derselben Seite der Affinitätsachse s, so läßt sich die Aufgabe leicht mit Hilfe des Kreises durch $A, \mathfrak{A}$ und S lösen. Liegt $\mathfrak{A}$ auf der anderen Seite von s wie A, so bestimme man zunächst den Spiegelpunkt von $\mathfrak{A}$ hinsichtlich der Affinitätsachse und benutze ihn wie vorher statt $\mathfrak{A}$.

3) Eine Affinität in der Doppelebene sei wieder durch ihre Achse s und durch ein affines Punktepaar $A, \mathfrak{A}$ gegeben. Man bestimme alle diejenigen Winkel mit dem Scheitel A, denen als affin gleichgroße Winkel entsprechen.

4) Wenn man bei einer Affinität in der Doppelebene mit der Achse s und dem Punktepaar $A, \mathfrak{A}$ zwei benachbarte Punkte S, T auf der Achse wählt, so daß $\sphericalangle SAT$ und $\sphericalangle S\mathfrak{A}T$ einander entsprechen, kann man unter der Voraussetzung, daß die Strecke ST unendlich klein werde, die Frage stellen: Welcher unendlich kleine Winkel mit dem Scheitel A entspricht einem geradeso großen unendlich kleinen Winkel mit dem Scheitel $\mathfrak{A}$? Es sind zwei solche Winkel vorhanden.

§ 4. Anwendungen der Affinität.

131. Ebene Schnitte von Prismen. Ein Prisma wird durch seine Kanten bestimmt, nämlich durch mehrere parallele Geraden $a, b, c, d \ldots$, die in einer gewissen Reihenfolge stehen. Es hat als Seiten die Ebenenstreifen (ab), (bc), $(cd) \ldots$ Es ist verschränkt, wenn zwei nicht unmittelbar aufeinanderfolgende Ebenenstreifen eine Gerade gemein haben, die keine Kante ist. Aus einem nicht verschränkten Prisma, das ja beiderseits endlos ist, entsteht ein Prismenkörper durch beiderseitige Abschließung. Diese Begrenzung mag durch irgend zwei Ebenen stattfinden, die selbstredend nicht zur Prismenrichtung, d. h. zur Richtung der Kanten $a, b, c, d \ldots$ parallel sein dürfen.

Die beiden Begrenzungsebenen schneiden das Prisma in zwei Vielecken $ABCD \ldots$ und $\mathfrak{ABCD} \ldots$, die zueinander affin sind. Die Affinität bleibt auch bei Parallelprojektion erhalten (Nr. 121), besteht also auch in der Zeichnung.

Irgendeine Parallelprojektion eines dreiseitigen Prismenkörpers entsteht allemal, wenn man zwei Dreiecke $A'B'C'$ und $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ so zeichnet, daß $A'\mathfrak{A}'$, $B'\mathfrak{B}'$, $C'\mathfrak{C}'$ parallele Geraden a', b', c' sind, siehe Fig. 179. Um diese Behauptung zu beweisen, denke man sich drei parallele Geraden a, b, c im Raum in drei durch a', b', c' gelegten parallelen Ebenen. Dann wähle man noch irgendeine diesen Ebenen parallele Richtung als die der Projektion. Alsdann erhellt, wenn man in der Projektionsrichtung von A', B', C' zurückgeht, daß sich drei Punkte A, B, C auf a, b, c ergeben, ebenso, daß sich drei Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ auf a, b, c ergeben, wenn man von $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ in der Projektionsrichtung zurückgeht. Damit sind dann die Kanten a, b, c und Enddreiecke ABC, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ eines Prismenkörpers ermittelt, von dem Fig. 179 eine Parallelprojektion darstellt. Weil, wie gesagt, auch im Bilde die Affinität zwischen den Dreiecken $A'B'C'$ und $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ besteht, liegen die Schnittpunkte U', V', W' entsprechender Seitenpaare beider Dreiecke auf der Affinitätsachse s', die das Bild der Schnittgeraden der beiden Endebenen ist. Somit gilt der folgende Satz der Geometrie der Ebene

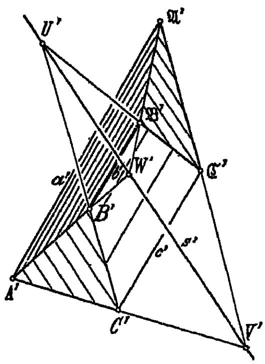


Fig 179

Zeichnet man zwei Dreiecke in der Ebene so, daß die Eckpunkte des einen gepaart mit denen des anderen auf drei parallelen Geraden liegen, so befinden sich die Schnittpunkte je zweier einander entsprechender Dreiecksseiten alle drei auf einer Geraden In Nr. 148 werden wir einem Satz begegnen, der diesen als Sonderfall umfaßt.

Was nun die Parallelprojektion eines beliebigviel-seitigen Prismenkörpers betrifft, so darf, behaupten wir, die Zeichnung $A'B'C'D'$. des einen Endvielecks sowie der parallelen Kanten beliebig angenommen werden, auch darf man drei Eckpunkte $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ der Zeichnung des zweiten Endvielecks beliebig auf den Kantenbildern a', b', c' durch A', B', C' wahlen. In der Tat, nimmt man die Projektionsrichtung irgendwie an und zieht man durch A', B', C', D' . . . die projizierenden Strahlen, so wird ihr Schnitt mit irgendeiner Ebene die Eckpunkte A, B, C, D . . des einen Vielecks im Raume liefern. Es erhellt, daß man weiterhin die Kanten a, b, c, d . . . durch diese Eckpunkte so legen kann, daß ihre Projektionen die Geraden a', b', c', d' . . . sind Schließlich bekommt man durch Zurückgehen in der Projektionsrichtung von $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ aus auf a, b, c drei Eckpunkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ des zweiten Vielecks. Diese drei Punkte bestimmen nun aber die Ebene des zweiten Vielecks vollständig, und in der Tat kann man weiterhin die Projektionen der übrigen Ecken $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ . . leicht ermitteln, indem man die zwischen den Vielecken $A'B'C'$ . . und $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$. in der Zeichnung bestehende Affinitat benutzt.

***132. Parallelprojektion eines gegebenen Dreiecks in ein anderes gegebenes Dreieck**[1]**).** Von dem in der letzten Nummer aufgestellten Satz machen wir eine Anwendung, indem wir die folgende Frage behandeln:

[1]) Die mit Sternchen versehenen Nummern sind uberschlagbar

Gegeben seien zwei Dreiecke ABC und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, läßt sich das Dreieck ABC durch parallele Strahlen derart auf eine Ebene projizieren, daß seine Projektion dem Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ kongruent wird? Diese Frage ist dieselbe wie die folgende: Kann man zwei gegebene Dreiecke in eine solche Lage bringen, daß sie zueinander affin werden?

Nach Nr. 126 kann man das eine gegebene Dreieck nach einer geeigneten ähnlichen Vergrößerung oder Verkleinerung in ein Dreieck verwandeln, das zum andern gegebenen Dreieck affin ist, jetzt aber soll die Anwendung einer Ähnlichkeit ausgeschlossen sein.

Die gewünschte Affinität ist nach dem Satz der letzten Nummer vorhanden, sobald es gelingt, die beiden Dreiecke in einer Ebene in solche Lage zu bringen, daß die Geraden $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$, $C\mathfrak{C}$ einander parallel werden. Ließe sich eine derartige Lage herstellen, so würde $A\mathfrak{A}$ die Kanten BC und $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ in gewissen Punkten X und $\mathfrak{X}$ schneiden. Erstens würde dann X die Strecke BC in demselben Verhältnis teilen wie $\mathfrak{X}$ die Strecke $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, zweitens würde B von AX denselben Abstand wie $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}\mathfrak{X}$ haben, drittens würde C von AX denselben Abstand wie $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}\mathfrak{X}$ haben. Umgekehrt: Wenn es Punkte X und $\mathfrak{X}$ auf BC und $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ gibt, die diesen drei Bedingungen genügen, lassen sich die beiden Dreiecke ABC und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ dadurch, daß man AX und $\mathfrak{A}\mathfrak{X}$ auf eine Gerade legt, in die gewünschte Lage bringen. Das Erfülltsein der ersten und zweiten Bedingung zieht offenbar das der dritten nach sich. Es fragt sich folglich nur noch, ob es Punkte X und $\mathfrak{X}$ auf BC und $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ derart gibt, daß erstens X und $\mathfrak{X}$ die Strecken BC und $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ in demselben Verhältnis teilen und zweitens B von AX denselben Abstand wie $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}\mathfrak{X}$ hat.

Zur Entscheidung der Frage nehmen wir an, die Dreiecke ABC und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ in Fig. 180 seien gegeben, und ihre von A und $\mathfrak{A}$ ausgehenden Höhen seien gleich h und $\mathfrak{h}$. Wird nun X zunächst irgendwo auf BC angenommen, so verhalten sich die Seiten des Dreiecks ABX umgekehrt wie seine Höhen, d. h. der Abstand des Punktes B von AX ist gleich

$$h\frac{BX}{AX}.$$

Entsprechendes ergibt sich, wenn $\mathfrak{X}$ irgendwo auf $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ angenommen wird. Die zweite Bedingung besagt daher, daß

$$h\frac{BX}{AX}=\mathfrak{h}\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{X}}{\mathfrak{A}\mathfrak{X}}$$

sein soll.

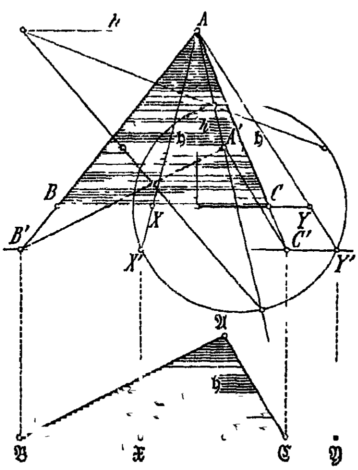


Fig. 180

Wir vergrößern (oder verkleinern) nun das Dreieck ABC von A aus, bis ein Dreieck $AB'C'$ entsteht, in dem $B'C' = \mathfrak{B}\mathfrak{C}$ ist. Dabei gehe der fragliche Punkt X in X' auf $B'C'$ über. Infolge der ersten Bedingung wird jetzt verlangt, daß $B'X' = \mathfrak{B}\mathfrak{X}$ sei. Wird also das Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ so gelegt, daß sich $\mathfrak{B}$ mit B' und $\mathfrak{C}$ mit C' deckt, so daß $\mathfrak{A}$ in eine gewisse Lage A' kommt, so muß sich $\mathfrak{X}$ mit X' decken. Da $BX : AX$ gleich $B'X' : AX'$ ist, wird

mithin an den Punkt X' auf $B'C'$ nur noch die eine Forderung gestellt:

$$h\frac{B'X'}{AX'} = \mathfrak{h}\frac{B'X'}{A'X'}$$

oder einfacher:

$$\frac{AX'}{A'X'} = \frac{h}{\mathfrak{h}}.$$

In der Geometrie der Ebene wird nun gezeigt, daß der geometrische Ort aller Punkte X' der Ebene, deren Entfernungen von zwei gegebenen Punkten A und A' ein gegebenes Verhältnis $h : \mathfrak{h}$ haben, ein Kreis ist. Die Endpunkte eines Durchmessers dieses Kreises sind diejenigen Punkte, die die Strecke AA' innerlich und äußerlich im Verhältnis $h : \mathfrak{h}$ teilen. Sie sind in Fig. 181 konstruiert. Der Kreis schneidet im vorliegenden Fall die Gerade $B'C'$ zweimal; der zweite Punkt ist mit Y' statt X' bezeichnet. Im vorliegenden Fall hat also die Aufgabe zwei Lösungen. Es kann aber bei anderen Annahmen der gegebenen Dreiecke vorkommen, daß der Kreis die Gerade $B'C'$ berührt oder gar nicht trifft. Alsdann gibt es nur eine oder gar keine Lösung. Bleiben wir bei dem vorliegenden Fall, so haben wir nun, nachdem X' und Y' ermittelt sind, die diesen Punkten entsprechenden Punkte X und $\mathfrak{X}$ auf den Seiten BC und $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ der gegebenen Dreiecke zu bestimmen. Dadurch kommen wir entweder zu den Punkten X und $\mathfrak{X}$ oder zu den Punkten Y und $\mathfrak{Y}$. Schließlich verlegen wir das Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ so, daß entweder die Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{X}$ mit der Geraden AX oder die Gerade $\mathfrak{A}\mathfrak{Y}$ mit der Geraden AY zusammenfällt, siehe Fig. 181. In den beiden dadurch entstehenden Lagen, die durch die Indizes 1 und 2 unterschieden sind, ist das Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ zum Dreieck ABC affin. Die beiden zugehörigen Affinitätsachsen sind die Geraden s_1 und s_2.

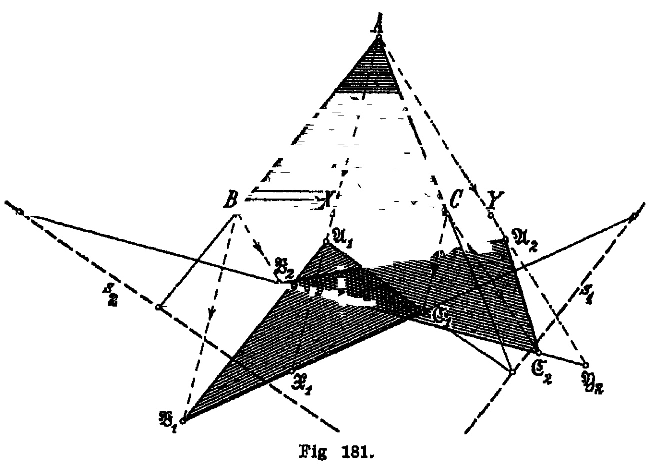


Fig 181.

Man erkennt leicht, was sich ergibt, wenn man das Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ durch dasjenige ersetzt, das durch Umlegen um eine Seite $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ entsteht, also den umgekehrten Drehsinn hat.

133. Parallelprojektion des Kreises. Wir kommen zur Beantwortung der Frage, was für eine Kurve durch beliebige Parallelprojektion oder Affinität aus einem Kreis k entsteht. Dabei können wir uns auf Affinität in einer Doppelebene beschränken (Nr. 124). Die Affinitätsachse sei s, der Mittelpunkt des Kreises M und der dazu affine Punkt $\mathfrak{M}$, siehe

Fig. 182. Nach Nr. 127 werde das rechtwinklige Geradenpaar MX, MY durch M ermittelt, dem ein ebenfalls rechtwinkliges Geradenpaar $\mathfrak{M}X$, $\mathfrak{M}Y$ entspricht. Den zu MX parallelen Kreistangenten der Punkte A und C entsprechen die zu $\mathfrak{M}X$ parallelen Tangenten der Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ der gesuchten Kurve, den zu MY parallelen Kreistangenten der Punkte B und D entsprechen die zu $\mathfrak{M}Y$ parallelen Tangenten der Punkte $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ der gesuchten Kurve. Ist P ein beliebiger Punkt des Kreises, so geht der affine Punkt $\mathfrak{P}$ dadurch hervor, daß man durch P die Parallelen zu MX und MY zieht und die zu ihnen affinen Geraden bestimmt. Insbesondere schneide die durch P zu MX parallel gezogene Gerade die Gerade MY in Q. Der zu Q affine Punkt $\mathfrak{Q}$ ist sofort zu ermitteln. Wir ziehen nun noch über $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ als Durchmesser einen Hilfskreis. Die Gerade $\mathfrak{Q}\mathfrak{P}$ schneide ihn nach ihrer Verlängerung über $\mathfrak{P}$ hinaus in $\bar{P}$, und $\mathfrak{M}\mathfrak{B}$ schneide ihn, über $\mathfrak{B}$ hinaus verlängert, in $\bar{B}$. Wegen der Unveränderlichkeit des Verhältnisses paralleler Strecken bei Affinität (Nr 125) ist nun

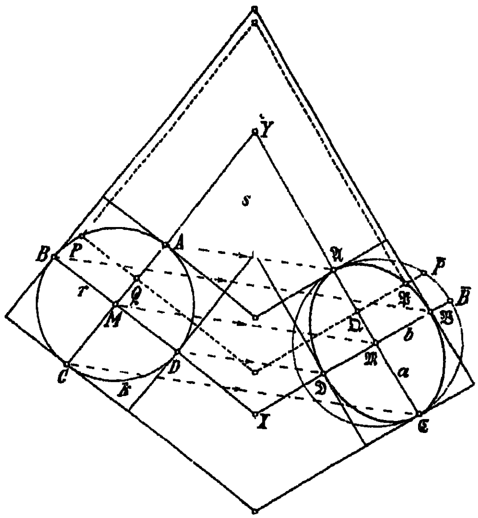


Fig 182

$$\frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{P}}{\mathfrak{M}\mathfrak{B}} = \frac{QP}{MB}$$

oder, wenn der Radius des Kreises k mit r und die Strecke $\mathfrak{M}\mathfrak{B}$ mit b bezeichnet werden:

$$\frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{P}}{b} = \frac{QP}{r}.$$

Ferner ist die Figur $MQAPB$ der Figur $\mathfrak{M}\mathfrak{Q}\mathfrak{A}\bar{P}\bar{B}$ ähnlich, da $MQ : MA = \mathfrak{M}\mathfrak{Q} : \mathfrak{M}\mathfrak{A}$ ist. Also kommt auch:

$$\frac{\mathfrak{Q}\bar{P}}{\mathfrak{M}\bar{B}} = \frac{QP}{MB}$$

oder, wenn $\mathfrak{M}\bar{B}$ $(= \mathfrak{M}\mathfrak{A})$ mit a bezeichnet wird

$$\frac{\mathfrak{Q}\bar{P}}{a} = \frac{QP}{r}.$$

Die beiden Proportionen liefern demnach:

$$\frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{P}}{b} = \frac{\mathfrak{Q}\bar{P}}{a}$$

oder:

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{P} = \frac{b}{a}\,\mathfrak{Q}\bar{P}.$$

Dies besagt: Die Punkte $\mathfrak{P}$ der gesuchten zum Kreis k affinen Kurve gehen aus den Punkten $\bar{P}$ des Hilfskreises um $\mathfrak{M}$ hervor, wenn man alle Lote $\mathfrak{Q}\bar{P}$ mit $b : a$ multipliziert, also in einem konstanten Verhaltnis andert. Nach Nr. 73 entsteht aber dadurch eine Ellipse mit den Halbachsen a und b oder $\mathfrak{M}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{M}\mathfrak{B}$. Somit gilt der Satz:

Das affine Bild eines Kreises ist eine Ellipse, d. h.: Jede Parallelprojektion eines Kreises ist eine Ellipse.

In Nr. 72 war die Ellipse als senkrechte Projektion eines Kreises erklart worden. Jetzt steht fest, daß alle schiefen Parallelprojektionen eines Kreises keine anderen Kurven als die senkrechten Projektionen liefern. Da die projizierenden Strahlen einen allgemeinen Kreiszylinder erzeugen, laßt sich das Ergebnis auch so ausdrücken.

Jeder ebene Schnitt eines allgemeinen Kreiszylinders ist eine Ellipse.

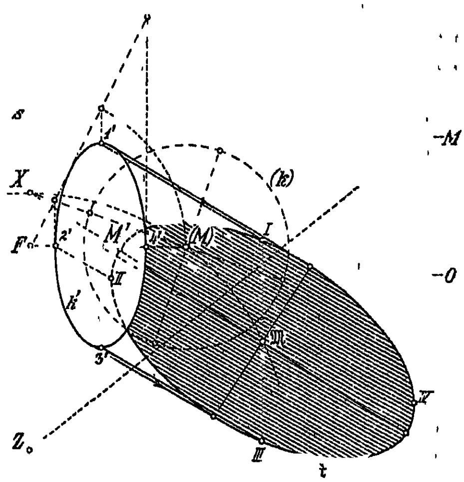
In Nr. 73 dagegen war nur bewiesen worden, daß jeder ebene Schnitt eines geraden Kreiszylinders oder Rotationszylinders eine Ellipse ist. Schließlich kann man das Ergebnis auch so ausdrücken

Der Schlagschatten, den ein Kreis bei Parallelbeleuchtung auf eine Ebene wirft, ist eine Ellipse.

Da die Mitte einer Kreissehne vermöge Parallelprojektion als Mitte einer Ellipsensehne projiziert wird und da parallele Kreissehnen dabei in parallele Ellipsensehnen übergehen, ergibt sich, daß auch bei beliebiger Parallelprojektion jedes rechtwinklige Durchmesserpaar des Kreises konjugierte Durchmesser der Ellipse liefert. Daß die Achsen der Ellipse in Fig. 182 auf $\mathfrak{M}X$ und $\mathfrak{M}Y$ liegen, ist eine Folge hiervon, denn die Achsen sind das einzige zugleich konjugierte und rechtwinklige Durchmesserpaar. Um die Ellipse zu finden, konstruiert man also wie in dieser Figur dasjenige dem gegebenen Kreis k umschriebene Quadrat, dessen affine Figur ein Rechteck ist. Diesem Rechteck ist die Ellipse eingeschrieben, indem die Achsen der Ellipse die Mittellinien des Rechtecks sind.

134. Kreisschatten. Die Ebene eines Kreises k sei durch ihre Spurgerade s und durch die senkrechte Projektion M' und Höhe des Mittelpunktes M gegeben, siehe Fig. 183. Nach Nr. 88 zeichnet man die senkrechte Projektion k' des Kreises. Ferner werde irgendein Punkt $\mathfrak{M}$ der Tafel als Schlagschatten der Kreismitte gewahlt. Der Schlagschatten $\mathfrak{k}$ des Kreises k ist eine zu k affine Ellipse; die Affinität bleibt auch dann bestehen, wenn man die Kreisebene um die Affinitatsachse s in die Tafel umlegt (Nr. 124). Dies kann auf zwei Arten geschehen, wir wahlen, damit die Zeichnung nicht zu weitlaufig wird, denjenigen umgelegten Kreismittelpunkt (M), der auf derselben Seite von s wie M' liegt. Nun besteht auf der Tafel als Doppelebene eine Affinitat zwischen dem Kreis (k) um (M) und der gesuchten Ellipse $\mathfrak{k}$ um $\mathfrak{M}$. Man findet also die Achsen der Schattenellipse wie in der letzten Nummer. Eine Probe der Richtigkeit der Zeichnung liegt darin, daß alle den Kreis k treffenden Lichtstrahlen auch die Ellipse $\mathfrak{k}$ treffen müssen. Danach haben die beiden Ellipsen k' und $\mathfrak{k}$ zwei gemeinsame und zu $M'\mathfrak{M}$ parallele Tangenten. Eine weitere Probe der Richtigkeit ergibt sich, wenn man die Schlagschatten des zur Tafel parallelen und des steilsten Kreisdurchmessers bestimmt. Die Endpunkte dieser beiden Durchmesser seien der Reihe

nach mit *1* bis *4* bezeichnet. Der Schatten *I III* des zur Tafel parallelen Durchmessers *1 3* ist ihm selbst parallel und gleich, der Schatten *II IV* des Durchmessers *2 4* geht verlängert nach dem Spurpunkt *F* der Fallinie *2 4*. Da *I III* und *II IV* als Schatten rechtwinkliger Kreisdurchmesser konjugierte Durchmesser der Ellipse sind, hatte man die Achsen der Schattenellipse auch aus ihnen nach Nr. 85 ableiten können. Faßt man irgendeinen Punkt *P* des Kreises *k* ins Auge, so kann kein Zweifel darüber bestehen, welcher Punkt 𝔓 von 𝔨 sein Schlagschatten ist. Denn dieser Schatten muß einer der Schnittpunkte der durch *P'* zu *M'* 𝔐 parallel gezogenen Lichtstrahlprojektion mit 𝔨 sein. Welcher von beiden, ergibt sich daraus, wie sich *P* in die Reihenfolge *1 2 3 4* beim Umlaufen des Kreises 𝔨 einordnet; in entsprechender Weise muß sich 𝔓 in die Reihenfolge *I II III IV* beim Umlaufen der Schattenellipse einordnen. Man kann aber auch so vorgehen. Die Gerade *MP* hat ihren Spurpunkt auf *s*, ebendahin muß also der Schatten 𝔐𝔓 von *MP* gehen.


Fig. 183

Nimmt man an, die Kreisebene sei undurchsichtig, so ist sie hell oder dunkel, je nachdem der Umlaufsinn *1' 2' 3' 4'* mit dem Umlaufsinn *I II III IV* übereinstimmt oder ihm entgegen ist (Nr. 111). In Fig. 183 ist die Kreisebene hell. Sie wäre dunkel, wenn der Schatten 𝔐 auf der anderen Seite der Spurgeraden *s* angenommen worden wäre. Der Schatten des Kreises ist bloß eine Strecke, wenn 𝔐 auf der Spurgeraden *s* liegt.

Die konjugierten Durchmesser *I III* und *II IV* sind nur dann zueinander senkrecht, also die Achsen der Schattenellipse, wenn *M'*𝔐 zu *s* senkrecht ist. In diesem Sonderfall bedarf man der Umlegung der Kreisebene um *s* nicht. Vielmehr genügt dann zur Bestimmung von *II* und *IV* die Umlegung der durch *M* gehenden und zu *s* senkrechten Ebene, indem man dadurch den Schatten des in ihr gelegenen steilsten Kreisdurchmessers *2 4* ermittelt.

Die Spurgerade *s* der Kreisebene kann unerreichbar sein, z. B. wenn die Kreisebene durch den Punkt *M* und eine nicht durch *M* gehende Höhenlinie *h* gegeben ist. Dann wird man die Tafel nach Nr. 12 durch die Höhenebene ersetzen, die *h* enthält, und zunächst den Schlagschatten auf dieser Höhenebene bestimmen. Dazu braucht man den Schnittpunkt 𝔐̄ des Lichtstrahls *M*𝔐 mit der Höhenebene. Hat man ihn als denjenigen Punkt von *M*𝔐 gefunden, der dieselbe Höhe wie *h* hat, und alsdann wie vorher die Schattenellipse mit der Mitte 𝔐̄' konstruiert, so geht der Schlagschatten des Kreises auf der Tafel dadurch hervor, daß man die Schattenellipse um die Strecke 𝔐̄'𝔐 verschiebt.

Ist die Ebene des Kreises *k* zur Tafel parallel, so ist der Kreisschatten ein kongruenter Kreis.

135. Kegel- und Zylinderschatten. Ein Kreiskegel ist durch seinen Grundkreis k und seine Spitze S bestimmt. Man braucht also außer dem in der letzten Nummer Gegebenen nur noch die senkrechte Projektion und Höhe der Spitze S anzunehmen. Der Schlagschatten $\mathfrak{k}$ des Grundkreises k ergibt sich wie vorhin, der Schlagschatten $\mathfrak{S}$ der Spitze S nach Nr. 110. Die Schlagschatten aller Mantellinien des Kegels sind die Strecken von $\mathfrak{S}$ nach allen Punkten der Ellipse $\mathfrak{k}$. Wenn der Punkt $\mathfrak{S}$ außerhalb $\mathfrak{k}$ liegt, wird der Schlagschatten des Kegels durch einen Teil der Ellipse $\mathfrak{k}$ und durch die von $\mathfrak{S}$ an $\mathfrak{k}$ gehenden Tangenten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ begrenzt. Diese Tangenten zeichnet man entweder, indem man geradezu das Lineal in $\mathfrak{S}$ und an $\mathfrak{k}$ anlegt oder nach Nr. 78. Die Berührungspunkte der Tangenten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ seien $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$. Das Folgende wird zeigen, daß es auf die genaue Ermittlung von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ nicht ankommt. Die Punkte $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ sind die Schatten gewisser Punkte P und Q des Grundkreises k, die man durch Zurückgehen in der Lichtrichtung bestimmt. Dabei muß man, wie in voriger Nummer auseinandergesetzt wurde, die richtigen Punkte P' und Q' auf k' feststellen. Die von S nach P und Q gehenden Mantellinien p und q haben die Schatten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, und die Ebenen $(p, \mathfrak{p})$ und $(q, \mathfrak{q})$ sind die Ebenen der den Kegelmantel streifenden Lichtstrahlen, daher p und q die Grenzen des Eigenschattens des Kegelmantels (Nr. 117).

Bezüglich der Sichtbarkeit und Helligkeit ist zu bemerken: Wird der Kegel als undurchsichtig angenommen, so ist seine Grundfläche nur dann sichtbar, wenn seine Spitze S unterhalb seiner Grundebene liegt. Da man leicht die Höhe desjenigen Punktes dieser Ebene, dessen Projektion mit S' zusammenfällt, feststellen und mit der Höhe von S vergleichen kann, läßt sich jeder Zweifel hierüber beseitigen. Der Kegelmantel zerfällt in einen hellen und einen dunklen Teil; die Grenzen zwischen beiden sind p und q. Zur Entscheidung darüber, welcher Teil hell ist, nimmt man auf dem sichtbaren Teil des Grundkreises zwei benachbarte Punkte A und B an; die nach ihnen gehenden Mantellinien a und b begrenzen einen schmalen und als eben zu betrachtenden Teil des Mantels. Man bestimmt nun die ungefähre Lage der Schatten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von A und B, ohne sie genau zu konstruieren; nach Nr. 111 ist der herausgegriffene Teil des sichtbaren Mantels hell oder dunkel, je nachdem der Umlaufsinn $S'A'B'$ mit dem Umlaufsinn $\mathfrak{S}\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ übereinstimmt oder ihm entgegen ist. Diese Entscheidung gilt alsdann für den ganzen das herausgegriffene Stück enthaltenden Teil des Mantels bis p und q.

Da das Licht längs p und q den Mantel streift, findet der Übergang vom Hellen zum Dunkeln auf dem Kegel ganz allmählich statt; in Wahrheit sind die Grenzen p und q deshalb nicht scharf zu sehen. Sie sind die Linien des Streiflichtes auf dem Kegel. Man folgert hieraus, daß, wie schon gesagt wurde, die genaue Bestimmung dieser beiden Mantellinien nicht erforderlich ist. Obgleich $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ Tangenten der Ellipse $\mathfrak{k}$ sind, berühren doch p und q keineswegs den Grundkreis k. Aus dem Umstand, daß der Schatten einer Geraden den einer Kurve berührt, darf man nicht schließen, daß auch in Wirklichkeit eine Berührung eintrete. Vgl. eine ähnliche Bemerkung in Nr. 94.

Wenn der Schatten $\mathfrak{S}$ der Kegelspitze innerhalb der Ellipse $\mathfrak{k}$ liegt, ist der Kegelmantel entweder überall hell oder

überall dunkel, wenn er gerade auf $\mathfrak{k}$ liegt, ist auf dem Kegelmantel eine Streiflichtlinie vorhanden (vgl. Nr. 117).

Die senkrechte Projektion eines beliebigen Zylinders, der durch zwei parallel liegende Kreise abgeschlossen ist, ergibt sich, indem man zunächst die Projektionen dieser beiden Kreise zeichnet. Sie sind einander kongruent. Bezüglich der Schattenkonstruktion gilt Entsprechendes wie beim Kegel. Die Mantellinien, die den Eigenschatten begrenzen, liegen einander gegenüber, so daß der Zylindermantel zur Hälfte hell, zur Hälfte dunkel ist, es sei denn, daß die Richtung des Zylinders die des Lichtes ist, in welchem Fall der ganze Mantel Streiflicht hat.

136. Kugelschatten. Diejenigen Lichtstrahlen, die bei Parallelbeleuchtung die Kugel streifen, also die Eigenschattengrenze bestimmen, berühren die Kugel in den Punkten, deren Radien zur Lichtrichtung senkrecht sind. Daher ist die Eigenschattengrenze der Kugel derjenige Großkreis k, der den Lichtstrahl der Kugelmitte zur Achse hat.

Die senkrechte Projektion M' und Höhe der Kugelmitte, der Kugelumriß und der geometrische Schlagschatten $\mathfrak{M}$ der Kugelmitte auf der Tafel seien gegeben, siehe Fig. 184. Der Kreis k erscheint als eine Ellipse k', deren Hauptachse $1'\ 3'$ der zu $M'\mathfrak{M}$ senkrechte Durchmesser des Kugelumrisses ist (Nr. 88); ihre Nebenachse $2'\ 4'$ ergibt sich durch Umlegen der projizierenden Ebene des Lichtstrahls $M\mathfrak{M}$. Die Schlagschattengrenze $\mathfrak{k}$ der Kugel ist der Schlagschatten des Kreises k. Da $M\mathfrak{M}$ zur

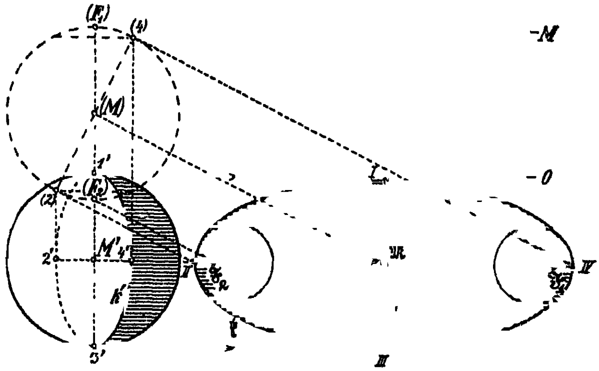


Fig 184

Kreisebene senkrecht ist, liegt hier der in Nr. 134 erwähnte Sonderfall vor, in dem sich die Hauptachse $II\ IV$ der Ellipse $\mathfrak{k}$ sofort aus jener Umlegung ergibt.

Die Schlagschattengrenze $\mathfrak{k}$ ist der Schnitt der Tafel mit demjenigen Kreiszylinder, der die Kugel berührt und die Richtung der Lichtstrahlen hat. Dies ist ein zwar gegenüber der Tafel schräg liegender, aber doch gerader Zylinder mit dem Grundkreis k. Nach Nr. 74 sind die Brennpunkte $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ von $\mathfrak{k}$ mithin die Punkte, in denen die Tafel von denjenigen dem Zylinder eingeschriebenen Kugeln berührt wird, die auch die Tafel berühren. Diese Kugeln aber gehen aus der gegebenen Kugel hervor, wenn man diese in der Lichtrichtung so weit verschiebt, bis sie die Tafel von oben oder von unten berührt. Die Berührungspunkte ergeben sich daher aus der höchsten und tiefsten Stelle F_1 und F_2 der gegebenen Kugel, indem man von ihnen in der Lichtrichtung bis zur Tafel geht, d. h. ihre geometrischen Schlagschatten $\mathfrak{F}_1$ und $\mathfrak{F}_2$ bestimmt, was man leicht mit Hilfe der schon benutzten Umlegung der

projizierenden Ebene des Lichtstrahls $M\mathfrak{M}$ ausführt. Demnach gilt der Satz:

Wirft eine Kugel bei Beleuchtung durch parallele Strahlen einen Schlagschatten auf eine Ebene, so sind die Brennpunkte der Schlagschattenellipse die geometrischen Schlagschatten der Endpunkte des zur Ebene senkrechten Kugeldurchmessers.

Der Schlagschatten, den irgendein Kreis der Kugel auf die Tafel wirft, ist allerdings nicht wahrnehmbar, wenn die Kugel undurchsichtig ist, läßt sich aber doch konstruieren. Da der Großkreis k auf der Kugel Hell und Dunkel scheidet, liegt ein Kugelkreis ganz im Hellen oder Dunkeln, wenn er k nicht trifft, während er zum Teil beleuchtet wird, wenn er k schneidet. Im ersten Fall liegt der geometrische Schlagschatten des Kreises völlig innerhalb der Schlagschattenellipse $\mathfrak{k}$, ohne an sie heranzukommen. Im zweiten dagegen kommt er an zwei Stellen berührend an diese Ellipse heran. Deshalb haben diejenigen Kugelkreise, die den Großkreis k berühren, solche Schlagschatten, bei denen jene zwei Berührungsstellen unendlich nahe zusammenrücken. Dies gilt insbesondere für diejenigen Höhenkreise (Nr. 89), die durch die tiefste oder höchste Stelle des Großkreises k gehen, nämlich durch die Stelle 2 oder 4. Die Schlagschatten dieser Höhenkreise sind mit ihnen kongruente Kreise, die in den Scheiteln II oder IV die Schlagschattenellipse $\mathfrak{k}$ in je zwei unendlich benachbarten Punkten berühren, d. h. sie sind die Krümmungskreise dieser Hauptscheitel (Nr. 80). Wenn die Lichtstrahlen so schräg einfallen, daß der Scheitel IV der Ellipse $\mathfrak{k}$ unerreichbar wird, entnimmt man daher zweckmäßig von dem Höhenkreis durch die Stelle 2 den Radius des Krümmungskreises des Hauptscheitels II.

137. Nochmals die Ermittlung der Ellipse aus konjugierten Durchmessern. Nach Nr. 85 sind zwei beliebige Strecken $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ mit gemeinsamem Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ stets konjugierte Durchmesser einer Ellipse. Damals wurde ein einfaches Verfahren zur Bestimmung der Ellipsenachsen nach Lage und Länge gegeben. Ein anderes Verfahren geht wie folgt hervor: Man macht $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ zu Mittellinien eines Parallelogramms, siehe Fig. 185. Dieses Parallelogramm, das der Ellipse umschrieben ist, muß nun die Projektion eines dem Kreis umschriebenen Quadrates sein (Nr. 72). Die Größe des Quadrates ist nicht bekannt; da aber alle Quadrate einander ähnlich sind, ist die Ellipse samt umschriebenem Parallelogramm zu einem beliebigen Kreis samt umschriebenem Quadrat affin-ähnlich (Nr. 126). Deshalb benutzen wir eine Seite des Parallelogramms als Quadratseite und stellen das Quadrat mit

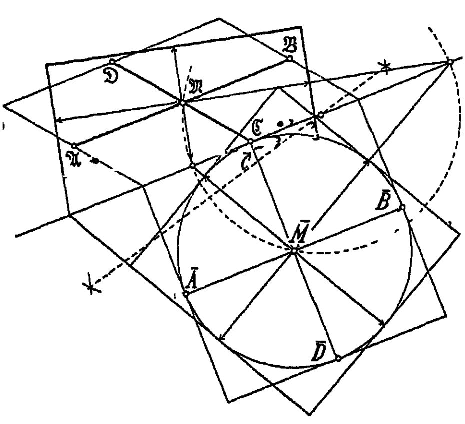


Fig. 185.

dem eingeschriebenen Kreis her. Offenbar ist nun dies Quadrat mit den Mittellinien AB und CD zum Parallelogramm affin, indem die gemeinsame Seite beider die Affinitatsachse ist und der Mitte M des Quadrates die Mitte $\mathfrak{M}$ des Parallelogramms entspricht. Nach Nr. 126 ist daher die gesuchte Ellipse zum konstruierten Kreis affin. Deshalb findet man ihre Achsen auf Grund von Nr 133, indem man denjenigen rechten Winkel mit dem Scheitel M bestimmt, dem ein rechter Winkel mit dem Scheitel $\mathfrak{M}$ entspricht. Man braucht nicht alles, was in Fig 185 der Vollständigkeit halber angegeben ist, zu zeichnen. Da sich hier sogleich dasjenige der Ellipse umschriebene Rechteck ergibt, das nach Nr 82 zum Zeichnen der Ellipse gebraucht wird, ist dies Verfahren nicht viel umständlicher als das in Nr. 85 mitgeteilte. Außerdem laßt es sich leichter merken.

Man kann auf mancherlei Weisen eine Ellipse mit gegebenen konjugierten Durchmessern $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ Punkt fur Punkt aus einem affinen Kreis ableiten. Ein Verfahren wurde in Nr. 85, Fig 124, angegeben Ein anderes ergibt sich so Man benutzt wie in Fig. 186 den Durchmesser $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ als Durchmesser eines Kreises Der dazu senkrechte Kreisdurchmesser sei CD Augenscheinlich ist dann die Ellipse zum Kreis affin, indem $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ die Affinitatsachse ist und die Punkte C, $\mathfrak{C}$ sowie D, $\mathfrak{D}$ zueinander affin sind Man findet nun zu einem Punkt P des Kreises den affinen Ellipsenpunkt $\mathfrak{P}$ durch Parallelenziehen zu $C\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}\mathfrak{C}$ und $C\mathfrak{C}$, wie es die Figur zeigt

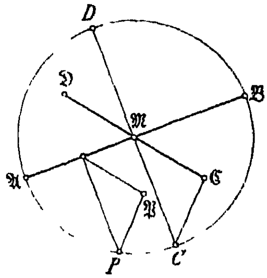


Fig 186

Wie man eine Ellipse mit konjugierten Durchmessern $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ durch Einhullung mittels ihrer Tangenten herstellen kann, wurde in Nr 85, Fig 126, gelehrt

Ist einem Kreis ein Quadrat umschrieben, so sind auf den Diagonalen des Quadrates zwei zueinander senkrechte Kreisdurchmesser gelegen, und ihre Langen verhalten sich zu denen der Diagonalen wie $1 : \sqrt{2}$ Die Tangenten der Endpunkte dieser beiden Kreisdurchmesser sind zu den Diagonalen des Quadrates parallel Daraus folgt durch Affinitat Sind $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ konjugierte Durchmesser einer Ellipse und wird das zugehörige Parallelogramm konstruiert, dessen Mittellinien $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ sind, so liegen auf den Diagonalen des Parallelogramms wieder zwei konjugierte Durchmesser, und ihre Langen verhalten sich zu denen der Diagonalen wie $1 \cdot \sqrt{2}$ (Nr. 125). Man kann deshalb die Endpunkte dieses Paares leicht ermitteln, siehe Fig. 187, indem man geradeso wie in Fig. 114 von Nr. 82 konstruiert, wobei jetzt der Durchmesser $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ an die Stelle der Hauptachse tritt. Man bekommt so acht Ellipsenpunkte nebst ihren Tangenten, so daß man die Ellipse genügend genau zeichnen kann, wenn man auf die Bestimmung ihrer Achsen kein Gewicht legt. **Dies Verfahren kann man anwenden, wenn es nur darauf ankommt, einen allein sichtbaren kleineren Teil einer Ellipse zu zeichnen.**

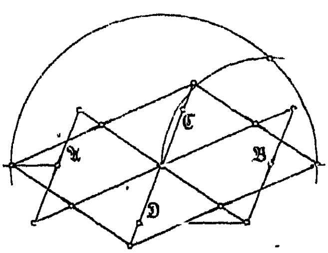


Fig 187.

138. Noch eine Punktkonstruktion der Ellipse. Wir behaupten: Ein Dreieck 𝔄𝔅ℭ samt einem auf 𝔄𝔅 zwischen 𝔄 und 𝔅 gelegenen Punkt 𝔇 läßt sich stets durch Affinität in ein bei C rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem Höhenfußpunkt D von der Spitze C aus verwandeln. In der Tat: Man schlage über 𝔄𝔅 als Durchmesser den Kreis, siehe Fig. 188. Er wird, weil 𝔇 zwischen 𝔄 und 𝔅 liegt, durch das in 𝔇 auf 𝔄𝔅 errichtete Lot zweimal getroffen. Einer der Schnittpunkte heiße C. Werden 𝔄, 𝔅, 𝔇 nun noch mit A, B, D bezeichnet, so ist das bei C rechtwinklige Dreieck ABC mit der Höhe CD in der Tat affin zum Dreieck 𝔄𝔅ℭ mit der Transversalen ℭ𝔇, indem die Gerade AB die Affinitätsachse ist.

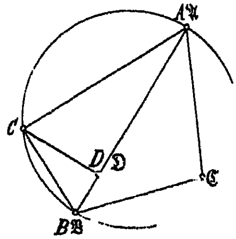


Fig. 188

Bei dieser Affinität entspricht dem Kreis eine Ellipse durch 𝔄, 𝔅, ℭ. Da die Kreistangenten von A und B zu CD parallel sind, hat die Ellipse in 𝔄 und 𝔅 die zu ℭ𝔇 parallelen Tangenten. Mithin gibt es stets wenigstens eine Ellipse, die durch 𝔄, 𝔅, ℭ geht und in 𝔄 und 𝔅 die zu ℭ𝔇 parallelen Tangenten hat. Es gibt aber auch nur eine derartige Ellipse. Gäbe es nämlich noch eine zweite, so müßte sie ebenfalls durch Affinität aus einem Kreis entstanden sein. Da die Ellipse 𝔄𝔅 als Durchmesser hat, weil die Tangenten in 𝔄 und 𝔅 zueinander parallel sind, muß sie durch Affinität aus einem Kreis ableitbar sein, der 𝔄𝔅 zum Durchmesser hat. Dies aber ist gerade der vorhin benutzte Kreis. Somit gilt der Satz:

Ist ein Dreieck 𝔄𝔅ℭ sowie auf 𝔄𝔅 zwischen 𝔄 und 𝔅 ein Punkt 𝔇 gegeben, so ist eine und nur eine Ellipse vorhanden, die durch 𝔄, 𝔅, ℭ geht und in 𝔄 und 𝔅 die zu ℭ𝔇 parallelen Tangenten 𝔞 und 𝔟 hat.

Auf Grund dieses Satzes kann man eine Konstruktion der Ellipse Punkt für Punkt ableiten, und zwar ist diese Konstruktion eine Verallgemeinerung der in Nr. 85, Fig. 124, angegebenen. Ist nämlich AB ein Durchmesser und C ein Punkt eines Kreises, siehe Fig. 189, so daß die Kreistangenten a und b in A und B zu AB senkrecht sind, so ziehe man die Geraden AC und BC. Darauf wähle man irgendeine Parallele z zu a und b. Sie schneide AC in X und BC in Y. Weil $BC \perp AC$ und $XY \perp AB$ ist, muß dann X der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABY sein, d. h. BX ist die dritte Höhe. Mithin ist $AY \perp BX$, d. h. der Schnittpunkt Z von AY und BX liegt auf dem Kreis. Dies gilt, wie auch immer die Parallele z zu CD gezogen sein mag. Indem man z alle möglichen Lagen gibt, bekommt man alle Punkte Z des Kreises ohne Benutzung des Zirkels durch bloßes Ziehen von Geraden, insbesondere Parallelen. Nun führen wir auf Fig. 189 eine Affinität aus. Dann ergibt sich die folgende Punktkonstruktion der Ellipse:

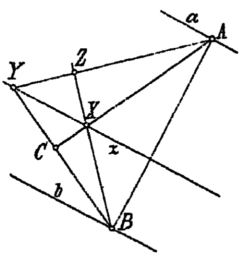


Fig. 189

Liegt ein Dreieck 𝔄𝔅ℭ und ein Punkt 𝔇 auf 𝔄𝔅 zwischen 𝔄 und 𝔅 vor, so findet man Punkt für Punkt die einzige Ellipse, die durch 𝔄, 𝔅, ℭ geht und in 𝔄 und 𝔅 die zu ℭ𝔇 parallelen Tangenten 𝔞 und 𝔟 hat, indem man eine willkürliche Paral-

lele $\mathfrak{z}$ zu $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zieht, sie mit der Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ schneidet und dann den Schnittpunkt $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ als Ellipsenpunkt bestimmt. Siehe Fig. 190.

139. Parallelprojektion von Ellipsen. Projiziert man wen Konstruktion in Fig 190 auf irgendeine Ebene mittels parallele len, so ergibt sich wieder eine Konstruktion von ganz derselben sie nur das Ziehen von Geraden und Parallelen erfordert und G und Parallelen durch Parallelprojektion wieder in Geraden und Parallelen übergehen. Nun wissen wir, daß jene Konstruktion stets eine Ellipse liefert, also auch ihre Parallelprojektion. Somit gilt der wichtige Satz

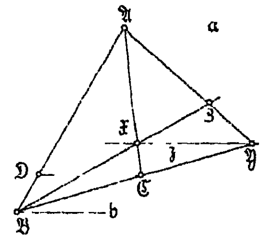


Fig 190

Jede Parallelprojektion einer Ellipse ist wieder eine Ellipse Oder auch Vermöge Affinitat geht jede Ellipse in eine Ellipse uber. Noch anders gesagt Der Begriff der Ellipse verhalt sich invariant gegenuber allen Parallelprojektionen und Affinitaten Aus den Erklarungen des Mittelpunktes, der Durchmesser und insbesondere der konjugierten Durchmesser in Nr. 72 und aus den Gesetzen der Parallelprojektion oder Affinitat ergibt sich ferner ohne weiteres Wenn man auf eine Ellipse eine Parallelprojektion oder Affinitat ausubt, wodurch sie in eine neue Ellipse verwandelt wird, liefert der Mittelpunkt der Ellipse den der neuen Ellipse, jeder Durchmesser der Ellipse einen Durchmesser und jedes konjugierte Durchmesserpaar der Ellipse ein konjugiertes Durchmesserpaar der neuen Ellipse

Man beachte, daß dagegen die Projektion der Ellipsenachsen im allgemeinen **nicht** die Achsen der Bildellipse liefert, sondern nur ein konjugiertes Durchmesserpaar, denn der rechte Winkel der Achsen wird im Bilde im allgemeinen nicht mehr ein rechter Winkel sein Noch weniger darf man erwarten, daß die Projektion der Brennpunkte der Ellipse die Brennpunkte der Projektion liefere Am deutlichsten zeigt sich dies bei der Projektion des Kreises Ein Kreis ist nach Nr 76 eine Ellipse mit im Mittelpunkt zusammenfallenden Brennpunkten. Die Projektion des Kreises liefert aber eine Ellipse mit getrennten Brennpunkten

Um die zu einer Ellipse affine Ellipse zu zeichnen, wahlt man ein konjugiertes Durchmesserpaar AB und CD aus — insbesondere kann man die Haupt- und Nebenachse nehmen — und ermittelt ihre Bilder $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$. Diese sind konjugierte Durchmesser der gesuchten Ellipse, deren Achsen man nach Nr. 85 oder 137 findet

Bei Parallelprojektion bilden die von einer Ellipse ausgehenden projizierenden Strahlen einen sogenannten **elliptischen Zylinder** Deshalb kann man auch sagen.

Jeder ebene Schnitt eines elliptischen Zylinders ist eine Ellipse.

Insbesondere liefert der zur Richtung des Zylinders senkrechte Schnitt, den wir kurz den **Querschnitt** nennen, die **Querschnittellipse**. Jeder elliptische Zylinder laßt sich deshalb als ein **gerader** elliptischer Zylinder auffassen. Die senkrechte Projektion jedes ebenen Zylinder-

schnittes auf die Querschnittebene ist die Querschnittellipse, d. h. Jede Ellipse, deren senkrechte Projektion auf die Querschnittebene die Querschnittellipse liefert, gehört dem Zylinder an. Aber in Nr. 72 ist die Querschnittellipse als senkrechte Projektion eines Kreises erklärt worden Somit hat jeder elliptische Zylinder insbesondere Kreisschnitte Man kann einen dieser Kreisschnitte als Grundlinie des Zylinders benutzen. Dann erhellt· Jeder elliptische Zylinder ist auch als Kreiszylinder aufzufassen. Ein in Nr. 123 aufgestellter Satz lehrt übrigens, daß es zwei verschiedene Scharen von parallelen Ebenen gibt, die einen nicht geraden Kreiszylinder in Kreisen schneiden. Dies besagt· Ist der senkrechte Querschnitt eines elliptischen Zylinders kein Kreis, so gibt es zwei verschiedene Scharen von parallelen Ebenen, die den Zylinder in Kreisen schneiden.

Nach dem Vorhergehenden ist der Begriff des elliptischen Zylinders nicht umfassender als der des Kreiszylinders

Bei Parallelbeleuchtung erzeugen alle eine Ellipse treffenden Lichtstrahlen einen elliptischen Zylinder Mithin ist der Schlagschatten, den eine Ellipse bei Parallelbeleuchtung auf eine Ebene wirft, stets eine Ellipse Da alle Lichtstrahlen, die eine Gerade treffen, eine Ebene erzeugen, falls die Gerade nicht etwa selbst die Lichtrichtung hat, folgt auch Der geometrische Schlagschatten, den eine Gerade, die nicht die Lichtrichtung hat, auf einen elliptischen Zylinder wirft, ist eine Ellipse Als wirklich wahrnehmbarer, physikalischer Schlagschatten wird aber nur ein Teil dieser Ellipse auftreten, ja es kann gar keiner vorhanden sein.

Wenn zwei Ellipsen e und $\mathfrak{e}$ mit den Mittelpunkten M und $\mathfrak{M}$ zueinander affin sind, ist die Richtung von M nach $\mathfrak{M}$ die der Affinität. Handelt es sich um Affinitat in einer Doppelebene, so sind diejenigen Tangenten von e, die diese Richtung haben, zugleich Tangenten von $\mathfrak{e}$. Nun wollen wir dies umkehren Es werde also angenommen, daß zwei Ellipsen, e und $\mathfrak{e}$ mit den Mitten M und $\mathfrak{M}$ die zu $M\mathfrak{M}$ parallelen Tangenten a und b gemein haben, und wir wollen beweisen, daß sie dann zueinander affin sind.

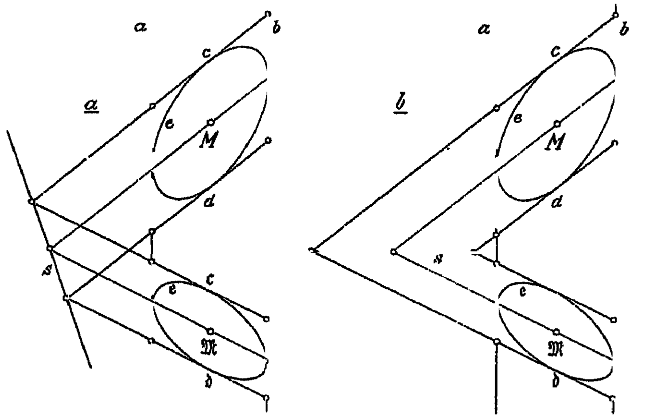


Fig 191

Zunachst zeichnet man derartige Ellipsen, indem man zwischen zwei parallele Geraden a, b zwei Parallelogramme setzt, von denen also je zwei Seiten auf a und auf b liegen. Die beiden anderen Seiten des einen Parallelogramms seien c, d, die des anderen $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, siehe Fig. 191a. Dann benutzt man die Mittellinien der Parallelogramme als konjugierte Durchmesser, so daß man die Achsen der Ellipsen e und $\mathfrak{e}$

ermitteln kann (Nr. 85, 137). Wird nun c mit $\mathfrak{c}$ und d mit $\mathfrak{d}$ zum Schnitt gebracht, so wird die Gerade s, die beide Schnittpunkte verbindet, in der Mitte zwischen beiden Punkten von der Parallelen zu c durch M sowie von der Parallelen zu $\mathfrak{c}$ durch $\mathfrak{M}$ getroffen. Mithin verwandelt diejenige Affinität, die s zur Achse hat und bei der dem Punkt M der Punkt $\mathfrak{M}$ entspricht, das eine Parallelogramm in das andere und daher auch die eine Ellipse in die andere. Aber man kann auch anders vorgehen, nämlich $\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{d}$ vertauschen, also statt der Schnittpunkte von c, $\mathfrak{c}$ und von d, $\mathfrak{d}$ die von c, $\mathfrak{d}$ und von d, $\mathfrak{c}$ benutzen. Dadurch ergibt sich eine neue Affinitatsachse s, siehe Fig. 191 b. Zwei Ellipsen in der Doppelebene sind demnach dann und nur dann affin, wenn sie zwei parallele Tangenten gemein haben, und zwar sind sie dann auf zwei verschiedene Weisen affin. Dabei ist nämlich zwar die Affinitätsrichtung dieselbe, aber die Affinitätsachse verschieden.

Faßt man die Zeichnungen in Fig 191 als Parallelprojektionen räumlicher Figuren auf, also e und $\mathfrak{e}$ als Darstellungen zweier Ellipsen in verschiedenen Ebenen, so sind die Geraden, die affine Punkte verbinden, die Bilder von Geraden, die zur Verbindenden der Mitten der beiden im Raum gelegenen Ellipsen parallel sind, d. h. es liegt im Raum ein elliptischer Zylinder mit zwei ebenen Schnitten vor, siehe Fig 192. Demnach sind zwei Ellipsen auf der Tafel, die zwei parallele Tangenten gemein haben, zusammen mit diesen Tangenten stets als Umriß einer Parallelprojektion eines zylindrischen Körpers zu betrachten, der von zwei Ebenen in Ellipsen begrenzt wird. Von den gezeichneten Ellipsen kommt für den eigentlichen Umriß selbstredend nur je ein Bogenstück in Betracht.

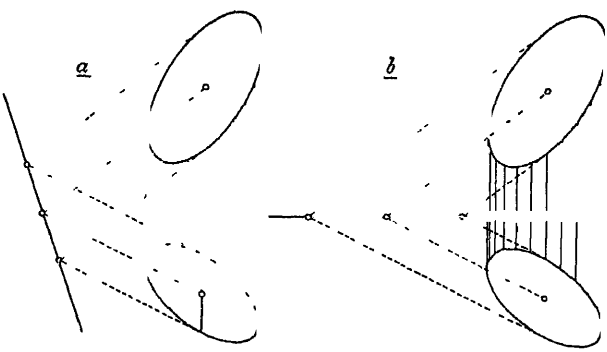


Fig 192

140. Ebene Schnitte zweier elliptischer Zylinder. Haben zwei verschiedene elliptische Zylinder dieselbe Richtung, so ist es möglich, daß sie einander durchdringen, sie haben dann Mantellinien und keine krummen Linien gemein.

Wir betrachten nun zwei elliptische Zylinder von verschiedenen Richtungen. Sie können einander durchdringen; dann ist die gemeinsame Linie krumm. Über den allgemeinen Fall werden wir erst später sprechen; hier soll der besondere Fall erörtert werden, in dem zwei elliptische Zylinder von verschiedenen Achsenrichtungen eine ebene krumme Linie gemein haben. Da sich eine Ebene und ein elliptischer Zylinder in einer Ellipse schneiden, liegt der Sonderfall vor, wenn die beiden zu betrachtenden Zylinder, deren Achsen

etwa z_1 und z_2 seien, eine Ellipse e_1 gemein haben Man sieht leicht ein, daß ihnen noch eine zweite gemeinsame Ellipse zukommt. Denn es sei C_1D_1 der in der Ebene der Achsen z_1, z_2 gelegene Durchmesser der Ellipse e_1, und AB der konjugierte Durchmesser, siehe Fig 193, worin die Zylinder selber fortgelassen sind Dann geht sowohl durch C_1 als auch durch D_1 je eine Mantellinie jedes der beiden Zylinder. Diese Mantellinien haben noch zwei Punkte C_2, D_2 in der Ebene der Achsen z_1, z_2 gemein. Stellt man nun die Parallelogramme *1 2 7 8* und *4 3 6 5* her, deren Mittellinien AB und C_1D_1 bzw AB und C_2D_2 sind, so sieht man, daß das eine Parallelogramm in das andere vermöge einer Parallelprojektion in der Richtung von z_1 oder auch in der Richtung von z_2 verwandelt werden kann. Diese beiden Parallelprojektionen führen die Ellipse e_1 mit den konjugierten Durchmessern AB und C_1D_1 in die Ellipse e_2 mit den konjugierten Durchmessern AB und C_2D_2 über Da nun e_1 auf beiden Zylindern liegt und die angewandten Projektionen die Richtungen der Zylinderachsen z_1 und z_2 haben, erhellt, daß auch die Ellipse e_2 auf beiden Zylindern liegt. Die Umkehrung leuchtet auch ein Wenn e_1 und e_2 zwei Ellipsen in verschiedenen Ebenen, aber mit einem gemeinsamen Durchmesser AB sind, stellen die zu AB konjugierten Durchmesser C_1D_1 und C_2D_2 die Diagonalen eines Parallelogramms dar, dessen Mittellinien z_1 und z_2 die Achsen zweier Zylinder sind, auf denen sowohl die Ellipse e_1 als auch die Ellipse e_2 liegt.

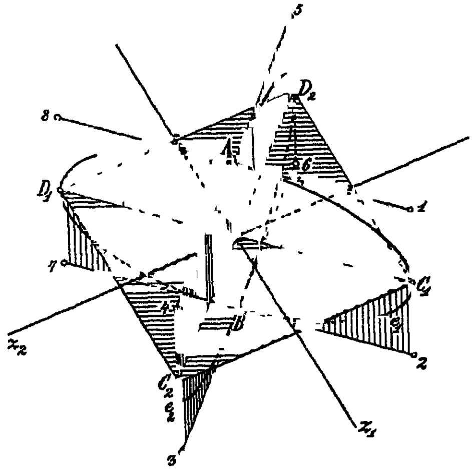


Fig 193

Sobald also zwei Zylinder von verschiedenen Achsenrichtungen eine Ellipse gemein haben, kommt ihnen noch eine zweite gemeinsame Ellipse zu, und beide Ellipsen haben einen Durchmesser gemein. Umgekehrt Wenn zwei Ellipsen in verschiedenen Ebenen liegen und einen Durchmesser gemein haben, liegen beide auf zwei Zylindern von verschiedenen Achsenrichtungen.

Man kann die beiden Zylinder durch Ebenen begrenzen Zu diesem Zwecke mögen beim ersten Zylinder die Ebenen *1 2 3 4* und *5 6 7 8* dienen, die zu z_2 parallel sind, beim zweiten die Ebenen *1 2 6 5* und *4 3 7 8*, die zu z_1 parallel sind Die Ellipsen, in denen diese Ebenen die Zylinder schneiden, haben die Mittellinien der genannten Parallelogramme als konjugierte Durchmesser. In Fig. 194 sind alle vier nebst e_1 und e_2 dargestellt Zur besseren Veranschaulichung der Zylinder soll Fig. 195 dienen, die beide Zylinder einzeln darstellt, aufgefaßt als undurchsichtige Körper. Faßt man die beiden Zylinder als hohl auf und läßt man von der Fläche eines jeden diejenigen Teile fort, die im Innern des anderen liegen, so ergibt sich Fig 196, worin die Umrißmantellinien

des zweiten Zylinders als kurze Strecken zu sehen sind. Wenn man dagegen nur die soeben weggelassenen Teile der Zylinderflächen darstellt, kommt man zu Fig. 197 mit ihrer überall geschlossenen Oberfläche. Hier sind die Umrißmantellinien beider Zylinder zu sehen.

Wir kehren zur Fig. 193 zurück. Die Punkte A und B, in denen die Ellipsen e_1 und e_2 einander schneiden, gehören beiden Zylindern an Sie heißen die Doppelpunkte der Durchdringung In A haben die Ellipsen die Tangenten *1 8* und *4 5*, so daß die Ebene *1 4 8 5* dort die beiden Zylindern gemeinsame Tangentialebene ist Sie ist sowohl zu z_1 als auch zu z_2 parallel Ebenso ist die Ebene *2 3 7 6* die beiden Zylindern in B gemeinsame Tangentialebene Wenn also zwei Zylinder von verschiedenen Achsenrichtungen zwei Ellipsen e_1 und e_2 gemein haben, kommen ihnen auch zwei gemeinsame Tangentialebenen zu, nämlich die der Doppelpunkte A und B der Durchdringung, d h. der Endpunkte A und B des beiden Ellipsen gemeinsamen Durchmessers.

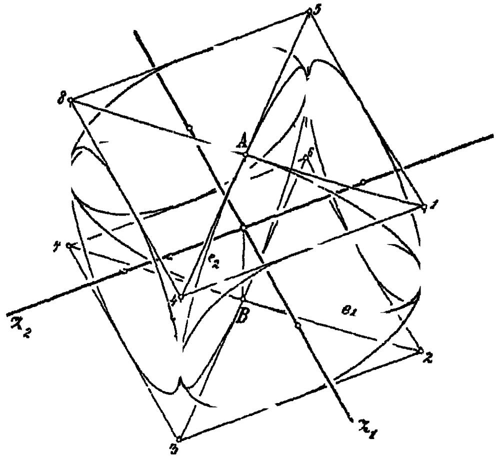


Fig 194

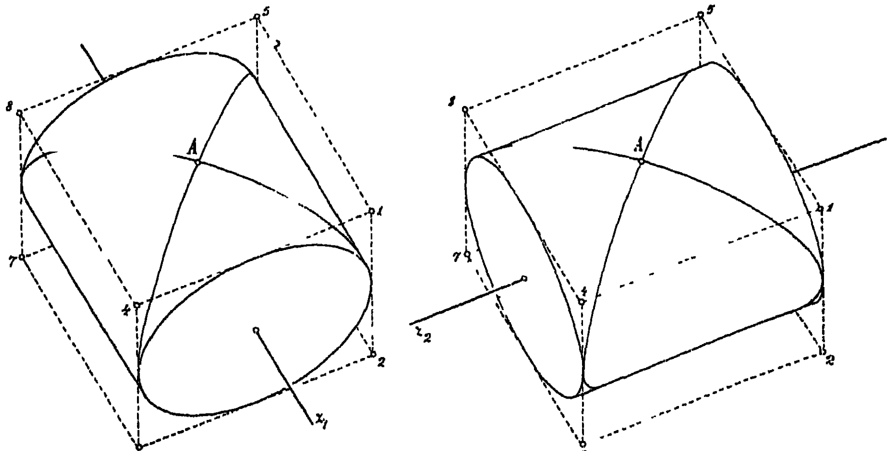


Fig 195

Wir kehren die Schlußfolgerung um: Vorgelegt seien zwei elliptische Zylinder von verschiedenen Achsenrichtungen, aber mit zwei gemeinsamen Tangentialebenen. Da die Tangentialebenen eines Zylinders zu seiner Achse parallel sind, müssen die beiden gemeinsamen Tangentialebenen zu beiden Achsen z_1, z_2 und daher zueinander parallel sein. Jede dieser Ebenen berührt jeden der beiden Zylinder längs einer Mantellinie.

Daher enthält jede eine Mantellinie des ersten und zweiten Zylinders, und der Schnittpunkt beider ist ein beiden Zylindern gemeinsamer Punkt. Man gelangt so zu den Punkten A und B, die beiden Zylindern angehören. Wenn nun C irgendein anderer Punkt ist, der beiden Zylindern angehört, denke man sich die Ebene durch A, B und C gelegt. Sie schneidet die eine gemeinsame Tangentialebene in einer Geraden a durch A und die andere in der dazu parallelen Geraden b durch B, und der Punkt C liegt zwischen beiden Tangentialebenen, also zwischen a und b. Nun schneidet die Ebene ABC den ersten Zylinder in einer Ellipse, die durch A, B, C geht und in A und B die Tangenten a und b hat. Dasselbe gilt

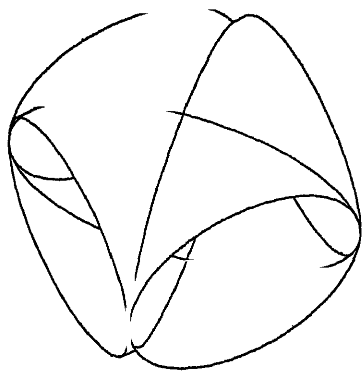


Fig 196

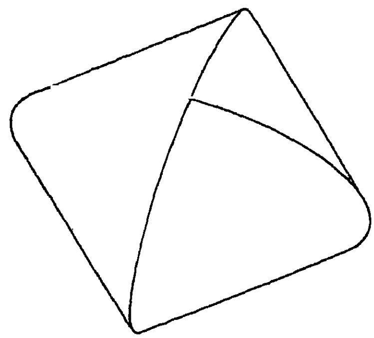


Fig 197

vom Schnitt der Ebene ABC mit dem zweiten Zylinder Nach Nr. 138 gibt es aber nur eine Ellipse, die durch A, B, C geht und in A und B die Tangenten a und b hat Beide Zylinder haben mithin diese Ellipse gemein. So kommen wir zu derjenigen Voraussetzung zurück, die wir zu Anfang der gegenwärtigen Nummer machten Daher gilt der Satz

Zwei elliptische Zylinder von verschiedenen Achsenrichtungen haben dann, aber auch nur dann eine Ellipse und infolgedessen noch eine zweite Ellipse gemein, wenn sie zwei verschiedene gemeinsame Tangentialebenen haben Diese beiden gemeinsamen Tangentialebenen sind allemal zueinander parallel, und die Schnittpunkte der Mantellinien, längs deren sie die Zylinder berühren, sind die Doppelpunkte der Durchdringung

Das Vorhergehende ist anzuwenden, wenn man die Aufgabe lösen will, den Schlagschatten zu bestimmen, den der Rand eines durch eine Ellipse abgeschrägten hohlen elliptischen Zylinders auf das Innere des Zylinders wirft, falls die Lichtstrahlen zueinander parallel sind Ist nämlich e_1 die Randellipse, siehe Fig. 198, so bilden diejenigen Lichtstrahlen, die e_1 treffen, einen Lichtzylinder, der, weil er e_1 enthält, ebenfalls elliptisch ist. Der Schnitt dieses Lichtzylinders mit dem gegebenen Hohlzylinder besteht einerseits aus der Ellipse e_1 und muß daher noch eine zweite Ellipse e_2 liefern, und diese Ellipse e_2 ist der gesuchte Schlagschatten. In Fig. 198 ist angenommen, die Achse z des gegebenen Zylinders werfe auf die Ebene der Grundellipse e den Schlagschatten $\mathfrak{z}$. Die dem gegebenen Zylinder

und dem Lichtzylinder gemeinsamen Tangentialebenen sind die Ebenen, die die Grundebene in den zu $\mathfrak{z}$ parallelen Tangenten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von e schneiden. Diese Tangenten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ sind die Schlagschatten derjenigen Mantellinien a und b des gegebenen Zylinders, die den Eigenschatten auf der Außenseite des Hohlzylinders begrenzen. Ihre Schnittpunkte A und B mit der Randellipse e_1 spielen daher jetzt die Rolle der Doppelpunkte, d. h. der Schatten e_2, den der Rand e_1 ins Innere des Hohlzylinders wirft, ist eine Ellipse mit dem Durchmesser AB. Wie man den zu AB konjugierten Durchmesser C_2D_2 dieser Schattenellipse aus dem zu AB konjugierten Durchmesser C_1D_1 der Ellipse e_1 nach dem Vorhergehenden (vgl. Fig. 193) ableitet, zeigt die Zeichnung. Auch die Konstruktion konjugierter Durchmesser der Ellipse $\mathfrak{e}_1$, die den Schlagschatten von e_1 auf der Grundebene darstellt, ist ohne weiteres klar.

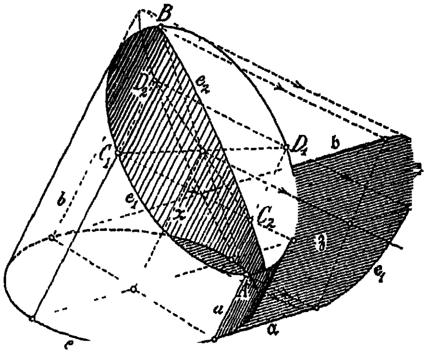


Fig. 198

Anmerkung. In Fig. 193 bis 198 haben wir Parallelprojektionen räumlicher Gebilde vor uns. Eigentlich hätten wir also $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ usw. statt A, B usw. in den Figuren angeben sollen, doch ist dies lästig. Die Parallelprojektion, in der die Bilder entworfen werden, kann eine beliebige Richtung haben. Die erste Ellipse e_1 in Fig. 193 sowie die Geraden z_1 und z_2 durch ihre Mitte können beliebig angenommen werden, alles andere ergibt sich dann, wie wir es gezeigt haben. Nur um besonders gefällige Bilder zu erhalten, haben wir es in Fig. 193 bis 197 so eingerichtet, daß die acht Punkte $1, 2, \ldots 8$ die senkrechte Projektion der Ecken eines Würfels darstellen (Nr. 54).

141. Elliptische Gewölbe. Wenn man die in Fig. 196 und 197 der letzten Nummer dargestellten Gebilde, die sich aus zwei einander in zwei Ellipsen durchdringenden Zylindern ergaben, vermöge der Ebene der beiden Zylinderachsen durchschneidet, stellen sich die Teile wie in Fig. 199 und 200 dar.

Die erste Figur ist das Bild eines sogenannten Kreuzgewölbes, von außen oder von innen gesehen, die zweite das Bild eines sogenannten Klostergewölbes. Kreuz- und Klostergewölbe werden also durch die Durchdringung zweier Halbzylinder in zwei halben Ellipsen gebildet. Beim Kreuzgewölbe kommen nur diejenigen Teile der beiden Zylinder in Betracht, die nicht im Innern der Zylinder liegen, beim Klostergewölbe dagegen nur diejenigen, von denen jeder durch den anderen Zylinder eingeschlossen wird. Das Kreuzgewölbe und das Klostergewölbe enthalten zwei Halbellipsen e_1 und e_2 als ihre sogenannten Grate. Diese Grate sind beim Kreuzgewölbe nach innen, beim

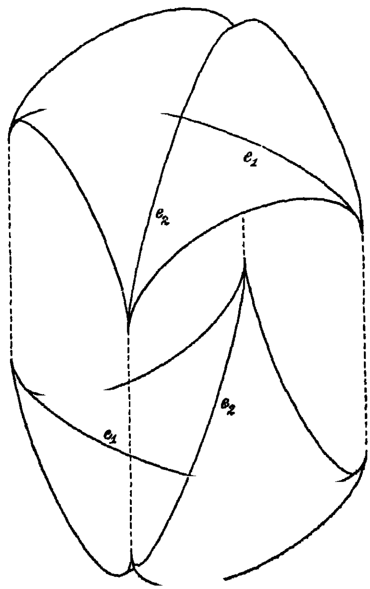


Fig. 199

Klostergewölbe nach außen scharf. Das Kreuzgewölbe stützt sich nur auf vier Eckpunkte, und es wird durch Halbellipsen begrenzt, durch die man den Zugang nach außen vermitteln kann. Dagegen stützt sich das Klostergewolbe auf alle vier Kanten eines Parallelogramms und ist nach außen abgeschlossen. Die vier Teile der Zylinderflachen, die das Gewölbe ausmachen, heißen die Gewölbekappen, der Schnittpunkt der Grate e_1 und e_2 der Gewölbeschluß

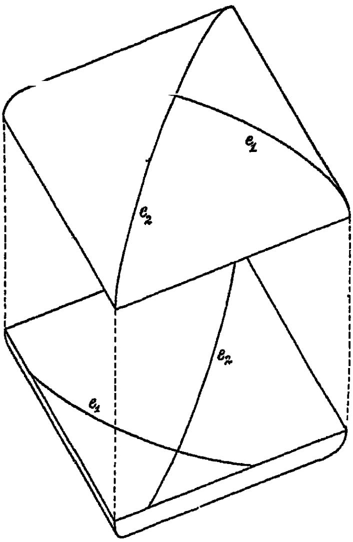


Fig 200

Kreuzgewölbe kann man auch über Grundvielecken von beliebiger Eckenzahl und Gestalt aufbauen. In Fig. 201 ist z. B. ein Funfeck gewahlt. Man nimmt einen Punkt S im Innern des Vielecks an und zieht von dort aus eine beliebig lange Strecke SH die meistens senkrecht zur Ebene des Vielecks angenommen wird. Der Punkt H soll nun den Gewölbeschluß bilden. Die Geraden von S nach den Mitten der Seiten des Vielecks sind die einzelnen Zylinderachsen. Von jeder Mitte aus wird eine Strecke parallel und gleich SH gezogen. Diese Strecken sind Halbmesser der Endellipsen, die Seiten des Vielecks die zu ihnen konjugierten Durchmesser. Jeder der fünf Zylinder in Fig. 201 schneidet die beiden benachbarten in Ellipsen, denn alle Zylinder haben zwei gemeinsame Tangentialebenen, namlich die Ebene durch H parallel zur Grundebene sowie die (nicht angegebene) zu dieser Tangentialebene hinsichtlich der Grundebene symmetrisch gelegene Ebene Fur das Gewölbe werden nur Viertel der Ellipsen als Grate benutzt. Für diese Viertel sind die Strecken von S nach den Ecken des Grundvielecks die zum Halbmesser SH konjugierten Halbmesser.

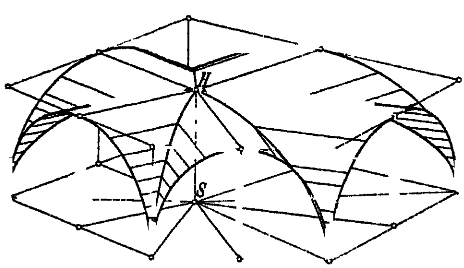
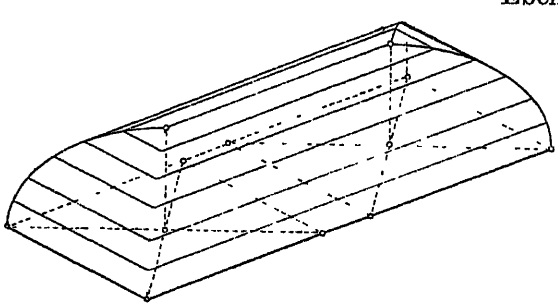


Fig 201

Bei dieser Gelegenheit sei noch das Muldengewölbe erwahnt. Wie es aus zwei kongruenten Klostergewölbehalften entsteht, indem zwei Paare der Kappen durch inen Halbzylinder vereinigt werden, dürfte aus Fig. 202 ohne weiteres ersichtlich sein.


Fig 202

***142. Affines Bild einer Momentenellipse**[1]**.** Wenn in der Ebene eine Punktgruppe $P_1, P_2 \ldots$ gegeben ist, kommt irgendeinem Punkt M der Ebene nach Nr. 98 in Hinsicht auf diese Punktgruppe eine Momentenellipse zu. Ist l irgendeine Gerade durch M und T_l das zugehörige quadratische Moment, d. h.

$$T_l = P_1 Q_1^2 + P_2 Q_2^2 + \ldots,$$

wenn $Q_1, Q_2 \ldots$ die Fußpunkte der Lote von $P_1, P_2 \ldots$ auf l bedeuten, siehe Fig. 203, so haben die zu l parallelen Tangenten der Momentenellipse von M den Abstand

$$AM = \sqrt{T_l}$$

In Fig. 203 ist eine dieser beiden Tangenten t angegeben

Nun werde eine affine Umformung vorgenommen. Eine beliebig gewählte Gerade s sei die Affinitätsachse, ein beliebig gewählter Punkt $\mathfrak{M}$ der zu M affine Punkt. Vermöge der Affinität mögen die Punkte $P_1, P_2 \ldots$ in die Punkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \ldots$ und die beiden Parallelen l und t in die beiden Parallelen $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{t}$ übergehen. Die zu den Loten $P_1 Q_1, P_2 Q_2 \ldots, AM$ affinen Strecken $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{P}_2 \mathfrak{Q}_2 \ldots, \mathfrak{A}\mathfrak{M}$ sind zwar zueinander parallel, aber keine Lote zu $\mathfrak{l}$. Unter $\mathfrak{T}_\mathfrak{l}$ sei das quadratische Moment der Geraden $\mathfrak{l}$ in bezug auf die Punktgruppe $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \ldots$ verstanden. Wenn $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2 \ldots$ die Fußpunkte der Lote von $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \ldots$ auf $\mathfrak{l}$ sind, soll also

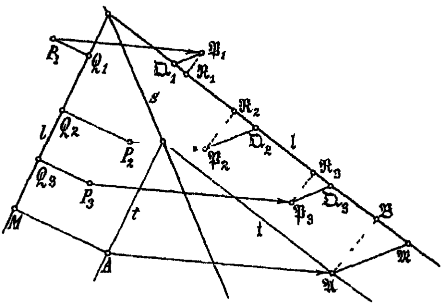


Fig 203

$$\mathfrak{T}_\mathfrak{l} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{R}_1^2 + \mathfrak{P}_2 \mathfrak{R}_2^2 + \ldots$$

sein. Man sieht, daß der Begriff des quadratischen Moments bei der Ausführung einer Affinität **nicht** unveränderlich ist, denn vermöge der Affinität würde nicht $\mathfrak{T}_\mathfrak{l}$, sondern $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{Q}_1^2 + \mathfrak{P}_2 \mathfrak{Q}_2^2 + \ldots$ an die Stelle von T_l treten müssen. Um so merkwürdiger ist es, daß der Begriff der Momentenellipse durch die Affinität nicht behelligt wird. Dies erkennt man so

Da das Verhältnis paralleler Strecken bei Affinität erhalten bleibt (Nr. 125), ist:

$$\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{M}^2}{AM^2} = \frac{\mathfrak{P}_1 \mathfrak{Q}_1^2}{P_1 Q_1^2} = \frac{\mathfrak{P}_2 \mathfrak{Q}_2^2}{P_2 Q_2^2} = \ldots$$

Bezeichnet $\mathfrak{B}$ den Fußpunkt des Lotes von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{l}$, so ist $\triangle \mathfrak{B}\mathfrak{M}\mathfrak{A} \backsim \triangle \mathfrak{R}_1 \mathfrak{Q}_1 \mathfrak{P}_1 \backsim \triangle \mathfrak{R}_2 \mathfrak{Q}_2 \mathfrak{P}_2$ usw., also

$$\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{A}\mathfrak{M}^2} = \frac{\mathfrak{P}_1 \mathfrak{R}_1^2}{\mathfrak{P}_1 \mathfrak{Q}_1^2} = \frac{\mathfrak{P}_2 \mathfrak{R}_2^2}{\mathfrak{P}_2 \mathfrak{Q}_2^2} = \ldots$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit den vorhergehenden, so kommt:

$$\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2}{AM^2} = \frac{\mathfrak{P}_1 \mathfrak{R}_1^2}{P_1 Q_1^2} = \frac{\mathfrak{P}_2 \mathfrak{R}_2^2}{P_2 Q_2^2} = \ldots$$

[1]) Die mit Sternchen versehenen Nummern sind überschlagbar.

Folglich ist auch

$$\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2}{AM^2} = \frac{\mathfrak{P}_1\mathfrak{Q}_1^2 + \mathfrak{P}_2\mathfrak{Q}_2^2 + \ldots}{P_1Q_1^2 + P_2Q_2^2 + \ldots}.$$

Da der Zähler rechterhand das Moment $\mathfrak{T}_l$ und der Nenner rechterhand das Moment T_l, dies aber gleich AM^2, also dem Nenner linkerhand ist, ergibt sich hieraus, daß das Moment $\mathfrak{T}_l = \mathfrak{A}\mathfrak{B}^2$ ist. Ebenso wie das Quadrat des Abstandes der Geraden t von der Geraden l gleich dem quadratischen Moment T_l ist, wird also auch das Quadrat des Abstandes der Geraden $\mathfrak{t}$ von der Geraden $\mathfrak{l}$ gleich dem quadratischen Moment $\mathfrak{T}_l$. Hiernach gehen die Tangenten $\mathfrak{t}$ derjenigen Momentenellipse, die dem Punkt $\mathfrak{M}$ in bezug auf die Punktgruppe $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \ldots$ zukommt, durch die angewandte Affinität aus den Tangenten t derjenigen Momentenellipse hervor, die dem Punkt M in bezug auf die Punktgruppe $P_1, P_2 \ldots$ zukommt. Mithin geht auch die erste Ellipse aus der zweiten vermöge der Affinität hervor. Also gilt der Satz

Die Momentenellipse eines Punktes M der Ebene in bezug auf eine Punktgruppe $P_1, P_2 \ldots$ der Ebene geht vermöge irgendeiner Affinität in die Momentenellipse des zu M affinen Punktes $\mathfrak{M}$ in bezug auf die zur Punktgruppe $P_1, P_2 \ldots$ affine Punktgruppe $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2 \ldots$ über.

Man meint dies, wenn man sich so ausdrückt. Der Begriff der Momentenellipse ist invariant gegenüber Affinitäten oder Parallelprojektionen.

Anmerkung. Dieser Satz wurde von K. Heuman 1905 ausgesprochen und bewiesen, siehe die in Anmerkung zu Nr. 98 genannte Abhandlung.

***143. Nochmals die Momentenellipsen für Gruppen von drei Punkten.** Auf Grund des soeben aufgestellten Satzes läßt sich die Aufgabe, die Momentenellipse eines Punktes M in bezug auf eine Gruppe von drei Punkten P_1, P_2, P_3 zu bestimmen, statt wie in Nr. 101 auch so lösen.

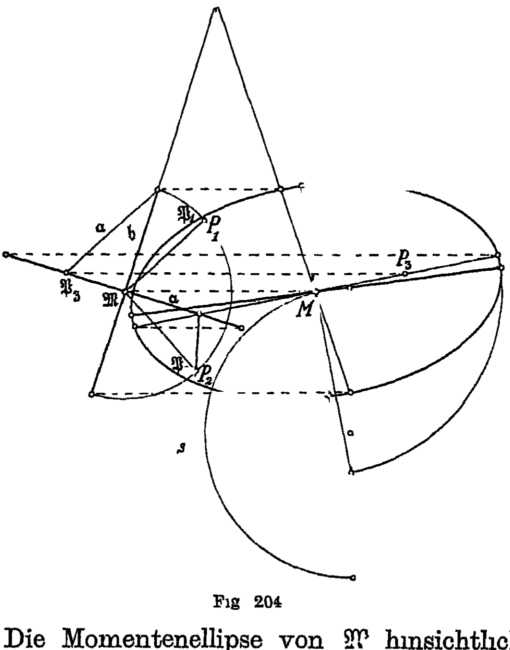


Fig. 204.

Als Affinitätsachse s werde die Gerade P_1P_2 gewählt, so daß $\mathfrak{P}_1$ mit P_1 und $\mathfrak{P}_2$ mit P_2 zusammenfällt. Als den zu M affinen Punkt kann man einen Punkt $\mathfrak{M}$ so annehmen, daß $\mathfrak{P}_1\mathfrak{M}\mathfrak{P}_2$ ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ wird, siehe Fig. 204. Dann liegt eine bestimmte Affinität vor, und in bekannter Weise ermittelt man den zu P_3 affinen Punkt $\mathfrak{P}_3$. Die Momentenellipse von $\mathfrak{M}$ hinsichtlich $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ ergibt sich nun durch folgende Überlegung: Wird irgendeine Gerade durch $\mathfrak{M}$ gezogen,

so ist die Summe der Quadrate der Abstände der beiden Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ von der Geraden nach Nr 56 stets gleich $\mathfrak{M}\mathfrak{P}_1^2$, demnach das zugehörige quadratische Moment gleich der Summe aus $\mathfrak{M}\mathfrak{P}_1^2$ und dem Quadrat des Abstandes des dritten Punktes $\mathfrak{P}_3$ von der Geraden. Dreht sich die Gerade um $\mathfrak{M}$, so erreicht mithin das Moment den größten Wert, wenn die Gerade zu $\mathfrak{M}\mathfrak{P}_3$ senkrecht wird, den kleinsten, wenn sie durch $\mathfrak{P}_3$ geht. Nach Nr. 98 ist das Maximum $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{M}\mathfrak{P}_1^2 + \mathfrak{M}\mathfrak{P}_3^2$ das Quadrat der halben großen Achse und das Minimum $\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{M}\mathfrak{P}_1^2$ das Quadrat der halben kleinen Achse der Momentenellipse, und die große Achse liegt auf $\mathfrak{M}\mathfrak{P}_3$. Wegen $\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{b}^2 = \mathfrak{M}\mathfrak{P}_3^2$ folgt aus Nr 74, daß $\mathfrak{P}_3$ der eine Brennpunkt der Ellipse ist. Aus ihm und der senkrecht zu $\mathfrak{M}\mathfrak{P}_3$ von $\mathfrak{M}$ aus aufgetragenen halben Nebenachse $\mathfrak{b} = \mathfrak{M}\mathfrak{P}_1$ findet man die halbe Hauptachse $\mathfrak{a}$. Nachdem man die Achsen bestimmt hat, geht man zur ursprünglichen Figur vermöge der Affinität zurück. Dann liefern die Achsen konjugierte Durchmesser der gesuchten Momentenellipse von M hinsichtlich P_1, P_2, P_3. Aus den Durchmessern ermittelt man nach Nr 85 oder 137 die Achsen der Ellipse. In Fig 204 ist dies nach Nr. 85 geschehen, darin sind außerdem alle zur Konstruktion nötigen Linien angegeben.

Anmerkung. Diese Konstruktion gab Friedrich Schur (geb. 1856 in Maciejewo, Posen, zuletzt Professor an der Universität Straßburg, jetzt Breslau), siehe „Über den Pohlkeschen Satz“, Journ. f. d. r. u. angew. Math. 117. Bd. 1896, S. 24—28. Er erwähnte dabei nicht, daß es sich um die Konstruktion einer Momentenellipse handelt, weil er auf die gesuchte Ellipse durch eine andere Aufgabestellung geführt wurde, die uns später ebenfalls beschäftigen wird, vgl. Nr. 162. Das Schursche Verfahren ist kürzer als das Heumansche in Nr. 101. Jedoch ist zu bemerken, daß das Heumansche auf Punktgruppen von beliebig vielen Punkten ausgedehnt werden kann (vgl. Nr. 100).

144. Übungen. 1) Gegeben sei die senkrechte Projektion eines Kreises und die Höhe seines Mittelpunktes. Wie ist die Lichtrichtung anzunehmen, damit der Schlagschatten des Kreises wieder ein Kreis werde? (Nr. 123, 134.)

2) Auf der Tafel liege ein Rotationszylinder, so daß er die Tafel längs einer Mantellinie berührt. Begrenzt sei der Zylinder durch zwei zu seiner Achse senkrechte Ebenen. Gesucht der Schlag- und Eigenschatten bei Parallelbeleuchtung (Nr. 134, 135).

3) Ein Axialschnitt eines Rotationskegels sei als gleichschenkliges Dreieck gegeben. Man zeichne den Kegel in senkrechter Projektion für den Fall, wo er auf der Tafel liegt, d. h. die Tafel längs einer Mantellinie berührt (vgl. Fig. 140e, Nr 94), und bestimme dann den Schlag- und Eigenschatten bei Parallelbeleuchtung (Nr 135).

4) Auf der Tafel sei eine Ellipse als Schlagschatten einer Kugel gegeben. Wie groß ist der Radius der Kugel und wie ist die Lichtrichtung? (Nr. 136.)

5) Auf der Tafel stehe ein Rotationszylinder, so daß seine Achse lotrecht ist. Der Zylinder soll durch eine Ebene abgeschnitten werden, die eine gegebene Neigung zur Achse hat. Den Schlagschatten des Zylinderstumpfes bei irgendeiner Parallelbeleuchtung zu ermitteln (Nr 139).

6) Auf der Tafel liege ein Rotationszylinder, so daß er die Tafel längs einer Mantellinie berührt. Auf dem Zylinder seien zwei Punkte A und B durch ihre senkrechten Projektionen A' und B' gegeben. Unter Annahme irgendeiner bestimmten Lichtrichtung soll die senkrechte Projektion des Schlagschattens gezeichnet werden, den die dem Zylinder in A und B durchbohrende Gerade auf den Zylinder wirft (Nr. 139).

§ 5. Freie Parallelprojektion.

145. Anwendungsbereich der freien Parallelprojektion. Ein mittels Parallelprojektion entworfenes Bild eines Gegenstandes muß aus derjenigen Richtung betrachtet werden, die zur Projektion benutzt worden ist. Es kann jedoch vorkommen, daß das Bild immer einen richtigen, unverzerrten Eindruck macht, aus welcher Richtung man es auch betrachten mag. Dies ist z. B der Fall bei Fig. 179 (Nr. 131), Fig. 192 (Nr. 139) und Fig. 198 (Nr. 140). Wir beschaftigen uns jetzt allgemein mit der Darstellung geometrischer Gebilde, deren Begriffe so weit gefaßt sind, daß irgendwelche Parallelprojektionen der Gebilde auch dann noch Parallelprojektionen von Gebilden derselben Art bleiben, wenn man nachträglich irgendeine andere Projektionsrichtung wählt Die Zeichnung eines Dreiecks z. B. ist fur jedwede Projektionsrichtung eine Parallelprojektion eines Dreiecks im Raum, und daher gehört der Begriff des Dreiecks zu den soeben bezeichneten Begriffen. Dagegen weist das Bild einer Kugel in schiefer Parallelprojektion, namlich im Schatten, nach Nr 136 als Umriß eine Ellipse auf, die um so länglicher ausfallt, je geringer die Neigung der projizierenden Strahlen zur Tafel ist, andert man also nachträglich diese Neigung, so stellt die Ellipse nicht mehr der Umriß einer Kugel in Parallelprojektion dar. Der Begriff der Kugel gehört deshalb nicht zu den hier zu betrachtenden Begriffen.

Wir sagen, ein Gebilde gestatte die freie Parallelprojektion oder lasse sie zu, wenn irgendeine Parallelprojektion des Gebildes eine Darstellung liefert, die auch nach willkürlicher Änderung der Projektionsrichtung eine Parallelprojektion eines Gebildes von derselben Art ist Wie man solche Gebilde herstellt, wird in den nachsten Nummern erortert werden Bei der Abbildung von Gegenstanden, die die freie Parallelprojektion gestatten, braucht die Richtung der Projektion nicht angegeben zu werden.

146. Das Bezugsvierflach. Das einfachste raumliche Gebilde wird durch vier beliebig gewahlte Punkte bestimmt. Diese Punkte sind die Ecken eines Vierflachs mit sechs Kanten und vier Flächen. Man nennt das Vierflach auch ein Tetraeder; wir vermeiden diesen Namen, weil man ihn oft nur auf das regelmaßige Vierflach (Nr. 66) anwendet. Das allgemeine Vierflach gestattet augenscheinlich die freie Parallelprojektion.

Um von ihm zu weniger einfachen Gebilden emporzusteigen, verknüpfen wir weitere Punkte mit ihm. Damit dadurch Gebilde entstehen, die die freie Parallelprojektion gestatten, muß die Verknupfung so hergestellt werden, daß sie durch irgendwelche Parallelprojektion nicht gestört wird. Da man nun weiß, daß insbesondere Teilverhaltnisse von Strecken durch Parallelprojektion nicht geandert werden (Nr. 104), kann man die neuen Punkte mit dem Vierflach durch das Ziehen von verbindenden Geraden und das Feststellen der dabei entstehenden Teilverhältnisse verknüpfen, z. B. so: Soll ein Punkt P des Raumes mit dem Vierflach $ABCD$ in Beziehung gesetzt werden, so schneide man die Gerade DP mit der Ebene ABC in Q, alsdann die Gerade CQ mit der

Geraden AB in R, siehe Fig. 205, und stelle die drei Teilverhältnisse

$$r = \frac{AR}{BR}, \quad q = \frac{RQ}{CQ} \quad p = \frac{QP}{DP}$$

fest. Durch Angabe der Werte dieser drei Teilverhältnisse r, q, p ist die Lage des Punktes P gegenüber dem Vierflach vollkommen bestimmt. Man kann die Werte von r, q, p von vornherein beliebig annehmen, positiv oder negativ, denn nach Nr. 9 gehört zu r ein bestimmter Punkt R auf AB, weiterhin zu q ein bestimmter Punkt Q auf RC und schließlich zu p ein bestimmter Punkt P auf QD. Da die Teilverhältnisse r, q, p drei dem Punkt P zugeordnete oder koordinierte Größen sind, die vollkommen zur Festlegung des Punktes gegenüber dem Vierflach ausreichen, kann man sie als **Koordinaten des Punktes P in bezug auf das Vierflach** bezeichnen. Das Vierflach selbst heißt das **Bezugsvierflach** oder **Grundvierflach des Koordinatensystems**. Übrigens läßt sich ein beliebiger Punkt P auch auf manche andere Arten mittels dreier Teilverhältnisse gegenüber dem Vierflach festlegen, die von uns getroffene Wahl ist willkürlich.

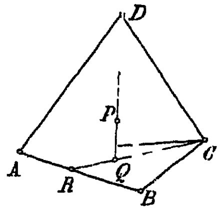


Fig. 205

Liegt irgendein Bild $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ des Vierflachs $ABCD$ vor, entstanden durch Parallelprojektion, und sind die Werte r, q, p gegeben, so kann man auch das Bild $\mathfrak{P}$ von P ermitteln, ohne zu wissen, wie das Vierflach im Raum gelegen und in welcher Richtung die Projektion erfolgt ist. Denn die Bilder $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{P}$ von R, Q, P bekommt man nacheinander auf $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{R}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{Q}\mathfrak{D}$ gerade so, wie sich vorhin R, P, Q selbst auf AB, RQ, QD ergaben, weil die Teilverhältnisse im Bilde die alten bleiben. Die Zeichnung stellt, aus beliebiger Richtung betrachtet, immer eine Parallelprojektion eines Vierflachs $ABCD$ und eines Punktes P dar, der in bezug auf das Vierflach die Koordinaten r, q, p hat.

Man kann nun beliebig viele Punkte P in dieser Art mit dem Vierflach verknüpfen, ohne dabei über die Gestalt, Größe und Lage des Vierflachs selbst irgendeine Vorschrift zu machen. Dadurch ergibt sich **das allgemeinste aus Punkten zusammengesetzte Gebilde, das die freie Parallelprojektion gestattet.**

Anmerkung. Das einfachste Koordinatensystem im Raum ist das rechtwinklige, bestehend aus Länge, Breite und Höhe. Das oben benutzte ist eines von den unzählig vielen möglichen, die dazu dienen, einen Punkt im Raum durch drei Größen festzulegen. Die **analytische Geometrie** untersucht die geometrischen Gebilde rechnerisch, indem sie die Punkte durch Zahlen, nämlich durch ihre Koordinaten, ersetzt. Ihr Begründer ist **René Descartes** (Nr. 65), und zwar durch sein Buch „**La géométrie**", Leiden 1637 (Neudruck Paris 1886 und in den „**Oeuvres des Descartes**", herausgeg. von **Ch. Adam** und **Paul Tannery**, 6. Bd. Paris 1902, S. 367—485, deutsche Übersetzung durch **Ludw. Schlesinger**, Berlin 1894). Erst im neunzehnten Jahrhundert verallgemeinerte man den Cartesischen Koordinatenbegriff. **Aug. Möbius** bestimmte 1827 in seinem „**baryzentrischen Kalkul**" (vgl. Nr. 5) einen Punkt durch die Gewichte, die man in den Ecken eines Vierflachs anbringen muß, damit ihr Schwerpunkt der betreffende Punkt werde. Diese Gewichte sind zwar vier statt dreier Größen, aber es leuchtet ein, daß es nur auf ihre drei Verhältnisse zueinander ankommt. Allgemeiner sind die auf ein Vierflach bezogenen Koordinaten, die **Julius Plücker** (geb. 1801 in Elberfeld, Professor an der Universität Bonn, gest. 1868 in Bonn) in seiner Abhandlung „**Über ein neues Koordinatensystem**", Journ. f. d. r. u. ang. Math. 5. Bd. 1830, S. 1—36 („**Plückers gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen**", 1. Bd. herausgeg. von **Arthur Schönflies**, Leipzig 1895, S. 124—158) einführte. Das Vierflach heißt bei **Möbius** die **Fundamentalpyramide**, bei **Plücker** das **Koordinatentetraeder**.

147. Geraden und Ebenen in freier Parallelprojektion. Nachdem wir gesehen haben, wie das allgemeinste Punktgebilde entsteht, das die freie Parallelprojektion zuläßt, bleibt die Frage übrig, ob sich diesem Gebilde auch Geraden und Ebenen angliedern lassen. Daß da noch eine kleine Schwierigkeit vorliegt, zeigt die folgende Betrachtung:

Außer dem Bezugsvierflach $ABCD$ seien drei Punkte P_1, P_2, P_3 angenommen, die in einer geraden Linie p liegen. Jeder dieser drei Punkte sei, wie auseinandergesetzt wurde, durch Hilfspunkte Q_1, Q_2, Q_3 und R_1, R_2, R_3 und zugehörige Teilverhältnisse mit dem Vierflach verknüpft Liegt in Fig. 206 ein Bild $\mathfrak{ABCD}$ des Vierflachs in Parallelprojektion vor, so kann man wie gesagt auch die Bilder $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$, $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}_3$ und $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ auffinden, ohne die Lage des Vierflachs im Raum und die Projektionsrichtung zu kennen, wenn man nur weiß, welche Werte die Teilverhältnisse haben Es erhellt ohne weiteres, daß $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ auf einer Geraden $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}_3$ auf einer Geraden $\mathfrak{q}$ liegen Die Zeichnung werde nun so aufgefaßt, als ob sie durch Parallelprojektion aus irgendeiner anderen Projektionsrichtung entstanden sei. Auf den neuen nach $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ gehenden projizierenden Strahlen mogen also im Raum Punkte $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$ beliebig gewahlt sein, wodurch dann ein Vierflach $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ hervorgeht, das ebenfalls die in Fig. 206 gegebene Projektion hat.

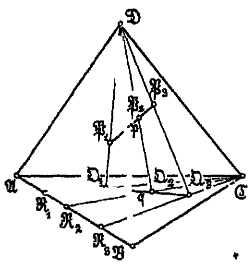


Fig 206

Zu den drei auf $\mathfrak{AB}$ gelegenen Punkten $\mathfrak{R}$ bekommt man nun drei auf $\bar{A}\bar{B}$ gelegene Punkte $\bar{R}$, indem man ebenfalls durch jene Punkte $\mathfrak{R}$ die neuen projizierenden Strahlen legt Fernerhin ergeben sich aus den drei Punkten $\mathfrak{Q}$ entsprechend drei Punkte $\bar{Q}$ der Ebene $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ und schließlich aus den drei Punkten $\mathfrak{P}$ entsprechend drei Punkte $\bar{P}$ des Raumes Nun aber bleibt noch die Frage offen, ob die drei neuen Punkte $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$ ebenfalls auf einer Geraden $\bar{p}$ liegen.

Dies ist in der Tat der Fall Da namlich $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ auf $\mathfrak{p}$ liegen, sind die drei neuen Punkte $\bar{P}_1$, $\bar{P}_3$, $\bar{P}_3$ in der Ebene der nach $\mathfrak{p}$ gehenden neuen projizierenden Strahlen gelegen. Damit ist eine Ebene gefunden, in der die drei neuen Punkte $\bar{P}$ enthalten sind Es ist aber noch eine zweite derartige Ebene vorhanden Denn die drei neuen Punkte $\bar{Q}_1$, $\bar{Q}_2$, $\bar{Q}_3$ liegen im Schnitt der Ebene $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ mit der Ebene der nach $\mathfrak{q}$ gehenden neuen projizierenden Strahlen, folglich in einer Geraden. Also enthalt auch die Ebene durch diese Gerade und durch $\bar{D}$ die drei neuen Punkte $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$. Somit liegen $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$, $\bar{P}_3$ in zwei verschiedenen Ebenen, also in der Tat in einer Geraden.

Deshalb ist es erlaubt, zu den in voriger Nummer hergestellten Gebilden mit freier Parallelprojektion Geraden hinzuzufügen, die durch Verbinden von Punkten der Gebilde hervorgehen. Dasselbe gilt von Ebenen, denn eine Ebene entsteht, wenn man einen Punkt mit allen Punkten einer Geraden geradlinig verbindet. Man beweist ferner ebenso einfach wie vorhin: Wenn vier Punkte P_1, P_2 und P_3, P_4 mit dem Vierflach verknupft werden und dabei die Gerade P_1P_2 zur Geraden P_3P_4 parallel ist, und wenn man wie vorhin zu einem neuen Vierflach $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$

mit demselben Bild 𝔄𝔅ℭ𝔇, aber anderer Projektionsrichtung übergeht, liegen auch die vier neuen Punkte P_1, P_2 und P_3, P_4 so, daß die Gerade $P_1 P_2$ zur Geraden $P_3 P_4$ parallel ist. Infolgedessen darf man das betrachtete Gebilde auch durch das Ziehen paralleler Geraden und paralleler Ebenen weiter vervollständigen Auf diese Weise ergibt sich schließlich das allgemeinste Gebilde von Punkten, Geraden und Ebenen, das die freie Parallelprojektion gestattet.

Alle Punkte eines derartigen Gebildes sind wie in Nr. 146 zum Vierflach *ABCD* in Beziehung gesetzt Aber die Gestalt, Größe und Lage des Bezugsvierflachs bleibt dabei vollkommen willkürlich. Einem und demselben Begriff ordnen sich daher unendlich viele Gebilde von derselben Art unter, und wenn man von irgendeinem dieser Gebilde durch eine Parallelprojektion eine Zeichnung macht, stellt die Zeichnung auch dann noch ein Gebilde derselben Art dar, wenn man nachträglich annimmt, die Parallelprojektion sei in irgendeiner anderen Richtung ausgeführt worden Die Zeichnung erscheint unverzerrt, aus welcher Richtung man sie auch betrachten mag.

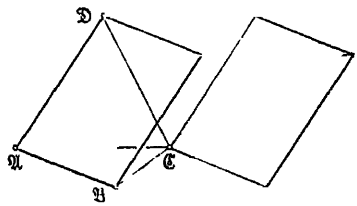


Fig 207

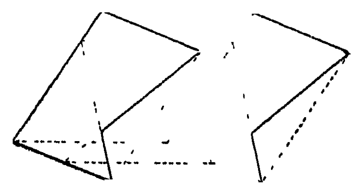


Fig 208

Eines der wichtigsten unter den so gewonnenen Gebilden ist das des Spates, den man gewöhnlich Parallelepiped nennt. Der Spat entsteht aus dem Bezugsvierflach, wie es Fig 207 zeigt, indem man drei Dreiecke zu Parallelogrammen erweitert und jedesmal ein parallel verschobenes kongruentes Parallelogramm durch die vierte Ecke hinzufügt Dabei sei hervorgehoben, daß Fig 207 nicht etwa einen gerade rechtwinkligen Spat, ein Rechtflach, darstellen soll, sondern einen Spat von allgemeiner Art, begrenzt durch drei Paare von parallelen Ebenen. Aus dem Spat kann man durch Angliederung andere Gebilde herstellen, die ebenfalls die freie Parallelprojektion zulassen, z. B. das allgemeine Kreuz Man kann auch durch Abschneiden von Ecken und Kanten neue Gebilde gewinnen, die die freie Parallelprojektion gestatten, z. B. den eingekeilten Spat in Fig. 208. Das Bezugsvierflach kann man durch Abänderung des Dreiecks *ABC* in ein Vieleck auch in eine allgemeine Pyramide verwandeln, die ebenfalls die freie Parallelprojektion gestattet. Dasselbe gilt vom allgemeinen Prisma usw.

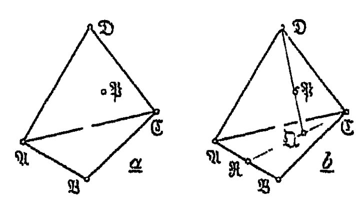


Fig. 209

Wir wollen jetzt annehmen, es liege eine vollständige Zeichnung eines die freie Parallelprojektion gestattenden Gebildes vor. Damit ist gemeint, daß die Art, wie die Punkte des Gebildes mit dem Bezugsvierflach verknüpft sind, aus der Zeichnung ersichtlich sein soll. Wenn z. B. nur ein Punkt *P* mit dem Vierflach *ABCD* in Beziehung gebracht worden ist, reicht ein Bild wie in Fig. 209a nicht aus, vielmehr müssen

wie in Fig. 209 b auch die zugehörigen Punkte Q und R angegeben sein. Liegt eine vollständige Zeichnung vor, so kann man alle Punkte des Gebildes im Raum aus ihr ermitteln, nachdem man eine beliebige Projektionsrichtung angenommen und die Ecken A, B, C, D beliebig auf denjenigen projizierenden Strahlen gewählt hat, die nach den Bildern 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 dieser Ecken gehen. Daraus folgt:

Liegt eine vollständige Zeichnung eines Gebildes vor, das die freie Parallelprojektion gestattet, so lassen sich darin alle Aufgaben lösen, die sich auf das Verbinden und Schneiden der Punkte, Geraden und Ebenen des Gebildes beziehen, und dazu gehören auch die Aufgaben des Parallelenziehens.

Bei der Lösung dieser Aufgaben bedient man sich in erster Linie der Hilfsebenen und erst in zweiter Linie der Hilfsgeraden. Der Grund liegt darin, daß zwei Ebenen einander stets schneiden, sei es auch vielleicht erst im Unendlichfernen, während zwei Geraden windschief sein können, obwohl sie sich im Bilde schneiden.

Schließlich ist noch zu erwähnen, daß man willkürlich annehmen kann, welche Ecke des Bezugsvierflaches am weitesten vorn liegt. Man hat also noch eine Willkür in Hinsicht auf die Sichtbarkeit. Hat man aber einmal eine Wahl für das Vierflach getroffen, so zieht sie die Entscheidung über das ganze Gebilde nach sich. Entsprechendes gilt, wenn man das Bezugsvierflach, wie oben angedeutet wurde, abändert.

148. Satz des Desargues. Auf den Kanten DA, DB, DC des Vierflachs $ABCD$ seien Punkte U, V, W gegeben, siehe die Parallelprojektion davon in Fig. 210.

Die drei Punkte U, V, W bestimmen eine Ebene, und diese Ebene schneidet die Ebene ABC in einer Geraden s. Drei Punkte X, Y, Z dieser Geraden ergeben sich als die Schnittpunkte der Geradenpaare BC, VW — CA, WU — AB, UV, da jedes dieser Paare in einer Vierflachebene liegt und also nicht windschief ist. Mithin müssen X, Y, Z in einer Geraden s liegen.

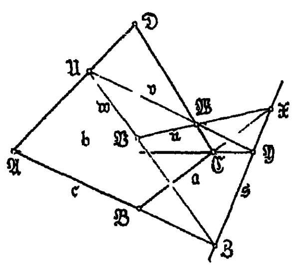


Fig 210

Nun können wir die hergestellte Zeichnung als eine Figur in der Ebene ohne Rücksicht auf ihre eigentliche Bedeutung als Parallelprojektion eines räumlichen Gebildes auffassen. Die einzige beim Entwurf der Zeichnung gemachte Voraussetzung bestand darin, daß die Punkte 𝔘, 𝔙, 𝔚 auf den Geraden 𝔇𝔄, 𝔇𝔅, 𝔇ℭ gewählt werden sollten. Also geht der folgende planimetrische Satz hervor:

Satz des Desargues: Liegen zwei Dreiecke 𝔄𝔅ℭ und 𝔘𝔙𝔚 in einer Ebene so, daß sich die Eckpunkte des einen gepaart mit denen des anderen auf drei Geraden durch einen gemeinsamen Punkt 𝔇 befinden, so liegen die drei Schnittpunkte 𝔛, 𝔜, ℨ je zweier einander entsprechender Seiten der beiden Dreiecke auf einer gemeinsamen Geraden 𝔰.

In Nr. 131 trat der Sonderfall mit unendlich fernem Punkte 𝔇 auf.

Man kann Fig. 210 auch so entstehen lassen: Auf einer Geraden s im Raume werden drei Punkte X, Y, Z beliebig angenommen; außer-

dem werden durch s zwei Ebenen gelegt. Alsdann wird in jeder der beiden Ebenen von jedem der drei Punkte X, Y, Z je eine Gerade willkürlich gezogen, so a und u von X aus, b und v von Y aus und c und w von Z aus. Die Geraden a, b, c bestimmen ein Dreieck ABC in der einen Ebene durch s und die Geraden u, v, w ein Dreieck UVW in der anderen Ebene durch s. Die drei Ebenen (a, u), (b, v), (c, w) haben die Schnittgeraden AU, BV, CW zu je zweien, d. h. AU, BV, CW haben einen Punkt D gemein. Die Projektion dieser räumlichen Konstruktion liefert Fig. 210. Fassen wir diese Figur wieder als eine Zeichnung in der Ebene allein auf, so gelangen wir zu der folgenden

Umkehrung des Satzes des Desargues Liegen zwei Dreiecke $\mathfrak{ABC}$ und $\mathfrak{UVW}$ in einer Ebene so, daß sich die Seiten des einen gepaart mit denen des anderen in drei Punkten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ auf einer gemeinsamen Geraden $\mathfrak{s}$ schneiden, so gehen diejenigen drei Geraden, die je zwei einander entsprechende Ecken der beiden Dreiecke verbinden, durch einen gemeinsamen Punkt $\mathfrak{D}$.

Anmerkung Girard Desargues (geb 1593 in Lyon, Baumeister in Paris und Lyon, wo er 1662 starb) überließ die Veröffentlichung des nach ihm benannten Satzes seinem Schüler, dem Pariser Kupferstecher Abraham Bosse (1611—1678), in dem Buch. „Manière universelle de M. Desargues, pour pratiquer la perspective par petit-pied, comme le géométral Ensemble les places et proportions des fortes et foibles touches, teintes et couleurs" (petit-pied ist verjüngter Maßstab, géométral Grundriß), Paris 1648, S. 340, siehe auch „Oeuvres de Desargues", herausgeg von N. G. Poudra (Nr 2), 1 Bd Paris 1864, S 413—415 Wie es scheint, war der Satz des Desargues schon den alten griechischen Mathematikern bekannt, vgl „Die Entwicklung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt" von Ernst Kötter (geb. 1859 in Berlin, Professor an der technischen Hochschule Aachen, gest ebenda 1922), Jahresber d D. Mathem.-Vereinigung, 5 Bd 1901, S 9 Man kann den Satz auch planimetrisch durch wiederholte Anwendung des Satzes des Menelaus (Nr 11) beweisen, siehe z B Herm Thieme (geb 1852 zu Neu-Limmritz, Realgymnasialdirektor in Bromberg), „Die Elemente der Geometrie", Leipzig und Berlin 1909, S 66 Der Satz des Desargues und seine Umkehrung sind zueinander dual, vorausgesetzt, daß man die Dualität in der Ebene (statt im Raum) im Auge hat, die in der Anmerkung zu Nr. 5 angedeutet wurde und von der in Nr 191 die Rede sein wird

149. Transversalen eines räumlichen Vierseits. Nimmt man zwei Gegenkanten eines Vierflachs $ABCD$ fort, z. B AC und BD, so bilden die vier verbleibenden Kanten ein räumliches Vierseit $ABCD$. Die beiden Gegenseiten AB und CD sind zueinander windschief, ebenso die beiden Gegenseiten BC und DA. Unter Transversalen des räumlichen Vierseits wollen wir nur solche Geraden verstehen, die zwei Gegenseiten treffen. Danach gibt es zwei Arten von Transversalen Werden Punkte E, F, G, H beliebig auf den Seiten AB, BC, CD, DA angenommen, so ist die Gerade EG eine Transversale von der ersten Art und die Gerade FH eine von der zweiten Art. Im allgemeinen werden alsdann EG und FH zueinander windschief sein Ferner leuchtet ein, daß zwei Transversalen von derselben Art stets zueinander windschief sind, sobald das Vierseit $ABCD$, wie wir voraussetzen, nicht eben ist.

Wenn nun zwei Transversalen EG und FH von verschiedener Art einen Punkt J gemein haben, bestimmt jedes der drei Geradenpaare

$$DA, AB - BC, CD - EG, FH$$

eine Ebene. Diese drei Ebenen schneiden einander zu zweien in den drei

Geraden BD, FG, EH, die daher einen Punkt K gemein haben In Fig. 211 ist dies in Parallelprojektion dargestellt

Jetzt gehen wir von einer Zeichnung in der Ebene aus, die wie diese Figur ein Viereck $\mathfrak{ABCD}$ darstellt, auf dessen Seiten Punkte $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ so angenommen worden sind, daß $\mathfrak{BD}$, $\mathfrak{FG}$ und $\mathfrak{EH}$ durch ein und denselben Punkt $\mathfrak{K}$ gehen, während der Punkt $\mathfrak{J}$ vorläufig nicht bezeichnet sei Diese Figur ist stets als Parallelprojektion eines räumlichen Vierseits $ABCD$ zu betrachten, auf dessen Seiten vier Punkte E, F, G, H so liegen, daß die Projektionen von BD, FG und EH durch denselben Punkt $\mathfrak{K}$ gehen Nun liegt FG in der Ebene BCD und EH in der Ebene DAB, so daß sowohl FG als auch EH die Diagonale BD des Vierseits trifft Wären die beiden Treffpunkte verschieden, so könnten sie nicht dieselbe Projektion $\mathfrak{K}$ haben. Mithin schneiden sich FG und EH auf BD, d. h. E, F, G, H bestimmen eine Ebene, und demnach schneiden die beiden Transversalen EG und FH einander in einem Punkte J So kommt man zu der zuerst gemachten Annahme zurück, und daher gilt der Satz

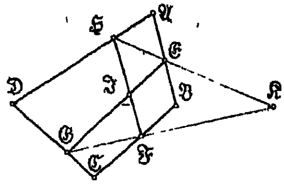


Fig 211

Ist $\mathfrak{ABCD}$ irgendeine Parallelprojektion eines räumlichen und nicht ebenen Vierseits $ABCD$ und sind $\mathfrak{EG}$ und $\mathfrak{FH}$ die Projektionen zweier Transversalen EG und FH von verschiedener Art, so schneiden sich diese beiden Transversalen dann, aber auch nur dann, wenn die Geraden $\mathfrak{EH}$ und $\mathfrak{FG}$ in der Projektion auf der Geraden $\mathfrak{BD}$ in einem Punkte $\mathfrak{K}$ zusammentreffen.

Wenden wir nun den Satz des Menelaus (Nr 11) auf das Dreieck ABD und die Gerade KEH an, so kommt

$$\frac{AE}{BE} \cdot \frac{BK}{DK} \cdot \frac{DH}{AH} = 1 .$$

Derselbe Satz liefert, angewandt auf das Dreieck BCD und die Gerade KFG

$$\frac{BF}{CF} \cdot \frac{CG}{DG} \cdot \frac{DK}{BK} = 1 .$$

Multiplikation beider Gleichungen gibt

$$\frac{AE}{BE} \cdot \frac{BF}{CF} \cdot \frac{CG}{DG} \cdot \frac{DH}{AH} = 1$$

Dies besagt

Wenn zwei Transversalen verschiedener Art eines räumlichen und nicht ebenen Vierseits einander schneiden, gehen die beiden Transversalen durch solche Punkte der Seiten, für die das Produkt der vier Teilverhältnisse der Seiten gleich Eins ist.

Nach Nr. 104 gilt dies auch für die Parallelprojektion, d. h. es ist auch:

$$\frac{\mathfrak{AE}}{\mathfrak{BE}} \cdot \frac{\mathfrak{BF}}{\mathfrak{CF}} \cdot \frac{\mathfrak{CG}}{\mathfrak{DG}} \cdot \frac{\mathfrak{DH}}{\mathfrak{AH}} = 1 .$$

Dies Ergebnis laßt sich wieder umkehren. Angenommen, es liege in der Ebene ein Viereck $\mathfrak{ABCD}$ vor, auf dessen Seiten Punkte $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ derart gewahlt sind, daß die letzte Gleichung besteht. Wird nun das Viereck als Parallelprojektion eines raumlichen und nicht ebenen Vierseits $ABCD$ aufgefaßt, so sind $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ die Projektionen von Punkten E, F, G, H auf den Seiten. Behauptet wird, daß alsdann die Transversale EG die Transversale FH schneidet In der Tat, von F geht eine und nur eine Gerade aus, die EG und AD schneidet (Nr 5) Ihr Schnittpunkt mit AD sei H', und die Projektion von H' sei $\mathfrak{H}'$ Da nun EG und FH' einander schneidende Transversalen sind, ist nach dem letzten Satze

$$\frac{\mathfrak{AE}}{\mathfrak{BE}}\cdot\frac{\mathfrak{BF}}{\mathfrak{CF}}\cdot\frac{\mathfrak{CG}}{\mathfrak{DG}}\cdot\frac{\mathfrak{DH}'}{\mathfrak{AH}'}=1$$

Da nach Annahme auch die vorher angegebene Gleichung gilt, folgt

$$\frac{\mathfrak{DH}'}{\mathfrak{AH}'}=\frac{\mathfrak{DH}}{\mathfrak{AH}},$$

so daß also $\mathfrak{H}'$ mit $\mathfrak{H}$ zusammenfällt, mithin auch H' mit H, was besagt, daß EG und FH einander schneiden Somit gilt der Satz

Ist $ABCD$ ein raumliches und nicht ebenes Vierseit und sind E, F, G, H Punkte auf den Seiten AB, BC, CD, DA, so schneiden die beiden Transversalen EG und FH einander dann, aber auch nur dann, wenn das Produkt der Teilverhaltnisse aller vier Seiten gleich Eins ist

Bezuglich der Projektion gilt der Satz

Ist $\mathfrak{ABCD}$ eine Parallelprojektion eines raumlichen und nicht ebenen Vierseits und sind $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ die Projektionen von Punkten auf seinen Seiten, so schneiden die Transversalen, deren Projektionen $\mathfrak{EG}$ und $\mathfrak{FH}$ sind, einander dann, aber auch nur dann, wenn das Produkt der Teilverhaltnisse aller vier Seiten von $\mathfrak{ABCD}$ gleich Eins ist.

Anmerkung Der Satz uber das Kennzeichen fur den Schnitt der beiden Transversalen EG und FH des Vierseits $ABCD$ durfte wohl zuerst durch M Chasles (Nr 5) bewiesen worden sein Siehe „Proposition de géométrie, démontrée par M Chasles" in der Correspondance sur l'école royale polytechnique par M Hachette, Nr 1 von 1814 im 3 Bd, Paris 1816, S 6 Der Beweis wird hier wie oben mit Hilfe des Satzes des Menelaus gefuhrt

***150. Brianchonsches Sechsseit**[1]. Bezeichnet man die Seiten AB und CD des raumlichen Vierseits $ABCD$ mit a_1 und a_2 und die Seiten BC und DA mit b_1 und b_2, ferner die Transversale FH mit a_3 und die Transversale EG mit b_3, so liegen, falls die beiden Transversalen einander schneiden, zweimal drei Geraden, also zwei Geradentripel a_1, a_2, a_3 und b_1, b_2, b_3 vor. Der erste an die Fig. 211 der letzten Nummer geknupfte Satz laßt sich dann so aussprechen

Damit zwei Geradentripel $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ und $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$ auf der Tafel die Parallelprojektionen von solchen zwei Geradentripeln des Raumes seien, von denen jedes aus drei windschiefen Geraden besteht und jede Gerade des einen Tripels

[1]) Die mit Sternchen versehenen Nummern sind uberschlagbar

jede des anderen schneidet, ist notwendig, aber auch hinreichend, daß diejenigen drei Geraden, die die Punktepaare

$$(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1),\ (\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_2) - (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_3),\ (\mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_2) - (\mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_1),\ (\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_3)$$

verbinden, durch einen gemeinsamen Punkt gehen, siehe Fig. 212.

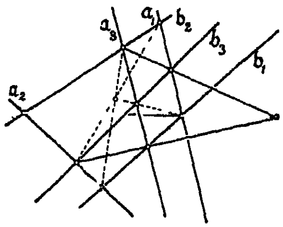


Fig 212

Unter dem Punkte $(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1)$ ist dabei selbstredend der Schnittpunkt von $\mathfrak{a}_1$ mit $\mathfrak{b}_1$ zu verstehen, usw.

Nun ist es für die Geradentripel im Raume einerlei, in welcher Reihenfolge man sie mit a_1, a_2, a_3 und b_1, b_2, b_3 bezeichnet. Man darf daher die Bezeichnungen a_1, a_2, a_3 untereinander vertauschen, ebenso die Bezeichnungen b_1, b_2, b_3. Wenn bei irgendeiner Art der Bezeichnung die soeben ausgesprochene Bedingung erfüllt ist, gilt sie also auch fur alle anderen Arten Ersetzt man z B. b_1 durch b_2, b_2 durch b_3 und b_3 durch b_1, so ergibt sich, daß diejenigen drei Geraden, die die Punktepaare

$$(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_2),\ (\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_3) - (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_1),\ (\mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_3) - (\mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_2),\ (\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_1)$$

verbinden, durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Dies ist in Fig. 212 durch die gepunkteten Geraden angedeutet. Am übersichtlichsten wird die Aufzahlung der drei Punktepaare, wenn man in der ursprunglichen Darstellung a_1 mit a_2 vertauscht Dann ergeben sich namlich die Paare

$$(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_2),\ (\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_1) - (\mathfrak{a}_2 \mathfrak{b}_3),\ (\mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_2) - (\mathfrak{a}_3 \mathfrak{b}_1),\ (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{b}_3)$$

Die Bedingung des Satzes laßt sich noch anders aussprechen Wir betrachten dasjenige Sechsseit, dessen aufeinanderfolgende Seiten $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{a}_1$ sind, siehe Fig 213, mit denselben Geraden wie Fig 212, aber mit Hervorhebung des Sechsseits durch Beziffern seiner Ecken Ob das Sechsseit, wie es hier der Fall ist, eine verschränkte Gestalt hat oder nicht, ist nebensachlich. Die in dem Satz genannten Punktepaare sind die Paare

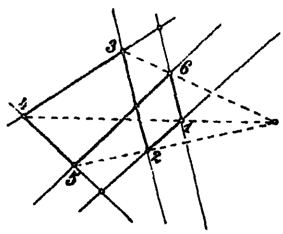


Fig 213

$$1,4 - 6,3 - 2,5$$

oder:

$$1,4 - 2,5 - 3,6$$

Die Geraden *1 4*, *2 5* und *3 6* sind nun diejenigen Diagonalen des Sechsseits, die je zwei Gegenecken verbinden und als die drei Hauptdiagonalen bezeichnet werden können. Der Satz läßt sich demnach so aussprechen.

Damit zwei Geradentripel $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3$ und $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3$ auf der Tafel die Parallelprojektionen von solchen zwei Geradentripeln des Raumes seien, von denen jedes aus drei zueinander windschiefen Geraden besteht und jede Gerade des einen Tripels jede des anderen schneidet, ist notwendig, aber auch hinreichend, daß in irgendeinem derjenigen Sechsseite, die entstehen, wenn man abwechselnd auf eine Gerade $\mathfrak{a}$ eine Gerade $\mathfrak{b}$ folgen läßt, die drei Hauptdiagonalen durch einen gemeinsamen Punkt gehen

Derartige ebene Sechsseite heißen **Brianchonsche Sechsseite.**

In voriger Nummer wurde die Bedingung des Satzes durch eine Gleichung ersetzt: Das Produkt von gewissen vier Teilverhältnissen war gleich Eins. Hier ist nun noch anzumerken, daß man, wenn im Raume zwei Geradentripel a_1, a_2, a_3 und b_1, b_2, b_3 von der betrachteten Art vorliegen, irgend zwei der drei Geraden a und irgend zwei der drei Geraden b herausgreifen kann. Sie bilden zusammen ein räumliches Vierseit, und die dabei übriggebliebenen Geraden a und b sind einander schneidende Transversalen des Vierseits. Man kann demnach verschiedene Vierseite bilden, aber es genügt, irgendeines von ihnen herauszugreifen. Wir wollen das von a_1, a_2 und b_1, b_2 gebildete benutzen, also a_3 und b_3 als Transversalen behalten. Allgemein sei der Schnittpunkt von a_i mit b_k mit P_{ik} bezeichnet. Die Seite a_1 des Vierseits wird von der Transversale b_3 in P_{13} getroffen. Da P_{11} und P_{12} die Ecken der Seite a_1 sind, ist also $P_{11}P_{13} : P_{12}P_{13}$ das zugehörige Teilverhältnis. Wendet man für die Parallelprojektion wieder deutsche Buchstaben an, so läßt sich also der letzte Satz der vorigen Nummer so aussprechen:

Damit zwei Geradentripel $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_3$ auf der Tafel die Parallelprojektionen von zwei Geradentripeln des Raumes seien, von denen jedes aus drei zueinander windschiefen Geraden besteht und jede Gerade des einen Tripels jede des anderen schneidet, ist notwendig, aber auch hinreichend, daß

$$\frac{\mathfrak{P}_{11}\mathfrak{P}_{13}}{\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{P}_{13}} \cdot \frac{\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{P}_{32}}{\mathfrak{P}_{22}\mathfrak{P}_{32}} \cdot \frac{\mathfrak{P}_{22}\mathfrak{P}_{23}}{\mathfrak{P}_{21}\mathfrak{P}_{23}} \cdot \frac{\mathfrak{P}_{21}\mathfrak{P}_{31}}{\mathfrak{P}_{11}\mathfrak{P}_{31}} = 1$$

sei, wenn allgemein $\mathfrak{P}_{ik}$ den Schnittpunkt von $\mathfrak{a}_i$ mit $\mathfrak{b}_k$ bezeichnet.

Anmerkung. Charles Julien Brianchon (geb. 1783 in Sèvres bei Paris, Professor an der Artillerieschule in Paris, gest. 1864 zu Versailles) entdeckte 1805 einen Satz über diejenigen Sechsseite, die sich einem sogenannten Kegelschnitt (insbesondere einer Ellipse) umschreiben lassen, indem er fand, daß diese Sechsseite die oben angegebene Eigenschaft haben: Ihre drei Hauptdiagonalen haben einen Punkt gemein. Siehe die erste Veröffentlichung „Sur les courbes du second degré“ in der Correspondance sur l'école impériale polytechnique par M. Hachette, Nr. 5 des Republikjahres XIV (d. h. 1805) S. 151 des 1. Bandes, 2. Aufl., Paris 1813. Auf diesen Satz kommen wir später zurück.

***151. Einschaliges Hyperboloid.** Wie vorher nehmen wir im Raume zwei Geradentripel a_1, a_2, a_3 und b_1, b_2, b_3 derart an, daß jede Gerade a_i jede Gerade b_k in einem Punkte P_{ik} schneidet, aber die Geraden a untereinander windschief sind und ebenso die Geraden b. Durch jeden Punkt von a_1 geht nach Nr. 5 eine und nur eine Gerade, die auch a_2 und a_3 trifft. Es gibt demnach unendlich viele Geraden, die a_1, a_2, a_3 schneiden. Ebenso gibt es unendlich viele Geraden, die b_1, b_2, b_3 schneiden. Eine Gerade der ersten Art heiße b_4, eine der zweiten a_4. Die Schnittpunkte von a_4 mit b_1, b_2, b_3 seien mit P_{41}, P_{42}, P_{43} und die Schnittpunkte von b_4 mit a_1, a_2, a_3 mit P_{14}, P_{24}, P_{34} bezeichnet. Dies ist in Fig. 214 in Parallelprojektion dargestellt, indem $\mathfrak{a}_4$ und $\mathfrak{b}_4$ ebendenselben Bedingungen wie

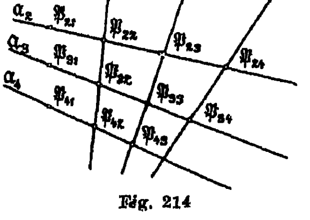


Fig. 214

$\mathfrak{a}_3$ und $\mathfrak{b}_3$ in Fig. 212 von Nr. 150 unterworfen und dementsprechend zu zeichnen sind.

Weil a_3 und b_3 einander schneidende Transversalen des Vierseits $a_1\, b_1\, a_2\, b_2$ sind, ist nach der letzten Nummer

$$\frac{\mathfrak{P}_{11}\mathfrak{P}_{13}}{\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{P}_{13}} \cdot \frac{\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{P}_{32}}{\mathfrak{P}_{22}\mathfrak{P}_{32}} \cdot \frac{\mathfrak{P}_{22}\mathfrak{P}_{23}}{\mathfrak{P}_{21}\mathfrak{P}_{23}} \cdot \frac{\mathfrak{P}_{21}\mathfrak{P}_{31}}{\mathfrak{P}_{11}\mathfrak{P}_{31}} = 1 .$$

Weil aber auch a_4 und b_3 einander schneidende Transversalen des Vierseits sind, ist ebenso, indem man den Index 3 da, wo er an **erster** Stelle vorkommt, durch den Index 4 ersetzt

$$\frac{\mathfrak{P}_{11}\mathfrak{P}_{13}}{\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{P}_{13}} \cdot \frac{\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{P}_{42}}{\mathfrak{P}_{22}\mathfrak{P}_{42}} \cdot \frac{\mathfrak{P}_{22}\mathfrak{P}_{23}}{\mathfrak{P}_{21}\mathfrak{P}_{23}} \cdot \frac{\mathfrak{P}_{21}\mathfrak{P}_{41}}{\mathfrak{P}_{11}\mathfrak{P}_{41}} = 1$$

Weil schließlich auch a_3 und b_4 einander schneidende Transversalen des Vierseits sind, gilt auch diejenige Gleichung, die entsteht, wenn man den Index 3 da, wo er an **zweiter** Stelle vorkommt, durch den Index 4 ersetzt:

$$\frac{\mathfrak{P}_{11}\mathfrak{P}_{14}}{\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{P}_{14}} \cdot \frac{\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{P}_{32}}{\mathfrak{P}_{22}\mathfrak{P}_{32}} \cdot \frac{\mathfrak{P}_{22}\mathfrak{P}_{24}}{\mathfrak{P}_{21}\mathfrak{P}_{24}} \cdot \frac{\mathfrak{P}_{21}\mathfrak{P}_{31}}{\mathfrak{P}_{11}\mathfrak{P}_{31}} = 1 .$$

Multipliziert man die beiden letzten Gleichungen miteinander und dividiert man das Ergebnis mit der ersten, so kommt:

$$\frac{\mathfrak{P}_{11}\mathfrak{P}_{14}}{\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{P}_{14}} \cdot \frac{\mathfrak{P}_{12}\mathfrak{P}_{42}}{\mathfrak{P}_{22}\mathfrak{P}_{42}} \cdot \frac{\mathfrak{P}_{22}\mathfrak{P}_{24}}{\mathfrak{P}_{21}\mathfrak{P}_{24}} \cdot \frac{\mathfrak{P}_{21}\mathfrak{P}_{41}}{\mathfrak{P}_{11}\mathfrak{P}_{41}} = 1$$

Diese Gleichung aber besagt nach dem letzten Satz der vorhergehenden Nummer daß die Transversalen a_4 und b_4 des Vierseits einander schneiden. Daher ist man berechtigt, in Fig 214 auch noch den unbenannt gelassenen Schnittpunkt von $\mathfrak{a}_4$ und $\mathfrak{b}_4$ mit $\mathfrak{P}_{44}$ zu bezeichnen, weil $\mathfrak{P}_{44}$ die Projektion des wirklich vorhandenen Schnittpunktes P_{44} von a_4 und b_4 ist. Wir haben so den Satz gewonnen

Sind a_1, a_2, a_3 und b_1, b_2, b_3 zwei Geradentripel derart, daß jede Gerade des einen Tripels jede des anderen schneidet, aber die drei ersten Geraden zueinander windschief sind ebenso wie die drei letzten, so schneidet jede Gerade b_4, die a_1, a_2, a_3 trifft, auch jede Gerade a_4, die b_1, b_2, b_3 trifft.

Die Gesamtheit aller Geraden b, die a_1, a_2, a_3 schneiden, erzeugt eine krumme Fläche, ebenso die Gesamtheit aller Geraden a, die b_1, b_2, b_3 schneiden. Da nun jede Gerade b jede Gerade a trifft, fallen beide Flächen in eine zusammen. Dieser Fläche kommt mithin die merkwürdige Eigenschaft zu, daß sie, obwohl sie keine Ebene ist, zwei Geradenscharen a und b derart enthält, daß durch jeden Punkt der Fläche je eine Gerade a und eine Gerade b geht. Dabei sind alle Geraden a zueinander windschief, ebenso alle Geraden b. Diese Fläche heißt aus einem später anzugebenden Grunde ein **einschaliges Hyperboloid**.

Es gibt hiernach stets ein, aber auch nur ein einschaliges Hyperboloid, das drei gegebene zueinander windschiefe Geraden a_1, a_2, a_3 enthält.

Anmerkung Insbesondere ergibt sich ein **einschaliges Rotationshyperboloid**, wenn man eine Gerade a um eine mit ihr starr verbundene, aber zu ihr windschiefe Achse dreht. Darauf kommen wir später zurück. Dieser Sondenfall war schon von

Christopher Wren (geb 1632 zu East Knoyle, Wiltshire, Mitbegründer der Londoner Royal Society, gest 1723 zu Hamptoncourt) erkannt worden, siehe „Generatio corporis cylindroidis hyperbolici, elaborandis lentibus hyperbolicis accomodati“ (Erzeugung des der Herstellung hyperbolischer Linsen angepaßten zylinderartigen hyperbolischen Körpers), Philosophical Transactions 1669, S 961, 962 Die doppelte Erzeugung des allgemeinen einschaligen Hyperboloids dadurch, daß man je eine Gerade auf drei windschiefen Geraden gleiten läßt, wurde erst viel später entdeckt Nach dem Bericht über den Unterricht an der neu begründeten École polytechnique zu Paris im Journal de l'école polyt, 1 cahier, Paris an III (1795), wurde sie von den ersten Schülern dieser Anstalt entdeckt, wir vermuten, auf analytischem Wege M Chasles (Nr. 5) gab den rein geometrischen Beweis in der kleinen Arbeit „Théorème de géométrie“ in der Correspondance sur l'école impériale polytechnique par M. Hachette, Nr 5 von 1813, S 446/447 des 2 Bandes, Paris 1813

***152. Hyperbolisches Paraboloid.** Zu den einschaligen Hyperboloiden gehört ein Sonderfall, für den sich der Beweis der doppelten Erzeugung durch gerade Linien einfacher führen läßt:

Wir gehen wieder von einem räumlichen Vierseit $ABCD$ aus und ziehen zwei Transversalen EG und FH insbesondere so, daß erstens die Transversale EG die Strecken AB und DC (nicht CD) in demselben Verhältnis teilt, also

$$\frac{AE}{BE} = \frac{DG}{CG}$$

ist, und zweitens die Transversale FH die Strecken BC und AD (nicht DA) in einem gleichen Verhältnis teilt, also

$$\frac{BF}{CF} = \frac{AH}{DH}$$

ist Behauptet wird, daß sich die Transversalen schneiden Zum Beweis projizieren wir die Figur durch parallele Strahlen auf eine Tafel, indem wir als Projektionsrichtung die der Geraden FH benutzen Dann fallen die Projektionen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{H}$ zusammen Die Projektion $\mathfrak{ABCD}$ des Vierseits ist nun so beschaffen, daß die Gleichungen gelten

$$\frac{\mathfrak{AE}}{\mathfrak{BE}} = \frac{\mathfrak{DG}}{\mathfrak{CG}}, \qquad \frac{\mathfrak{BF}}{\mathfrak{CF}} = \frac{\mathfrak{AH}}{\mathfrak{DH}}$$

Da $\mathfrak{F}$ mit $\mathfrak{H}$ zusammenfällt, besagt die zweite, daß $\mathfrak{AB}$ zu $\mathfrak{DC}$ parallel ist, siehe Fig 215 Infolge der ersten Gleichung geht also die Gerade $\mathfrak{EG}$ durch den Punkt $\mathfrak{F}$. Mithin enthält die projizierende Ebene von EG die Gerade FH, d h EG schneidet FH. Also gilt der Satz

Ist $ABCD$ ein räumliches Vierseit und sind EG und FH zwei Transversalen, von denen die erste AB und DC (nicht CD) in demselben Verhältnis teilt und die zweite BC und AD (nicht DA) ebenfalls in einem gleichen Verhältnis teilt, das aber von dem ersten verschieden sein kann, so schneiden die beiden Transversalen EG und FH einander.

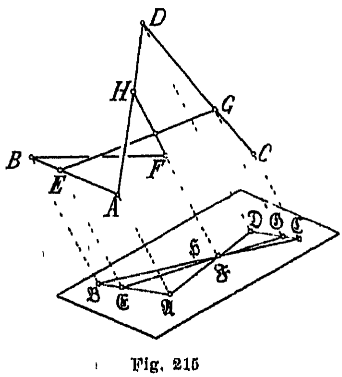


Fig. 215

Indem man nun die beiden Teilverhältnisse beliebig abändert, gelangt man zu zwei Scharen von Transversalen, und jede Transversale der einen

Schar schneidet jede der anderen Schar. Wiederum gelangt man also zu einer krummen Fläche, die zwei Scharen von Geraden enthält derart, daß durch jeden Punkt der Fläche je eine Gerade jeder Schar geht, während die Geraden jeder einzelnen Schar untereinander windschief sind. Diese Fläche, ein Sonderfall des einschaligen Hyperboloids, heißt ein hyperbolisches Paraboloid. Nimmt man eines der angewandten Teilverhältnisse gleich Eins an, so liegen die zugehörigen Teilpunkte unendlich fern (Nr. 9); demnach ist das hyperbolische Paraboloid ein solches einschaliges Hyperboloid, bei dem zu jeder der beiden erzeugenden Geradenscharen insbesondere eine unendlich ferne Gerade gehört.

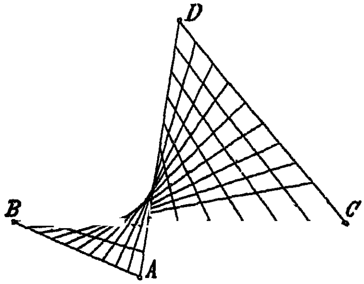


Fig. 216

In Fig. 216 sind mehrere Geraden beider Scharen dargestellt, jedoch nur solche, die Strecken zwischen AB und CD haben, und von ihnen sind nur diese Strecken gezeichnet. Die Fläche aber erstreckt sich allerseits bis ins Unendliche.

153. Beispiele zur Anwendung der freien Parallelprojektion. Auf drei nicht aneinander stoßenden Kanten eines Spates (Nr. 147) seien Punkte U, V, W gegeben. Gesucht wird der vollständige Schnitt des Spates mit der Ebene der drei Punkte. Siehe die Parallelprojektion in Fig. 217. Eine Spatebene, z. B. die Ebene $ABCD$, enthält einen schon bekannten Punkt U der Schnittebene. Man bekommt einen zweiten, indem man feststellt, wo die Gerade VW die Ebene $ABCD$ trifft, und zu diesem Zweck legt man durch VW eine geeignete Hilfsebene. Da V der nach C gehenden Spatkante angehört, wird man als Hilfsebene diejenige Ebene durch VW benutzen, die diese Kante enthält. In dieser Ebene liegt die Parallele WE zu VC, so daß die Hilfsebene längs der Geraden EC die Spatebene $ABCD$ schneidet.

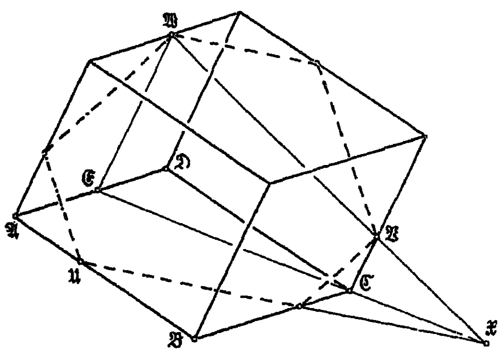


Fig. 217

Mithin trifft VW die Spatebene $ABCD$ im Punkte X auf EC. Nunmehr ist die Gerade UX bekannt, in der die Ebene UVW die Spatebene $ABCD$ schneidet. Alles weitere ergibt sich daraus leicht, denn der vollständige Schnitt der Ebene UVW mit dem Spat ist ein Sechseck mit je zwei parallelen Seiten.

Ein Prismatoid entsteht, wenn man in zwei parallelen Ebenen je ein Vieleck annimmt und diese Vielecke durch Dreiecke verbindet, die jeweils eine Kante mit dem einen Vieleck und eine Ecke mit dem anderen gemein haben. In Fig. 218 sind die beiden Vielecke als Parallelogramme

gewählt; man darf sie nach Belieben zeichnen Gesucht wird der vollstandige Schnitt des Prismatoids mit einer Ebene. Da die Ebene die beiden parallelen Vielecksebenen des Prismatoids in parallelen Geraden schneidet, seien diese beiden Geraden s und t in der Zeichnung durch zwei beliebig angenommene parallele Geraden $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ gegeben. Nun ist es leicht, die Schnitte der Prismatoiddreiecke mit der Ebene (s, t) zu finden. Denn z B. das Dreieck ABC schneidet die eine Vielecksebene in AB, also die andere in der Parallelen zu AB durch C Die erste Gerade hat mit s einen Punkt X, die zweite mit t einen Punkt Y gemein, folglich ist XY die Schnittgerade Von ihr kommt nur diejenige Strecke in Betracht, die innerhalb des Dreiecks ABC liegt Nach diesem Verfahren wird jede Ecke des Schnittvielecks doppelt bestimmt. Dadurch werden Schwierigkeiten beseitigt, die durch unerreichbare Punkte entstehen können Solche Schwierigkeiten lassen sich auch dadurch umgehen, daß man Diagonalebenen des Prismatoids benutzt, namlich Ebenen, die nicht zu den Seitenflachen des Prismatoids gehören, aber eine Diagonale des einen Vielecks und eine Ecke des anderen Vielecks des Prismatoids enthalten.

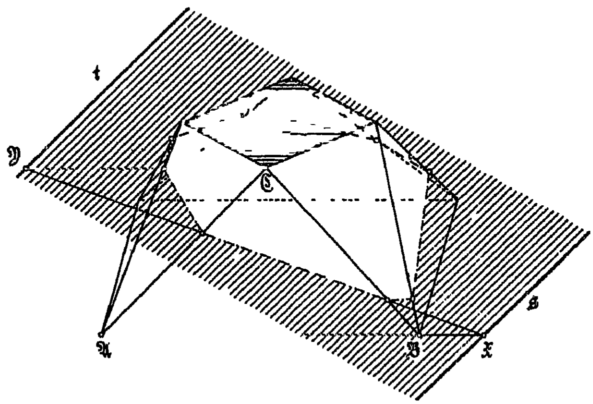


Fig 218

154. Schattenkonstruktionen in freier Parallelprojektion. In Nr 146 wurde gelegentlich bemerkt, daß man beliebige Punkte P auch in anderer Weise, als es damals geschah, mit dem Bezugsvierflach $ABCD$ derart verknüpfen kann, daß Gebilde entstehen, bei denen die freie Parallelprojektion anwendbar ist. Man kann z. B. durch P die Parallele zur Kante AD ziehen und sie in Q mit der Ebene ABC schneiden. Wenn hiervon eine Parallelprojektion gegeben ist, siehe Fig. 219, erkennt man: Wird eine Projektionsrichtung beliebig gewählt und dann ein Vierflach $ABCD$ im Raume so angenommen, daß seine Parallelprojektion durch $\mathfrak{ABCD}$ gegeben ist, so wird $\mathfrak{Q}$ die Parallelprojektion eines bestimmten Punktes Q der Ebene ABC, also die Gerade $\mathfrak{QP}$ die Parallelprojektion der Parallelen zu AD durch Q und schließlich P derjenige Punkt auf dieser Parallelen, für den $QP \cdot AD = \mathfrak{QP} . \mathfrak{AD}$ ist. In der Tat also wird P vermöge der Darstellung in Fig. 219 so mit dem Bezugsvierflach verknüpft, daß man aus dem Bilde die Lage von P gegenüber dem Vierflach entnehmen kann.

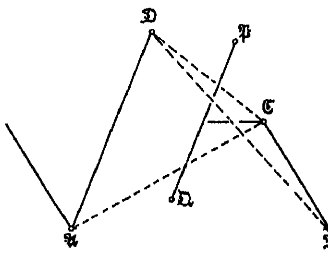


Fig 219

Wenn man durch alle Punkte P des darzustellenden Gebildes wie

soeben die Parallelen zu DA zieht und ihre Schnittpunkte Q mit der Ebene ABC herstellt, heißt dies, daß man das Gebilde in der Richtung DA auf die Ebene ABC projiziert. Das neue Verfahren besteht also einfach darin, daß man von dem Gebilde zunächst eine Parallelprojektion auf eine Ebene ABC entwirft und dann in der Zeichnung, d. h. also vermöge irgendeiner zweiten Parallelprojektion auf die Tafel, sowohl das Gebilde als auch seine vorher entworfene Parallelprojektion auf ABC angibt Dabei kann man die Ebene ABC auch anders als durch das Dreieck ABC begrenzen, z. B. durch ein Parallelogramm wie in Fig. 219, oder auch man kann die Begrenzung in der Zeichnung ganz weglassen Ein Gebilde, das die freie Parallelprojektion zulaßt, liegt also allemal dann vor, wenn man in der Zeichnung, die durch eine Parallelprojektion auf die Tafel entstanden sein soll, nicht nur das Gebilde selbst angibt, sondern auch diejenige ebene Figur, die hervorgeht, wenn man das Gebilde auf irgendeine Ebene im Raume in irgendeiner Richtung projiziert

Dieser Gedanke wird gern angewandt, um anschauliche Skizzen von Gegenstanden mit ihren Schatten herzustellen Ehe wir Beispiele geben, sei noch bemerkt Die darzustellenden Gegenstande enthalten meistens drei ausgezeichnete Richtungen, namlich die in der Lange, Breite und Hohe, d. h. drei zueinander senkrechte Richtungen. Deshalb ist es gut, ausdrucklich darauf hinzuweisen, daß man irgend drei auf der Tafel von einem Punkte $\mathfrak{O}$ aus gezogene Geraden immer als die Parallelprojektionen dreier zueinander senkrechter Richtungen auffassen darf. Dies sieht man so ein Nimmt man auf den drei Geraden Punkte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ so an, daß sie ein spitzwinkliges Dreieck bilden, so gibt es nach Nr. 49 stets einen Punkt O im Raume derart, daß $O\mathfrak{X}$, $O\mathfrak{Y}$, $O\mathfrak{Z}$ zueinander senkrecht sind Dieser Punkt O liegt, wie sich dort ergab, senkrecht über dem Hohenschnittpunkt des Dreiecks $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$, wie nur nebenbei bemerkt sei Nun erhellt Wendet man die Parallelprojektion in der Richtung von O nach $\mathfrak{O}$ an, so sind die Projektionen der drei zueinander senkrechten Geraden $O\mathfrak{X}$, $O\mathfrak{Y}$, $O\mathfrak{Z}$ in der Tat die drei vorhin willkurlich von $\mathfrak{O}$ aus auf der Tafel gezogenen Geraden. Ferner sei erwähnt: Bei den Schattenkonstruktionen bedient man sich mit Vorteil des Umstandes, daß der Schatten, den eine Gerade auf eine Ebene wirft, durch den Punkt geht, in dem die Gerade die Ebene schneidet, und daß insbesondere der Schatten, den eine Gerade auf eine zur Geraden parallele Ebene wirft, zur Geraden selbst parallel ist. In diesem besonderen Falle ist der Schatten einer Strecke außerdem geradeso lang wie die Strecke, immer vorausgesetzt, daß es sich um Beleuchtung durch parallele Strahlen handelt.

Nach dem, was vorhin gesagt wurde, darf man das Bild eines Spates (Nr 147) immer als eine Parallelprojektion eines rechtwinkligen Spates, d. h. eines Rechtflachs (Nr 52) auffassen. Obwohl dies nebensachlich ist, wollen wir bei dem folgenden Beispiel diese Auffassung benutzen. Wenn man zwei parallele Kanten des Rechtflachs von den vier Ecken aus um dieselbe Strecke verkürzt und dementsprechend zwei parallele Ebenen durch gegeneinander geneigte Ebenen ersetzt, ergibt sich ein Kasten mit zwei schragen und zwei lotrechten Wanden; die obere Fläche sei entfernt worden, siehe Fig 220. Man sieht, daß die lotrechten Pro-

jektionen $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ der vier oberen Ecken 1, 2, 3, 4 auf die Grundebene des Kastens in der Zeichnung bekannt sind Am Kasten lehne nun ein Brett in Form eines länglichen Parallelogramms, die Grundkante $5\,6$ ruhe auf der Grundebene Sie muß zu $1\,2$ parallel gewählt werden, weil das Brett längs $7\,8$ an der Kante $1\,2$ anlehnt Wird nun der Schlagschatten, den die Ecke 1 auf die Grundebene wirft, irgendwo als Punkt I angenommen, so kann man alle Schatten dieses Kastens samt anlehnendem Brett herstellen Denn der Schlag-

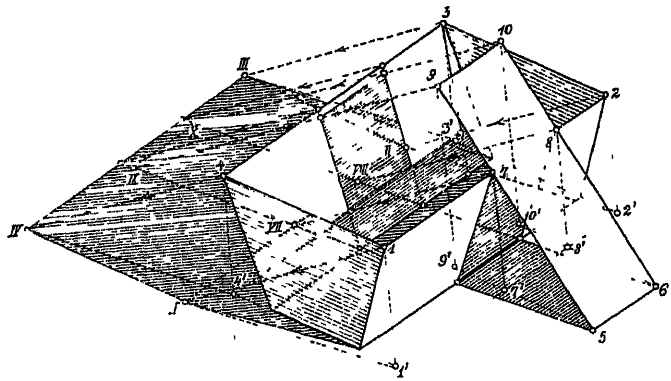


Fig 220

schatten $I\;II\;III\;IV$ von $1\,2\,3\,4$ ist kongruent mit $1\,2\,3\,4$, ferner sind die allerdings nicht zustande kommenden, sondern nur geometrischen Schlagschatten VII und $VIII$ von 7 und 8 auf $I\;II$ gelegen, so daß es durch Verlängerung von $5\;VII$ und $6\;VIII$ leicht ist, die ebenfalls nicht sichtbaren Schlagschatten IX, X der oberen Bretteckcn 9 und 10 zu bestimmen Diejenigen Schatten, die auf den Kastenebenen entstehen, ergeben sich aus diesen Schlagschatten durch Zurückgehen in der Lichtrichtung (Nr 112)

In Fig 221 ist eine Tür in einer lotrecht gedachten Mauer nebst einem über der Tür lagernden, vorspringenden und abgeschrägten Stein dargestellt Hier sollen nun alle Schatten für den Fall entworfen werden, wo die Steinecke 1 ihren Schatten I auf die linke Seitenwand der Tür wirft. Man bemerkt zunächst wieder, daß die Projektionen $1'$, $2'$, $3'$ der Steinecken 1, 2, 3 auf die wagerecht gedachte Grundebene sofort zu ermitteln sind. Deshalb kann man auch die Schnittgerade $1'\,I'$ der durch $1'\,1$ gehenden Lichtebene mit der Grundebene zeichnen. Die Lichtebenen durch $2'\,2$ und $3'\,3$ sind zu dieser Lichtebene parallel, und man findet daher sofort die Schlagschatten II und III

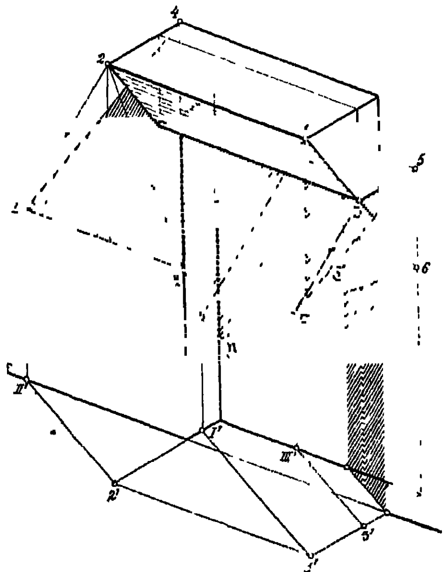


Fig 221

von 2 und 3 auf der Mauer bzw. Tür. Die Steinkante $1\,3$ ist zur linken Seitenwand der Tür parallel und schneidet, gehörig verlangert, die Tür-

ebene in *6*. Mithin ist der Schatten von *1 3* auf jener Seitenwand die Parallele *I* $\mathfrak{B}$ zu *1 3* und auf der Tür die Gerade *6 III* $\mathfrak{B}$. Die untere Steinkante von *3* aus, die aus der Mauer vorspringt, schneidet in ihrer Verlängerung die Türebene in *5*, und deshalb ist *III 5* ihr Schatten auf der Türebene. Er kommt aber nur bis $\mathfrak{C}$ in Betracht, da die rechte Mauerkante bis dahin ihren Schatten wirft. Weiterhin ist *2* der Schnittpunkt von *1 2* mit der fortgesetzt gedachten linken Seitenwand der Tür, außerdem ist *1 2* zur Mauer parallel; deshalb wirft *1 2* auf die linke Seitenwand den von *I* nach *2* gehenden Schatten, von dem nur das Stück *I* $\mathfrak{A}$ in Betracht kommt, und auf die Mauer den zu *1 2* parallelen Schatten *II* $\mathfrak{A}$ durch *II*. Schließlich ist *II 4* der Schlagschatten von *2 4*. Wie man sieht, wird sowohl der Punkt $\mathfrak{A}$ als auch der Punkt $\mathfrak{B}$ doppelt bestimmt.

155. Durchdringung von Pyramiden. Eine Pyramide wird — wie ein Prisma (Nr. 131) — durch ihre Kanten bestimmt, nämlich durch mehrere Strahlen a, b, c, d …, die von einem Punkte S, der Pyramidenspitze, ausgehen und in einer gewissen Reihenfolge stehen. Die Pyramide hat als Seiten die Winkelfelder $(a\,b)$, $(b\,c)$, $(c\,d)$ …, die an sich unbegrenzt sind. Sie ist nur dann verschränkt, wenn zwei nicht unmittelbar aufeinanderfolgende Winkelfelder eine Gerade gemein haben, die nicht zu den Kanten a, b, c, d … gehört. Die Scheitel-Winkelfelder der Strahlenpaare $a\,b$, $b\,c$, $c\,d$ … erzeugen die Scheitelpyramide. Von ihr wollen wir absehen. Ferner wollen wir annehmen, die Pyramide sei nicht verschränkt. Grenzen wir sie dann durch irgendeine die Spitze nicht enthaltende Ebene ab, so entsteht ein Pyramidenkörper. Die Schnittpunkte der Kanten a, b, c, d … mit der Ebene sind die Ecken seines Grundvielecks. Ist kurzweg von einer Pyramide die Rede, so meint man damit meistens die Oberfläche oder den Mantel eines Pyramidenkörpers.

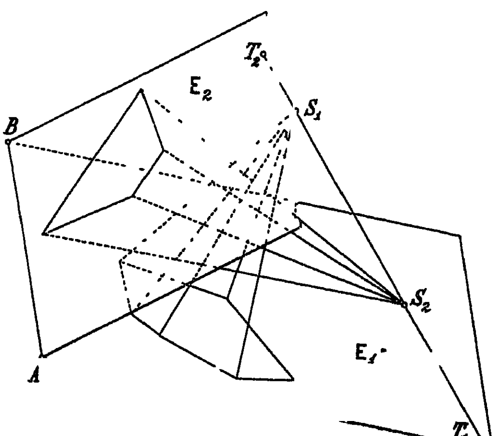


Fig 222

Ohne weiteres leuchtet ein, daß die Pyramide die freie Parallelprojektion gestattet. Dagegen wird das aus irgend zwei Pyramiden bestehende Gebilde die freie Parallelprojektion nur dann gestatten, wenn beide Pyramiden auf dasselbe Vierflach (Nr. 146) bezogen worden sind. Dies kann so bewerkstelligt werden: Eine Strecke AB und eine zweite Strecke $T_1 T_2$, von denen wir annehmen, daß sie auf windschiefen Geraden liegen, mögen zwei Gegenkanten des Bezugsvierflachs sein, siehe Fig. 222. Die Vierflachebenen ABT_1 und ABT_2, die wir mit E_1 und E_2 bezeichnen, wählen wir als Grundebenen der Pyramiden, d. h. wir nehmen die Grundvielecke in ihnen beliebig an. Ferner wählen wir die Gerade $T_1 T_2$ als die Verbindende der Spitzen der Pyramiden,

d. h. wir nehmen die Spitzen S_1 und S_2 beliebig auf $T_1 T_2$ an. In Fig. 222 liegt eine Parallelprojektion davon vor. Entgegen dem bisher geübten Brauch haben wir der Bequemlichkeit wegen darin dieselben Bezeichnungen wie beim wirklichen, räumlichen Gebilde angebracht; eine Verwechslung ist ja nicht zu befurchten. Nun erhellt: Falls die Punkte A, B, T_1, T_2 die Parallelprojektionen der Ecken eines bestimmt im Raume angenommenen Vierflachs sind, haben auch die beiden Grundvielecke und die beiden Pyramidenspitzen auf Grund der Zeichnung vollkommen bestimmte Lagen auf zwei Vielflachebenen bzw. auf einer Vierflachkante, d. h. das Gebilde, das aus den so auf das Vierflach bezogenen beiden Pyramiden besteht, gestattet die freie Parallelprojektion. Dies zieht nach sich, daß man in Fig. 222 die Durchdringung beider Pyramiden zu zeichnen vermag, wie es jetzt geschehen soll.

Die Linie oder die Linien, in denen sich die Pyramidenmantel durchsetzen, werden geschlossene und im allgemeinen nicht ebene Vielecke sein. Ihre Kanten sind Strecken, in denen die Dreiecke der Pyramiden einander schneiden, und ihre Ecken sind die Punkte, in denen die Kanten der ersten oder zweiten Pyramide den Mantel der zweiten oder ersten Pyramide schneiden. Da alle Kanten von S_1 oder S_2 ausgehen und alle Dreiecksflachen den Punkt S_1 oder S_2 enthalten, verwendet man zur Bestimmung der Durchstoßungspunkte zweckmaßig Hilfsebenen durch die beiden Spitzen S_1 und S_2, d. h. durch die Gerade $T_1 T_2$. Jede Ebene durch $T_1 T_2$ schneidet die Grundebenen E_1 und E_2 in Geraden, die sich auf AB treffen. Eine derartige Ebene enthalt eine Kante der ersten oder zweiten Pyramide, falls ihre Schnittgerade mit E_1 oder E_2 durch einen Kantenendpunkt geht. Die Fig. 223, die in großerem Maßstab gehalten ist und worin die willkurlichen Umrandungen der Ebene E_1 und E_2 als uberflussig fortgelassen sind, weist alle diejenigen Hilfsebenen durch $T_1 T_2$ auf, die Pyramidenkanten enthalten. Auch sind darin die Schnittgeraden dieser Ebenen mit E_1 und E_2 ausgezogen sowie diejenigen Geraden eingestrichelt, in denen die Ebenen die Dreiecksflachen der Pyramiden schneiden. Es leuchtet ein, wie sich daraus alle Punkte ergeben, in denen die Kanten der ersten oder zweiten Pyramide den Mantel der zweiten oder ersten Pyramide durchsetzen.

Diese Punkte bestimmt zu haben, genugt aber nicht, es muß noch festgestellt werden, in welcher Reihenfolge diese Eckpunkte der gesuchten Durchdringungslinie aufeinander folgen. Es ist also noch zu erortern, durch welches Verfahren man zu der in Fig. 223 angegebenen richtigen Reihenfolge *1*, *2*, *3* ... *15*, *1* gelangt. Da die Hilfsebenen samtlich durch $T_1 T_2$ gehen, gehoren sie einem sogenannten Ebenenbuschel mit der Achse $T_1 T_2$ an. Durchlauft ein Punkt die noch zu ermittelnde Durchdringungslinie der Pyramidenmantel, so macht die durch ihn und durch $T_1 T_2$ gelegte Ebene Drehungen um die Achse $T_1 T_2$ in dem einen oder anderen Sinne. Man nennt deshalb die Hilfsebenen Pendelebenen. Es kommt darauf an, festzustellen, mit was für Ausschlägen nach der einen oder anderen Seite hin das Pendeln um $T_1 T_2$ stattfindet. Dabei nehmen wir zur Vereinfachung des Ausdruckes an, daß A vorn und B hinten auf AB sei; dies ist gestattet (Nr. 147) und auch schon in Fig. 222 geschehen. Diese Annahme zieht nach sich, welche Ecken der Grundvielecke und also auch welche Kanten der Pyramiden vorn und welche hinten liegen. Die vorderste

Hilfsebene, die in Fig. 223 keine Ziffernbezeichnungen trägt, enthält zwar die vorderste Kante der ersten Pyramide, geht dagegen vor der zweiten Pyramide vorbei. Demnach schneidet die vorderste Kante der ersten Pyramide die zweite Pyramide nicht. Die vorderste wirklich in Betracht kommende Hilfsebene ist die Ebene $T_1 X T_2$; in ihr liegen die mit *1* und *9* bezeichneten Durchstoßungspunkte der vordersten Kante der zweiten Pyramide mit dem Mantel der ersten. Man tut nun gut, seine Aufmerksamkeit auf einen der beiden Punkte zu beschränken, wir wählen etwa den Punkt *1*. Zu ihm gehören Punkte *1* auf den Grundvielecken. Wird die Ebene $T_1 X T_2$ zurückgedreht, d. h. bewegt sich X auf AB nach B

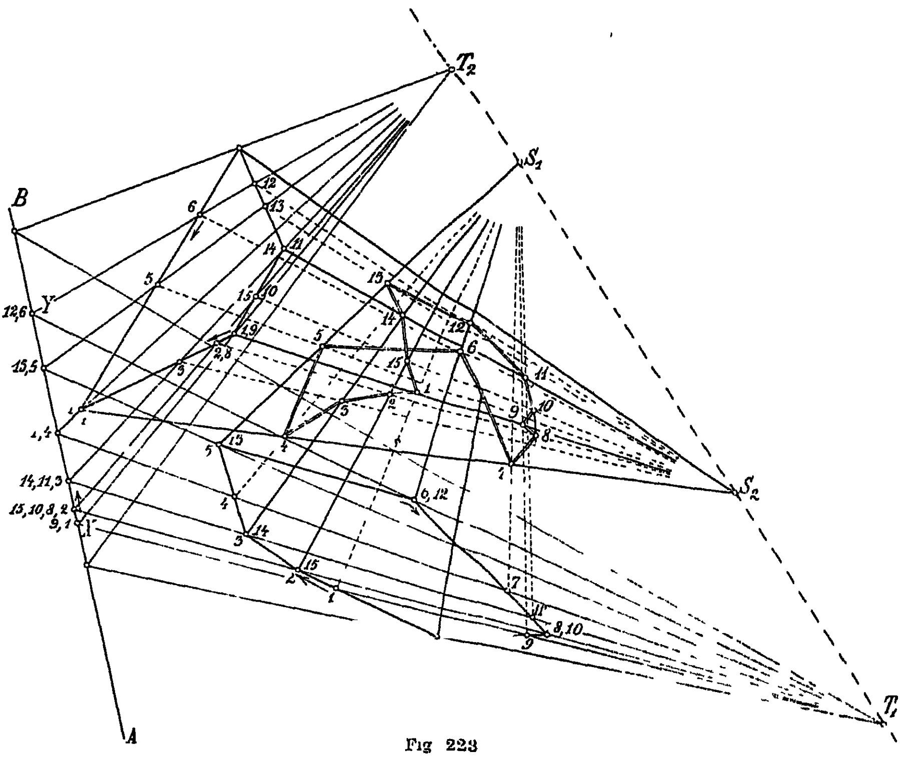


Fig 223

hin, so wandern auch die Stellen *1* auf den Grundvielecken, und zwar auf dem ersten Grundvieleck notwendig nach links, wie es der Pfeil zeigt, während wir auf dem zweiten Grundvieleck den Bewegungssinn nach Belieben wählen dürfen, etwa so, wie es dort der Pfeil bei *1* andeutet. Nunmehr wird Schritt für Schritt zu denjenigen weiter rückwärts gelegenen Hilfsebenen übergegangen, die durch Ecken des ersten oder zweiten Grundvielecks in den von den Pfeilen angegebenen Gegenden liegen, und zwar immer in der Reihenfolge, in der sie uns begegnen. Dies sind diejenigen Hilfsebenen, die an allen ihren in Betracht kommenden Stellen die Ziffern *2*, *3* . . . *6* tragen. Die Ebene darf nicht weiter über diese sechste Lage, d. h. über Y hinaus wandern, zwar gibt es eine noch weiter rückwärts gelegene Hilfsebene durch die Hinterkante der zweiten

Pyramide, aber sie geht hinten an der ersten Pyramide vorbei, d. h jene Kante trifft diese Pyramide überhaupt nicht. Demnach folgt jetzt auf den Pendelausschlag bis zur Lage T_1YT_2 ein Ruckschlag. Der Punkt auf dem Grundvieleck der zweiten Pyramide ist dabei augenscheinlich gezwungen, von *6* aus zurückzuwandern, wie es der dort angebrachte Pfeil zeigt; dagegen können wir den zugehörigen Punkt auf dem Grundvieleck der ersten Pyramide in dem daselbst angegebenen Pfeilsinne weiterwandern lassen. Alles übrige ergibt sich in derselben Weise wie vorhin. Man verfolge die vollständige Durchführung der Pendelschwingungen im einzelnen in Fig. 223, die Pendelebenen sind der Reihe nach mit Ziffern bezeichnet. Wesentlich ist bei der Durchführung dieser Bewegung, daß man seine Aufmerksamkeit immer auf die zugehörigen Gegenden der Grundvielecke richte und feststelle, welches jeweils die nächste Hilfsebene ist, die durch eine dort gelegene Ecke des einen oder anderen Grundvielecks geht Man gelangt in Fig. 223 nach mehreren Pendelausschlagen schließlich zur vordersten Ebene T_1XT_2 und zum ersten Punkt *1* der Durchdringungslinie zurück

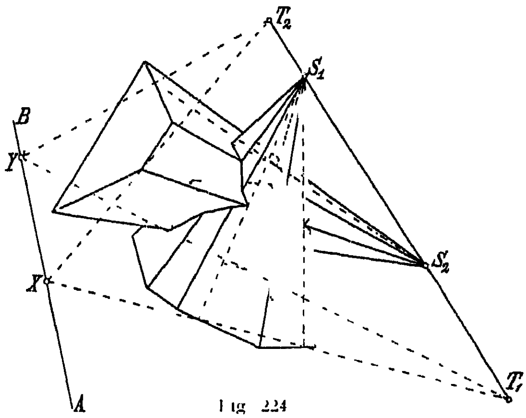


Fig. 224

Da A weiter vorn als B liegen soll, wissen wir, welche Teile der Pyramidenmantel sichtbar sind, falls man die Pyramidenkörper als undurchsichtig betrachtet Eine Kante der gebrochenen Durchdringungslinie ist dann und nur dann sichtbar, wenn sie sowohl auf einer an sich sichtbaren Fläche der ersten Pyramide als auch auf einer an sich sichtbaren Fläche der zweiten liegt Alle anderen Kanten der Linie sind unsichtbar, teils aus nur einem Grunde, nämlich weil sie auf der Rückseite der einen oder anderen Pyramide liegen, teils aus doppeltem Grunde, nämlich weil sie auf den Rückseiten beider Pyramiden liegen. Das Ergebnis ist, wieder in dem kleinen Maßstab, in Fig. 224 dargestellt.

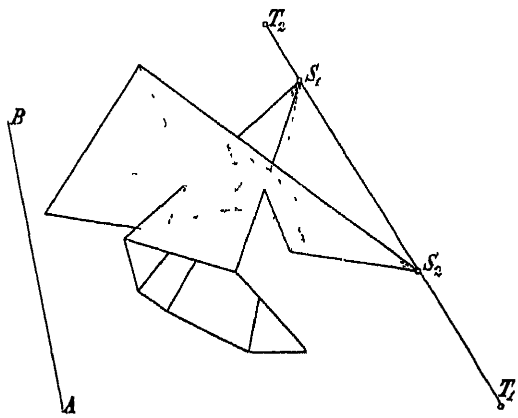


Fig 225

Nimmt man dagegen an, daß B vorn und A hinten liege, so ergibt sich der Anblick in Fig. 225, worin der besseren Anschaulichkeit zuliebe die erste Pyramide hohl und ohne Grundfläche gedacht ist, so daß man in sie hineinblicken kann

In Fig. 226 sind die Pyramiden anscheinend dieselben wie vorher; das trifft aber nicht zu. Allerdings haben die Pyramiden hier dieselben Parallelprojektionen wie vorher, aber sie liegen anders zueinander, denn die Punkte T_1 und T_2, in denen die Verbindende der Spitzen S_1 und S_2 die beiden Grundebenen schneidet, sind ein wenig verändert. Dies bewirkt, daß die zweite Pyramide gegenüber der Annahme in Fig. 224 etwas weiter vorrückt, so daß die vordersten Kanten beider Pyramiden einander treffen, d. h. die in der großen Fig. 223 mit *1* und *9* bezifferten Ecken des Durchdringungsvielecks fallen jetzt zusammen. Daher entsteht hier ein Doppelpunkt der Durchdringungslinie, gelegen auf der vordersten Pendelebene T_1XT_2. Durch eine geringfügige Abänderung der Rückseite des einen Grundvielecks könnte man übrigens leicht erzielen, daß ein zweiter Doppelpunkt auf der am weitesten rückwärts gelegenen Pendelebene T_1YT_2 entstände. Ein Doppelpunkt ergibt sich allemal dann, wenn eine Pendelebene vorhanden ist, die eine äußerste Lage hat, d. h. einen der Pendelausschläge begrenzt, und in der zugleich je eine Kante jeder Pyramide liegt. Wenn sonst in einer Pendelebene je eine Kante jeder Pyramide liegt, schneiden sich zwar diese beiden Kanten, aber ohne einen Doppelpunkt zu erzeugen, siehe z. B. die Stelle *14* der Durchdringungslinie in der großen Fig. 223.

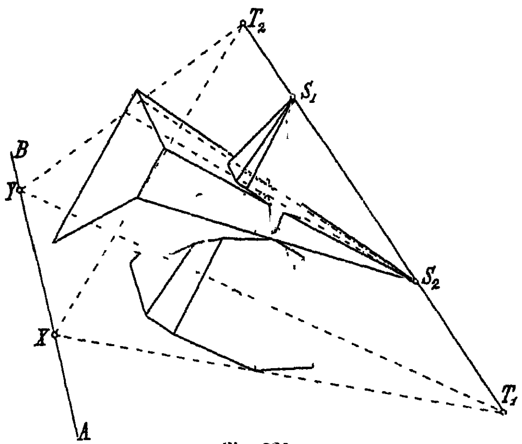


Fig. 226

Auch in Fig. 227 sind die Projektionen der Pyramiden dieselben wie vorher, jedoch sind hier die Punkte T_1 und T_2 so gewählt, daß die vorderste Kante der zweiten Pyramide vor der ersten Pyramide vorbeigeht. Hier zerfällt die Durchdringungslinie in zwei einzelne geschlossene räumliche Vielecke.

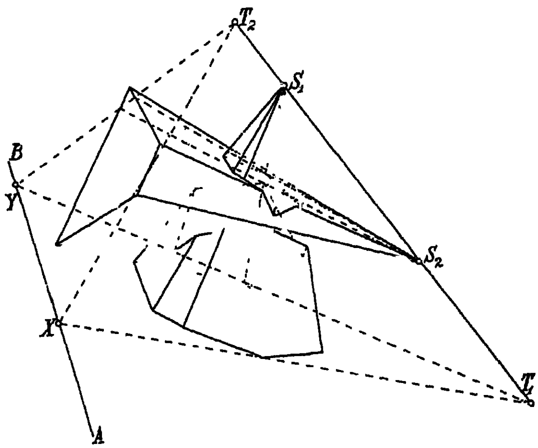


Fig. 227

Während in Fig. 224 jede Pyramide von der anderen angeschnitten wird, dringt in Fig. 227 die erste Pyramide vollständig durch die zweite hindurch, indem alle Kanten der ersten den Mantel der zweiten durchbohren. Ob wie in Fig. 224 bloß ein Anschneiden oder wie in

Fig. 227 eine vollständige Durchdringung zustande kommt, kann man in jedem Falle von vornherein feststellen: Es richtet sich einfach danach, welche Stücke der Grundvielecke außerhalb des Raumteiles zwischen den beiden äußersten Pendelebenen T_1XT_2 und T_1YT_2 liegen. Denn diese außerhalb gelegenen Stücke gehören zu solchen Streifen der Pyramidenmantel, auf denen keinerlei Durchdringung stattfindet Hat also ein Grundvieleck nur ein derartiges Stück (wie es bei beiden Grundvielecken in Fig. 224 der Fall ist), so bleibt auf jedem Mantel ein Streifen von der Durchdringung frei, d. h. es tritt bloß ein Anschneiden ein. Hat dagegen das eine Grundvieleck zwei derartige Stucke und das andere gar keins (siehe Fig. 227), so liegt der Fall der vollständigen Durchdringung vor. Den Übergang vom einen zum andern Fall stellt der Fall des Doppelpunktes in Fig. 226 dar.

Wir haben als Grundvielecke konvexe Linien benutzt. Wenn die Grundvielecke einspringende Ecken haben, kann sich das Ergebnis noch mannigfaltiger gestalten Insbesondere konnen dann mehr als zwei Doppelpunkte vorkommen.

156. Durchdringung von Pyramiden und Prismen. Wird die Pyramidenspitze S_1 ins Unendlichferne verlegt, so wird aus der ersten Pyramide ein Prisma, es ist in Fig. 228 durch eine zur Grundebene parallele Ebene begrenzt Da jetzt S_1 der unendlichferne Punkt der Geraden T_1T_2 sein muß, hat man T_1T_2 parallel zur Richtung des Prismas anzunehmen. Im übrigen gilt alles in voriger Nummer Gesagte auch hier, indem wieder die Hilfsebene um die Gerade T_1T_2 herumzupendeln hat Das Prisma ist in Fig. 228 hohl und ohne Endflache angenommen worden

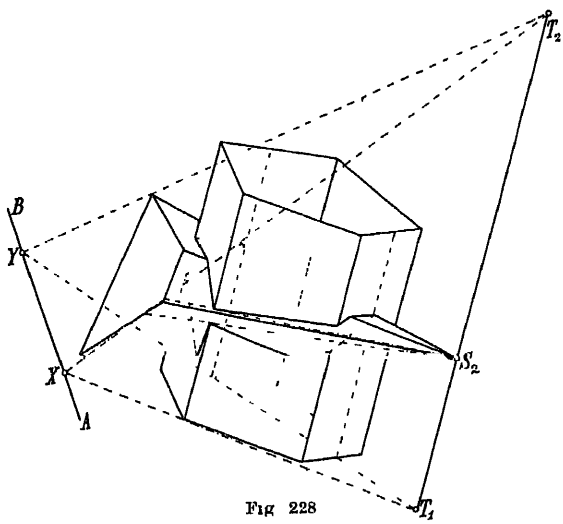


Fig 228

In dem Sonderfall, wo beide Pyramiden Prismen werden, vereinfacht sich das Pendeln. Handelt es sich namlich um die Durchdringung zweier Prismen, siehe Fig. 229, so liegen beide Spitzen S_1 und S_2 unendlich fern, da die Prismen als Pyramiden mit unendlich fernen Spitzen zu betrachten sind. Demnach liegt die Gerade S_1S_2 unendlich fern, also auch T_1 und T_2. Anstelle der Punkte T_1 und T_2 sind deshalb jetzt in den Grundebenen die Richtungen anzugeben, in denen diese Punkte im Unendlichfernen zu suchen sind Da alle Hilfsebenen die unendlich ferne Gerade T_1T_2 gemein haben, bilden sie eine Schar von parallelen Ebenen Folglich sind jetzt die Hilfslinien in jeder der beiden Grundebenen parallele Geraden Das Pendeln der Hilfsebene ist also durch ein Verschieben der Hilfsebene zu

ersetzen. Aber im übrigen gelten auch hier die Betrachtungen der vorigen Nummer. Das erste Prisma ist in Fig. 229 hohl gedacht und ohne Endfläche.

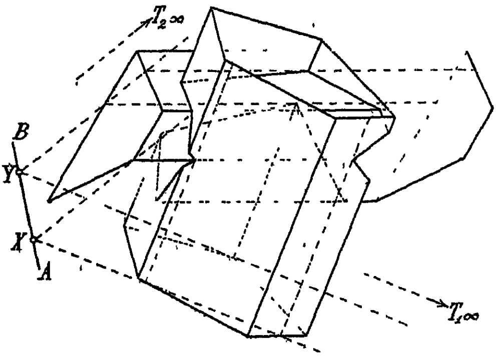


Fig. 220

Schließlich ist noch zu bemerken: Der Schnittpunkt T_1 oder T_2 der Geraden $S_1 S_2$ mit E_1 oder E_2 kann auch im Falle zweier Pyramiden unendlich fern angenommen werden, denn man darf ja annehmen, daß die Gerade $S_1 S_2$ zufällig zur Grundebene einer der beiden Pyramiden parallel sei.

157. Allgemeine Kegel und Zylinder. Spricht man in der Geometrie schlechtweg von einem Kegel, so ist eine Kegelfläche, kein Kegelkörper gemeint. Eine Kegelfläche oder ein Kegelmantel ist der Inbegriff aller Geraden g, die durch einen bestimmten Punkt S, die Kegelspitze oder den Kegelscheitel, gehen und eine bestimmte, aber willkürlich wählbare krumme Linie l, die Leitkurve, schneiden. Diese Leitkurve braucht keine ebene Kurve zu sein. Da die Geraden g, die man die Erzeugenden oder Mantellinien nennt, unbegrenzt sind, auch über S hinaus, gilt dasselbe vom Kegel. Sein Mantel besteht also aus zwei ins Unendliche gehenden Teilen, die in S zusammenstoßen. Beschränkt man sich auf den einen Teil, so wird der andere der Scheitelkegel genannt. Schließt sich die Leitkurve l, so heißt auch die Kegelfläche geschlossen, obwohl sie sich über l hinaus bis ins Unendliche erstreckt. Wenn eine von S aus gezogene Gerade g die Leitkurve in mehr als einem Punkte schneidet, durchsetzt die Kegelfläche sich selbst längs dieser Geraden. Denselben Dienst wie die Leitkurve verrichtet jede andere willkürlich auf dem Kegelmantel gezogene Kurve, vorausgesetzt, daß sie alle Mantellinien trifft. Insbesondere kann man also auch annehmen, die Leitkurve sei eben, nämlich der Schnitt des Mantels mit irgendeiner die Spitze S nicht enthaltenden Ebene. Ist die Schnittebene zu einer Mantellinie parallel, so erstreckt sich diese ebene Leitkurve bis ins Unendliche, und dies kann auch mehrfach vorkommen. Es gibt übrigens geschlossene Kegelmantel, deren ebene Schnitte ohne Ausnahme ins Unendliche gehen.

Wir wollen uns jetzt auf die Annahme beschränken, daß eine geschlossene Kegelfläche eine völlig im Endlichen verlaufende ebene Schnittkurve k habe. Begrenzt man den Kegel durch die Ebene dieser Kurve, so wird k die Grundkurve genannt. Wenn sich diese Kurve k nicht selbst schneidet, kommt ihr ein inneres ebenes Flächenstück zu. Dann kann man auch vom Innern des Kegels sprechen; er bildet einen Kegelkörper. Besonders wichtig sind die elliptischen Kegel, d. h. diejenigen, deren Grundkurven k Ellipsen sind. Wir werden uns mit ihnen später eingehend beschäftigen und sie auch sonst als Beispiele benutzen. Um so mehr muß betont werden, daß der Kegelbegriff bedeutend allgemeiner als der Begriff des elliptischen Kegels

ist, da man als Grundkurve oder Leitkurve irgendeine krumme Linie wählen darf. Wird als Leitkurve eine Gerade benutzt, so entsteht bloß eine Ebene.

Parallele Ebenen schneiden den Kegelmantel in ähnlichen und ähnlich gelegenen Kurven, der Ähnlichkeitspunkt ist die Kegelspitze.

Sind P_1 und P_2 benachbarte Punkte der Grundkurve k, so sind die von S nach P_1 und P_2 gehenden Erzeugenden g_1 und g_2 benachbarte Mantellinien. Alle Geraden, die Punkte von g_1 mit benachbarten Punkten von g_2 verbinden, liegen in der Ebene (g_1, g_2), sie sind solche Sekanten des Kegelmantels, die den Mantel in zwei benachbarten Punkten treffen. Sie gehen in Tangenten des Kegelmantels über, wenn die Schnittpunkte unendlich benachbart werden, d h wenn g_1 und g_2 oder also P_1 und P_2 unendlich benachbart werden. Dann aber wird aus der Sekante $P_1 P_2$ eine Tangente der Grundkurve k (Nr 79), und die Ebene von g_1 und g_2 geht in eine Ebene über, die eine Mantellinie g sowie die Tangente p desjenigen Punktes P der Grundkurve k enthält, in dem diese Mantellinie die Grundkurve schneidet Da die Ebene (g, p) alle diejenigen Tangenten des Kegelmantels enthält, die den Kegel in Punkten der Erzeugenden g berühren, heißt sie die Tangentialebene des Kegels längs der Mantellinie g. Man kann auch sagen In allen Punkten einer und derselben Mantellinie g hat der Kegel dieselbe Tangentialebene, oder auch Jede Tangentialebene berührt den Kegel in allen Punkten einer Mantellinie. Alle Tangentialebenen des Kegels gehen durch seine Spitze

Verlegt man die Spitze S des Kegels ins Unendlichferne, d h gibt man statt ihrer eine Richtung im Raum an, so wird aus dem allgemeinen Kegel ein allgemeiner Zylinder Alle Erzeugenden oder Mantellinien des Zylinders sind einander parallel Ihre Richtung heißt die Richtung des Zylinders Parallele Ebenen, die nicht zur Zylinderrichtung parallel sind, schneiden den Zylinder in kongruenten Kurven, die durch Verschieben in der Zylinderrichtung ineinander übergehen Man stellt Zylinderkörper meistens her, indem man dabei zwei parallele Begrenzungsebenen benutzt. Unter den Zylindern sind wieder die elliptischen Zylinder besonders wichtig. Aber auch hier muß betont werden, daß der Zylinderbegriff bedeutend allgemeiner als der des elliptischen Zylinders ist. Auch sonst gilt das vom allgemeinen Kegel Gesagte in entsprechender Weise für den allgemeinen Zylinder Insbesondere sind alle Tangentialebenen des Zylinders zur Zylinderrichtung parallel

Der Begriff des allgemeinen Kegels und insbesondere der des allgemeinen Zylinders gestattet die freie Parallelprojektion Man kann nämlich jeden Kegel als eine Pyramide und jeden Zylinder als ein Prisma betrachten, in dem das Grundvieleck durch eine krumme Linie ersetzt ist.

158. Durchdringung von Kegeln und Zylindern. Infolge der letzten Bemerkung kann man die Aufgabe, die Durchdringung zweier Kegel in freier Parallelprojektion zu zeichnen, geradeso behandeln wie die der Durchdringung zweier Pyramiden in Nr. 155: Man nimmt an,

daß sich die Grundebenen der beiden Kegel in einer Geraden AB schneiden und daß die beiden Kegelspitzen S_1 und S_2 auf einer Geraden liegen, die jene Grundebenen in T_1 und T_2 trifft, siehe Fig 230, wo als Grundkurven Ellipsen gewahlt worden sind Da die Durchdringungslinie jetzt nicht eine gebrochene Linie, sondern eine Kurve ist, die übrigens im allgemeinen nicht eben zu sein braucht, kann man als Hilfsebene durch T_1T_2 jede Ebene verwenden, die beide Grundkurven trifft. Die Ermittlung der Durchdringungspunkte geschieht dann wie in Nr. 155.

Man wird aber insbesondere gewisse ausgezeichnete Punkte der Durchdringungslinie bestimmen, namlich zweierlei Arten

Erstens kommen diejenigen Punkte in Betracht, die den äußersten Pendelebenen angehören, also in Fig. 230 den Ebenen T_1XT_2 und T_1YT_2. Im Falle der Figur liegen zwei Bogenstucke der ersten Grundkurve außerhalb des von diesen beiden Ebenen begrenzten Raumes Zu ihnen gehören zwei Streifen des ersten Kegelmantels, die ganzlich von der Durchdringungslinie frei sind Erst die Rander dieser Streifen, also gewisse vier Mantellinien des ersten Kegels, haben Punkte mit dem zweiten Mantel gemein, und daraus folgt, daß die Durchdringungskurve, weil sie eben diese Mantellinien nicht uberschreitet, an den betreffenden vier Stellen diese vier Mantellinien berührt Folglich haben die mit *1*, *4*, *7*, *10* bezeichneten Punkte als Tangenten die durch sie gehenden Mantellinien des ersten Kegels.

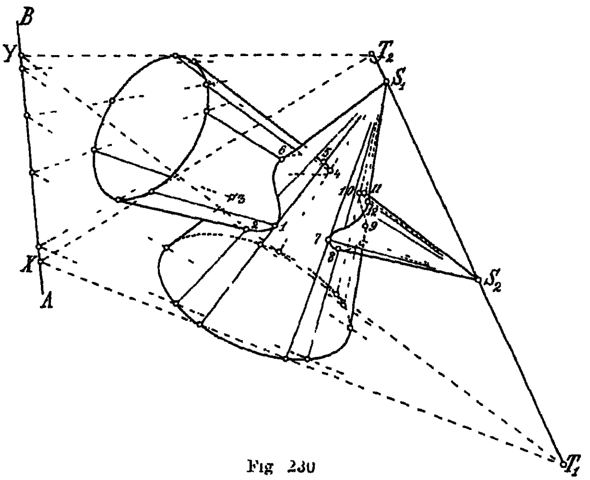


Fig 230

Zweitens kommen für die Zeichnung noch diejenigen Punkte in Betracht, die auf den Umrißmantellinien gelegen sind. Dies sind einerseits die Punkte *3*, *6*, *9*, *12* auf dem Umriß des ersten Kegels und andererseits die Punkte *2*, *5*, *8*, *11* auf dem Umriß des zweiten Kegels. Weil die Durchdringungskurve in der Projektion die Umrißmantellinien nicht uberschreiten kann, erhellt, daß die Umrißmantellinien in jenen Punkten die Tangenten der Projektion der Durchdringungskurve sind

Insgesamt ergeben sich so im Falle der Fig. 230 zwolf besonders ausgezeichnete Punkte des Bildes der Durchdringungskurve nebst ihren Tangenten. Sie reichen im allgemeinen zum Ausziehen der Kurve mittels des Kurvenlineals aus Aber man kann immer noch Punkte dazwischen einschalten, indem man andere Hilfsebenen durch T_1T_2 verwendet. In Fig 230 ist der zweite Kegel hohl und ohne Grundflache gedacht

Ein Umstand muß erwahnt werden· Die Umrißmantellinien sind zwar die Tangenten der Durchdringungskurve in den auf

ihnen gelegenen Punkten, aber nur in der Zeichnung, nicht in Wirklichkeit. Die Sache liegt so. Die Tangente, die der Durchdringungskurve z. B. im Punkte *2* zukommt, liegt mit der Umrißmantellinie des zweiten Kegels, die durch *2* geht, in einer Tangentialebene des zweiten Kegels, die zur Richtung derjenigen Projektion parallel ist, durch die das Bild in Fig. 230 entsteht. Deshalb erscheint diese Ebene im Bilde als Gerade, und nur infolge dieses Umstandes deckt sich die Tangente von *2* in der Zeichnung mit der Umrißmantellinie.

Wie man die Tangente für irgendeinen Punkt der Durchdringungskurve ermitteln kann, zeigt Fig. 231 für den Punkt P. In dieser Figur sind nur Stücke der Kegel dargestellt. Die Hilfsebene durch $T_1 T_2$, in der P liegt, schneidet die Grundkurven in P_1 und P_2, und es sind p_1 und p_2 die Tangenten der Grundkurven in P_1 und P_2. Alle Geraden, die in P den ersten Kegel berühren, liegen in der diesen Kegel längs der Mantellinie $S_1 P P_1$ berührenden Ebene, und alle Geraden, die in P den zweiten Kegel berühren, liegen in der diesen Kegel längs der Mantellinie $S_2 P P_2$ berührenden Ebene. Da die Durchdringungskurve beiden Kegeln angehört, ist demnach ihre Tangente p in P die Schnittgerade dieser beiden Tangentialebenen. Wir finden sie so: Die Tangentialebene des ersten Kegels ist die Ebene der Mantellinie $S_1 P_1$ und der Tangente p_1 der Grundkurve, die Tangentialebene des zweiten Kegels die Ebene der Mantellinie $S_2 P_2$ und der Tangente p_2 der Grundkurve. Da nun $S_1 P_1$ die zweite Grundebene E_2 in einem Punkte R_2 auf $P_2 T_2$ und p_1 die Ebene E_2 in einem Punkte V_1 auf AB schneidet, trifft die erste Tangentialebene die Ebene E_2 in der Geraden $R_2 V_1$. Die zweite Tangentialebene trifft dieselbe Ebene E_2 in p_2. Mithin ist der Schnittpunkt U_2 von $R_2 V_1$ und p_2 ein gemeinsamer Punkt beider Tangentialebenen. Ganz entsprechend ergibt sich in der ersten Grundebene E_1 der gemeinsame Punkt U_1. Die gesuchte Tangente p von P geht somit durch U_1 und U_2.

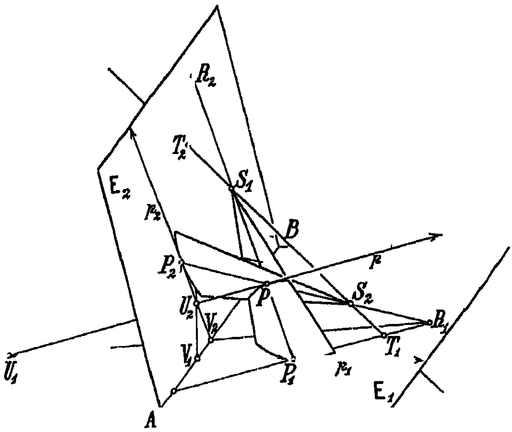


Fig. 231

Wenn man dies Verfahren z. B. auf den Punkt *2* in Fig. 230 anwendet, wird das oben Gesagte bestätigt. Die Tangente der Durchdringungskurve im Punkte *2* ist in Wahrheit von der Umrißmantellinie von *2* nach S_2 verschieden, deckt sich aber mit ihr in der Zeichnung.

In Fig. 230 liegt der Fall vor, wo der zweite Kegel den ersten vollständig durchdringt. Durch eine leichte Abänderung der Lage der Punkte T_1 und T_2 kann man wie in Nr. 155 erreichen, daß statt dessen bloß ein Anschneiden beider Kegel eintritt. Alsdann wird nur eine Durchdringungskurve statt der beiden Kurven in Fig. 230 vorkommen. Der Fall des Doppelpunktes ergibt sich entsprechend Nr. 155, wenn die Ebene $T_1 X T_2$ oder die Ebene $T_1 Y T_2$ beide Grund-

kurven berührt, d. h. Die Durchdringungskurve zweier Kegel weist Doppelpunkte in solchen Ebenen auf, die gemeinsame Tangentialebenen beider Kegel sind. Dies ist in Fig. 232 erläutert, wo der Punkt P ein Doppelpunkt ist und wieder nur Stücke der Kegelmantel dargestellt sind. Wie sich die Durchdringungskurve in P selbst durchsetzt, erkennt man so: Dreht man die Pendelebene um $T_1 T_2$ und durchlauft man dabei die beiden Grundkurven im Sinne von *1* nach *2*, so gehen die aufeinanderfolgenden Punkte *1*, P, *2* eines Kurvenzweiges hervor. Durchlauft man dagegen die beiden Grundkurven im Sinne von *I* nach *II*, so gehen die aufeinanderfolgenden Punkte *I*, P, *II* eines anderen Kurvenzweiges hervor. Die in Fig. 231 angegebene Tangentenkonstruktion für P versagt, falls P ein Doppelpunkt ist, weil dann beide Tangenten p_1 und p_2 von P_1 und P_2 in der Pendelebene gelegen sind. In der Tat hangt die Bestimmung der beiden Tangenten, die den durch den Doppelpunkt P gehenden Kurvenzweigen zukommen, nicht nur von den Tangenten der Grundkurven in P_1 und P_2 ab, sondern auch davon, wie die Grundkurven in P_1 und P_2 gekrummt sind. Deshalb gehen wir hierauf nicht naher ein.

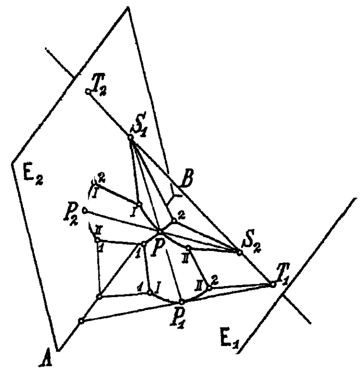


Fig. 232.

Was in Nr. 156 für den Fall der Durchdringung einer Pyramide mit einem Prisma oder eines Prismas mit einem zweiten Prisma gesagt wurde, gilt entsprechend auch fur den Fall der Durchdringung eines Kegels mit einem Zylinder oder eines Zylinders mit einem zweiten Zylinder. Im Fall der Durchdringung zweier Zylinder also tritt an die Stelle des Drehens der Pendelebene um $T_1 T_2$ ein Parallelverschieben der Hilfsebene. In Nr. 140 wurde die Durchdringung zweier elliptischer Zylinder in ebenen Kurven besprochen. Damals ergab sich, daß zwei elliptische Zylinder, sobald ihnen zwei gemeinsame und deshalb zueinander parallele Tangentialebenen zukommen, zwei Ellipsen gemein haben, die sich in zwei Punkten schneiden. Diese beiden Punkte sind also die Doppelpunkte der Durchdringung, und dies steht mit der oben über das Auftreten von Doppelpunkten gemachten Bemerkung im Einklange.

159. Übungen. Die folgenden Aufgaben sollen in beliebiger Parallelprojektion gelost werden.

1) Gegeben eine Pyramide mit mehr als drei Kanten und drei Punkte P, Q, R auf drei nicht unmittelbar aufeinanderfolgenden Kanten der Pyramide. Gesucht der vollstandige Schnitt der Pyramide mit der Ebene PQR (Nr. 148).

2) Dieselbe Aufgabe fur den Fall eines Prismas statt einer Pyramide.

3) Gegeben eine Pyramide und drei Punkte P, Q, R auf irgendwelchen Seitenflächen der Pyramide. Gesucht der vollständige Schnitt der Ebene PQR mit der Pyramide. Als Hilfsebene dient die durch die Spitze und zwei der drei Punkte.

4) Gegeben ein Vierflach $ABCD$, zwei Punkte P und Q im Raum sowie der Punkt U, in dem die Gerade AP die Ebene BCD schneidet, und der Punkt V, in dem die Gerade BQ die Ebene ACD schneidet. Gesucht die Schnittpunkte der Geraden PQ mit allen vier Ebenen des Vierflachs Man bestimme zunachst, wo AQ die Ebene BCD trifft, indem man die Hilfsebene ABQ benutzt.

5) Gegeben die Schnittgerade s zweier Ebenen E_1 und E_2 und je zwei Punkte A_1, B_1 und A_2, B_2 in jeder der beiden Ebenen. Auf den Geraden A_1A_2 und B_1B_2 ist je ein Punkt P, Q angegeben. Wo schneidet die Gerade PQ die Ebenen E_1 und E_2? Als Hilfsebene benutze man die Ebene $A_1A_2B_1$, in der B_1P liegt.

6) Zwei Ebenen E_1 und E_2 sind durch Parallelogramme gegeben, die eine Seite s gemein haben In E_1 sind zwei Punkte A_1, B_1 und in E_2 zwei Punkte A_2, B_2 gegeben Ferner sind durch zwei Punkte S_1 und S_2 von s die Parallelen a und b zu A_1A_2 und B_1B_2 gezogen. Die Geraden a und b werden dann im allgemeinen windschief sein. Wird nun irgendein Punkt P_1 in E_1 angenommen, so gibt es nur eine Gerade g von P_1 aus, die a und b schneidet. Ihr Schnittpunkt P_2 mit E_2 soll bestimmt werden. Die Gerade g muß in den Ebenen (P_1, a) und (P_1, b) liegen Man ermittelt daher, wo diese Ebenen die Ebene E_2 schneiden. Dabei bediene man sich der zu den Ebenen (P_1, a) und (P_1, b) parallelen Hilfsebenen durch A_1A_2 und B_1B_2.

7) Aus einem Spat wird wie in Fig 208 von Nr 147 durch Einkeilen ein neuer Körper hergestellt Eine Ecke des Keils werfe auf eine Ebene des Korpers einen gegebenen Schatten Gesucht alle Schatten

8) Eine Pyramide wird durch eine Gerade durchbohrt, deren Schnittpunkte P, Q mit zwei Seitenflachen der Pyramide gegeben seien Ferner sei der Schatten gegeben, den die Spitze der Pyramide auf die Ebene ihrer Grundflache wirft Gesucht der Schatten, den die Gerade auf die Pyramide wirft Zuerst bestimme man die Schatten, die von den Geraden von der Spitze nach P und Q auf die Grundebene geworfen werden

9) Ein Spat sei gegeben und eine Flache des Spates als die Grundflache bezeichnet Das gegenuberliegende Parallelogramm werde in seiner Ebene ohne Drehung in eine neue Lage verschoben. Dann werde der Spat hergestellt, der dieselbe Grundflache und diese neue Endflache hat Gesucht die Durchdringung beider Spate

§ 6. Grundlagen der allgemeinen Axonometrie.

160. Satz von Pohlke. Wenn von einem Vierflach eine Parallelprojektion 𝔄𝔅ℭ𝔇 wie in Fig 233 links vorliegt, sind Gestalt, Größe und Lage des Vierflachs noch in hohem Maße willkurlich, denn man kann die Richtung der Projektion beliebig annehmen und die Ecken des Vierflachs auf den nach 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 gehenden projizierenden Strahlen irgendwo wahlen. Es fragt sich nun, o b e s u n t e r a l l e n s o h e r s t e l l b a r e n V i e r f l a c h e n e i n e s v o n v o r g e s c h r i e b e n e r G e s t a l t g i b t. Man kann die Frage auch so fassen: L ä ß t s i c h e i n g e g e b e n e s s t a r r e s V i e r f l a c h $ABCD$ i n e i n e s o l c h e L a g e z u r T a f e l b r i n g e n, d a ß s e i n B i l d b e i g e e i g n e t e r P a r a l l e l p r o j e k t i o n d e m g e g e b e n e n e b e n e n V i e r e c k 𝔄𝔅ℭ𝔇 a h n l i c h w i r d? Dabei soll vorausgesetzt werden, daß das gegebene starre Vierflach $ABCD$

ein wirklich raumliches Gebilde sei, d. h. daß AB und CD zueinander windschiefe Geraden seien. Allerdings können wir es in Fig. 233 rechts nur durch eine Abbildung in Parallelprojektion veranschaulichen. Man denke sich statt ihrer ein wirkliches Vierflach $ABCD$ im Raum

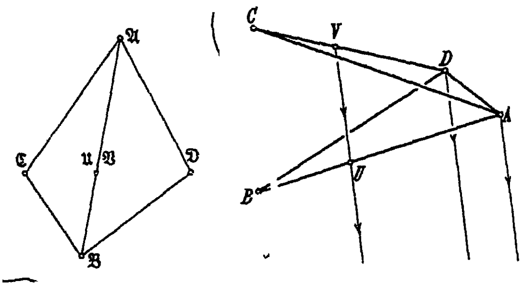


Fig 233

Der Schnittpunkt von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ sei mit $\mathfrak{U}$ oder $\mathfrak{V}$ bezeichnet, je nachdem er als Punkt von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ oder von $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ aufgefaßt wird. Nun werde U auf AB und V auf CD so gewahlt, daß die Teilverhaltnisse dieselben wie im gegebenen Bilde $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ sind, d. h. es sei

$$AU : BU = \mathfrak{A}\mathfrak{U} : \mathfrak{B}\mathfrak{U}, \qquad CV : DV = \mathfrak{C}\mathfrak{V} : \mathfrak{D}\mathfrak{V}$$

Da $\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{V}$ zusammenliegt, muß die gewünschte Projektion des Vierflachs $ABCD$ so stattfinden, daß U und V dasselbe Bild bekommen, d. h UV muß die Richtung der Projektion haben. Hiermit ist die Lage der Projektionsrichtung zum Vierflach $ABCD$ festgestellt. Die durch A, B, C, D parallel zu UV zu ziehenden projizierenden Strahlen sind nun die Kanten eines prismatischen Raumes. Jede nicht zu UV parallele Ebene schneidet sie in den Ecken eines Vierecks, dessen Diagonalen einander so teilen, wie es die in der ebenen Figur $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ tun, insbesondere gilt dies von einer zu UV senkrechten Ebene E. Sie schneide die Kanten des Prismas in A', B', C', D'. Dann ist $A'B'C'D'$ die senkrechte Projektion des gegebenen Vierflachs $ABCD$ auf die Ebene E, und die Diagonalen $A'B'$ und $C'D'$ teilen einander in denselben Verhaltnissen wie die Diagonalen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ Nach Nr. 97 aber ist ein vorliegendes ebenes Viereck $A'B'C'D$ stets die senkrechte Projektion eines zu $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ ahnlichen Vierecks, sobald die Teilverhaltnisse der Diagonalen in beiden Vierecken übereinstimmen Demnach gibt es eine Ebene T, die die Kanten des Prismas in einem dem Viereck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ ahnlichen Viereck schneidet Dies Viereck in der Ebene T ist aber die Projektion des Vierflachs $ABCD$ auf die Tafel T in der durch UV angegebenen Richtung. Damit ist das Gewünschte erreicht.

Diese Beweisführung wird hinfallig, wenn sich die Gerade UV nicht konstruieren laßt Weil AB nach Voraussetzung zu CD windschief ist, kann U nie mit V zusammenliegen. Mithin wird die Konstruktion von UV nur dann unbestimmt, wenn entweder das Teilverhaltnis $\mathfrak{A}\mathfrak{U} : \mathfrak{B}\mathfrak{U}$ oder das Teilverhaltnis $\mathfrak{C}\mathfrak{V} : \mathfrak{D}\mathfrak{V}$ oder der Schnitt von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ unbestimmt wird. Der letzte Fall kommt nur dann vor, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ in einer Geraden liegen und dies wollen wir ausdrücklich ausschließen. Die beiden anderen Ausnahmefalle sind leicht zu erledigen. Das Teilverhaltnis $\mathfrak{A}\mathfrak{U} : \mathfrak{B}\mathfrak{U}$ wird unbestimmt, wenn $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}$ zusammenliegt. Dann wahlen wir die Richtung der Projektion als die von AB. An die Stelle des vierkantigen Prismas tritt jetzt ein dreikantiges, und nach Nr. 97 laßt es sich durch eine Ebene T so schneiden, daß der Schnitt

dem Dreieck $\mathfrak{ACD}$ ähnlich wird. Entsprechendes gilt, wenn das Teilverhältnis $\mathfrak{CB} : \mathfrak{DB}$ unbestimmt wird, d. h. wenn $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{D}$ zusammenfällt. Somit gilt der

Satz von Pohlke. Ein gegebenes ebenes Viereck, dessen Ecken nicht sämtlich auf einer Geraden liegen, läßt sich stets als eine Parallelprojektion eines nicht-ebenen Vierflachs von gegebener Gestalt erzeugen.

Anmerkung. Karl Wilh Pohlke gelangte um das Jahr 1853 herum zu seinem Satz in einer nur anscheinend weniger allgemeinen Fassung, die in der nächsten Nummer angegeben werden wird Er veröffentlichte den Satz ohne Beweis in seinem bei Nr. 62 genannten Lehrbuch: „Darstellende Geometrie", 1 Abt. Berlin 1860, S 113, und bemerkte dabei. „Der Beweis dieses Satzes scheint nicht elementar geführt werden zu können, wir behalten ihn für die zweite Abteilung vor" Durch Vermittlung von Jak Steiner (Nr 5) lernte Johann Wolfgang von Deschwanden (geb 1819 zu Stanz in Unterwalden, erster Direktor des eidgenössischen Polytechnikums zu Zürich, gest 1866 in Zürich) den Satz kennen Er glaubte, der Satz rühre von Steiner selbst her, und veröffentlichte den ersten Beweis in der Abhandlung „Anwendung schiefer Parallelprojektionen zu axonometrischen Zeichnungen", Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 6 Jahrgang 1861, S 254—284 (eigentlich zwei Seiten mehr, da nach S 275 noch einmal S 274, 275 kommt) Der Beweis von Deschwanden ist richtig, läßt aber zu wünschen übrig Denn Deschwanden konnte zwar beweisen, daß die Projektion immer möglich sei, vermochte aber die Lage der Tafel zur Projektionsrichtung nur durch ein Näherungsverfahren zu bestimmen, das zwar für den Beweis ausreicht, nicht aber für die Durchführung der Konstruktion Alsdann versuchte Herm Kinkelin (geb 1832, Mathematiklehrer in Bern, gest 1913 als Professor an der Universität Basel) einen Beweis in der Abhandlung „Die schiefe axonometrische Projektion", a a O 6 Jahrg 1861, S 358—367, jedoch beging er (auf S 363) einen Fehler, indem er gewisse Winkel verwechselte Dagegen gab Hermann Amandus Schwarz (Nr 92) im Jahre 1864 einen Beweis, der auch hinsichtlich der Konstruktion völlig erschöpfend war, siehe „Elementarer Beweis des Pohlkeschen Fundamentalsatzes der Axonometrie", Journ f d i u ang Math 63 Bd 1864, S 309—314 (abgedruckt in seinen „Gesammelten mathematischen Abhandlungen", 2 Bd Berlin 1890, S 1—7) Der von uns gegebene Beweis ist im wesentlichen der von Schwarz In die 2 Auflage seiner „Darstellenden Geometrie", 1 Abt., Berlin 1866, nahm Pohlke den Beweis von Schwarz auf (S 113—115), er brauchte deshalb auch nicht, wie er früher angekündigt hatte, seinen eigenen Beweis, bei dem er Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung benutzte, in der 2 Abteilung zu veröffentlichen, die übrigens erst 1876 herauskam Eine Zusammenstellung und Besprechung der vielen späteren Beweise gab Eugen Wendling in der Schrift „Der Fundamentalsatz der Axonometrie", Zürich 1912, die jedoch noch Lücken hat

161. Der Pohlkesche Satz in engerer Fassung. Das gegebene starre Vierflach $ABCD$ sei insbesondere so beschaffen, daß die drei von D ausgehenden Kanten DA, DB, DC gleichlang und zueinander senkrecht sind. Sie bilden dann ein rechtwinkliges Achsenkreuz mit gleichlangen Achsen (Nr. 53), und wir nennen deshalb die Ecken jetzt wie früher O, X, Y, Z. Das auf der Tafel gegebene Viereck sei entsprechend mit $\mathfrak{OXYZ}$ bezeichnet. Nunmehr ergibt sich aus dem Satz der vorhergehenden Nummer:

Drei auf der Tafel gegebene und von einem Punkt $\mathfrak{O}$ ausgehende Strecken $\mathfrak{OX}$, $\mathfrak{OY}$, $\mathfrak{OZ}$ sind, falls nicht alle vier Punkte $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ in einer Geraden liegen, stets eine Parallelprojektion eines rechtwinkligen Achsenkreuzes mit gleichlangen Achsen.

Dies ist der eigentliche Pohlkesche Satz; man kann ihn den Pohlkeschen Satz in der engeren Fassung nennen. Aber man hat auch das Recht, den Satz der vorigen Nummer als den Pohlkeschen Satz zu bezeichnen, weil tatsächlich der Satz in der engeren Fassung

den in der weiteren Fassung nach sich zieht. Man nehm nämlich im Raum außer einem nicht-ebenen starren Vierflach ABCl ein starres Vierflach $OXYZ$ an, in dem OX, OY, OZ gleich lang un zueinander senkrecht sind, und setze beide so ineinander, daß O mi D, X mit A zusammenfallt und Y in der Ebene ABC liegt. Dann kan man entweder $ABCD$ als Bezugsvierflach fur $OXYZ$ oder aber OXY als Bezugsvierflach für $ABCD$ wie in Nr. 146 benutzen, d. h. durc das Ziehen geeigneter Verbindender und Verwerten der entstehende Teilverhaltnisse die Lage der Ecken des einen Vierflachs gegenüber dene des anderen Vierflachs vollkommen festlegen Indem man die ent sprechenden Geraden auf der Tafel beim vorgelegten ebenen Vierec $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ zieht und dieselben Teilverhaltnisse benutzt, bekommt man ent sprechende Punkte $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, wobei insbesondere $\mathfrak{O}$ mit $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{X}$ mit $\mathfrak{A}$ zusammenfallt. Man erkennt dann leicht, daß, sobald $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ nich in gerader Linie liegen, auch $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ nicht in gerader Linie liegen Nach dem Pohlkeschen Satz in der engeren Fassung laßt sich nun da Vierflach $OXYZ$ so projizieren, daß sein Bild dem Viereck $\mathfrak{O}\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ ahn lich wird Wegen der Beziehung zwischen den beiden Vierflachen folgt daraus, daß das Bild des Vierflachs $ABCD$ bei derselben Projektion dem gegebenen Viereck $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ ähnlich ist, so daß man damit zu dem Satz der vorigen Nummer zurückkommt.

Anmerkung Pohlke selbst unterließ bei der Formulierung seines Satzes (siehe die Anmerkung zu Nr 160) die Angabe der Bedingung, daß $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ nicht samtlich in einer Geraden liegen sollen Den Einwand, daß der Satz nicht mehr richtig sei, wenn $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ in einer Geraden liegen, machte von Deschwanden in einem Gesprach mit Jak Steiner Vgl den Bericht daruber bei H A Schwarz a a O Auf die richtige Auffassung dieses Ausnahmefalles kommen wir in Nr 163 zuruck

***162. Anderer Beweis des Pohlkeschen Satzes**[1]. Der Pohlkesche Satz in der engeren Fassung laßt sich auch so beweisen. Sind auf der Tafel T vier nicht samtlich in gerader Linie gelegene Punkte $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ gegeben, so ist die Momentenellipse von $\mathfrak{O}$ in bezug auf die Punktgruppe $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ eine nicht ausgeartete Ellipse, die man nach Nr. 101 oder 143 zeichnen kann Diese Ellipse laßt sich wie jede Ellipse nach Nr 73 auf eine Ebene E derart senkrecht projizieren, daß ihr Bild ein Kreis k wird Die dabei hervorgehenden Bilder von $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ seien mit $\mathfrak{O}'$, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ bezeichnet Nach Nr. 142 ist nun der Kreis k die Momentenellipse von $\mathfrak{O}'$ in bezug auf die Punktgruppe $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$. Nach einem in Nr 98 gewonnenen Satz ist daher $\mathfrak{O}'\mathfrak{X}'\mathfrak{Y}'\mathfrak{Z}'$ die senkrechte Projektion eines gewissen rechtwinkligen Achsenkreuzes mit gleichlangen Achsen OX, OY, OZ, die gleich dem Radius des Kreises sind. Da nun die Strahlen, die $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ senkrecht auf E nach $\mathfrak{O}'$, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ projizieren, dieselben sind wie diejenigen, die O, X, Y, Z senkrecht auf E nach $\mathfrak{O}'$, $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ projizieren, so erhellt, daß das Achsenkreuz OX, OY, OZ so liegt, daß $\mathfrak{O}\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ eine schiefe Parallelprojektion davon auf die Tafel T ist. Damit aber ist der Beweis geführt.

Anmerkung Dieser Beweis ruhrt her von K Heuman, siehe seine bei Nr. 98 genannte Abhandlung von 1905

***163. Konstruktion zum Pohlkeschen Satz.** Sowohl nach Nr. 160 als auch nach Nr. 162 kann man die Projektionsrichtung sowie die Lage

[1]) Die mit Sternchen versehenen Nummern sind uberschlagbar.

des Vierseits bzw. Achsenkreuzes zeichnerisch ermitteln. Besonders anschaulich wird die Konstruktion auf Grund von Nr. 162, **wenn man die zu bestimmende Projektionsrichtung als Lichtrichtung auffaßt und noch eine schattenwerfende Kugel als Hilfsmittel einführt**, wie es im folgenden geschieht.

In Fig. 234 sind $\mathfrak{O}\mathfrak{X}$, $\mathfrak{O}\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{O}\mathfrak{Z}$ die drei auf der Tafel gegebenen Strecken, und aus ihnen ist nach Nr. 143 die Momentenellipse des Punktes $\mathfrak{O}$ in bezug auf die Gruppe der drei Punkte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ durch Benutzung einer Affinität gewonnen worden, wobei die Verbindende von $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ die Affinitätsachse s ist. Der zu $\mathfrak{O}$ affine Punkt $\overline{\mathfrak{O}}$ wird dabei so gewählt, daß $\mathfrak{X}\overline{\mathfrak{O}}\mathfrak{Y}$ ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ ist, indem alsdann der zu $\mathfrak{Z}$ affine Punkt $\overline{\mathfrak{Z}}$ ein Brennpunkt der zur Momentenellipse affinen Ellipse ist. Da die halbe Nebenachse dieser Ellipse die Länge $\overline{\mathfrak{O}}\mathfrak{X}$ hat, findet man ihre Achsen $\overline{\mathfrak{A}}_1\overline{\mathfrak{A}}_2$ und $\overline{\mathfrak{B}}_1\overline{\mathfrak{B}}_2$ nach Nr. 75. Diesen Achsen entsprechen vermöge der Affinität konjugierte Durchmesser $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$ der Momentenellipse. Aus diesen werden die Achsen der Momentenellipse nach Nr. 85 gefunden, wie es die Drehung von $\mathfrak{O}\mathfrak{B}_1$ um $\mathfrak{O}$ durch einen rechten Winkel in die Lage $\mathfrak{O}\mathfrak{C}$ und die Benutzung des Kreises zeigt, dessen Mitte $\mathfrak{D}$ die Mitte von $\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}$ ist und der durch $\mathfrak{O}$ geht. Dieser Kreis schneidet nämlich die Gerade $\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}$ in

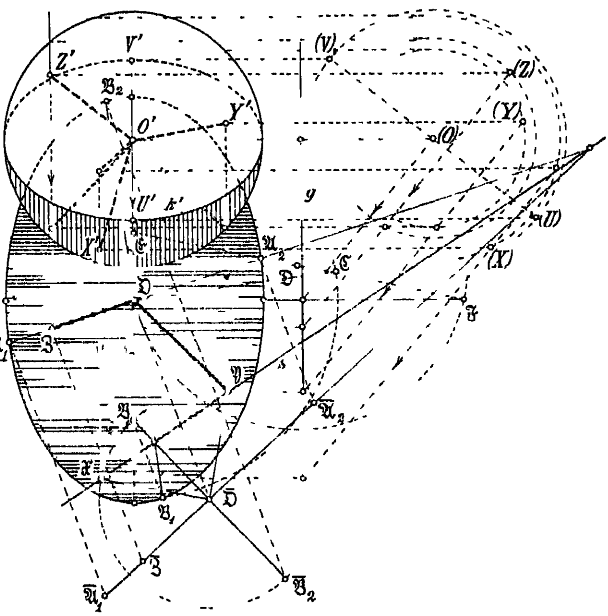


Fig. 234

Punkten $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ der Ellipsenachsen, während $\mathfrak{A}_2\mathfrak{F}$ die Länge der halben Hauptachse und $\mathfrak{A}_2\mathfrak{E}$ die der halben Nebenachse ist. Die Momentenellipse ist in Fig. 234 mit Schraffen versehen. Man kann nun nach Nr. 75 einen der Brennpunkte der Momentenellipse ermitteln, den mit O' bezeichneten Punkt. Die Momentenellipse kann nach Nr. 136 als der Umriß des Schlagschattens derjenigen Kugel aufgefaßt werden, die in O' auf der Tafel aufliegt und deren Durchmesser gleich der Nebenachse der Momentenellipse ist. Dabei wird die Lichtrichtung durch die Gerade vom Mittelpunkt O der Kugel nach dem Mittelpunkt $\mathfrak{O}$ der Ellipse angegeben. Diese Kugel, deren Umriß in Fig. 234 in senkrechter Projektion auf die Tafel dargestellt ist, benutzen wir deshalb, weil ihre Eigenschattengrenze derjenige Großkreis k der Kugel ist, dessen Ebene E zur Lichtrichtung $O\mathfrak{O}$ senkrecht ist, so daß die Momentenellipse bei ihrer senkrechten Projektion auf diese Ebene E gerade einen Kreis k liefert,

wie es in Nr. 162 verlangt wurde. In Fig. 234 ist auch diese Eigenschattengrenze k der Kugel in ihrer senkrechten Projektion auf die Tafel, namlich als die Ellipse k' dargestellt. Die Nebenachse $U'V'$ von k' ist die senkrechte Projektion desjenigen Kugeldurchmessers UV, der auf einer Fallinie der Ebene E, also senkrecht zur Lichtrichtung $O\mathfrak{O}$ liegt Man findet sie daher durch Umlegen der projizierenden Ebene von $O\mathfrak{O}$ um ihre Spurgerade $O'\mathfrak{O}$. Um die Hauptfigur nicht zu uberladen, haben wir die umgelegte Ebene seitlich verschoben, namlich die Spurgerade $O'\mathfrak{O}$ bis zu einer parallelen Geraden g in beliebigem Abstand verlegt und erst dann die Umlegung vorgenommen Nach Nr. 162 gibt es nun ein rechtwinkliges Achsenkreuz mit gleichlangen Achsen OX, OY, OZ derart, daß erstens diese Achsen gleich dem Kugelradius sind, so daß X, Y, Z auf der Kugel liegen, und daß zweitens die Projektion dieses Achsenkreuzes auf die Tafel in der Richtung $O\mathfrak{O}$ gerade das gegebene Bild $\mathfrak{O}\mathfrak{X}$, $\mathfrak{O}\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{O}\mathfrak{Z}$ liefert. Demnach findet man die senkrechten Projektionen X', Y', Z' von X, Y, Z, indem man die projizierenden Ebenen der nach $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ gehenden Lichtstrahlen mit der Kugel zum Schnitt bringt und diese Schnitte in der Umlegung um die Spurgeraden der projizierenden Ebenen zeichnet. Auch diese Umlegungen sind in Fig 234 seitlich bis zur Geraden g statt ihrer Spurgeraden verschoben worden.

Ubrigens ergibt sich außer dem Achsenkreuz $OXYZ$ noch ein zweites, da die nach $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ gehenden Lichtstrahlen die Kugel zweimal treffen Auch dieses zweite Achsenkreuz ist in Fig 234 dargestellt, doch ohne Buchstabenbezeichnung.

Anmerkung Die beiden hervorgehenden rechtwinkligen Achsenkreuze $OXYZ$ mit gleichlangen Achsen liegen so, daß das eine in das andere durch Spiegelung an der Ebene E des Kreises k ubergeht Statt des Brennpunktes O' hatte man auch den anderen Brennpunkt der Momentenellipse benutzen konnen Folglich gibt es insgesamt zwei verschiedene Projektionsrichtungen und zu jeder zwei wesentlich verschiedene rechtwinklige Achsenkreuze fur die Losung der Aufgabe des Pohlkeschen Satzes in seiner engeren Fassung Selbstredend ist die wirkliche Zeichnung der Momentenellipse sowie der Schattengrenze k' zur Losung der Aufgabe an sich nicht notig In dem Fall, wo $\mathfrak{O}$; $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ in gerader Linie liegen, artet die Momentenellipse nach Nr 102 in eine doppelt zahlende Strecke aus, indem ihre Nebenachse gleich Null wird, also auch der Kugelradius. Demnach ist der Ausnahmefall, in dem der Pohlkesche Satz nicht mehr gilt, derjenige Grenzfall, in dem die Projektionsrichtung zur Tafel parallel und zugleich die Lange der Achsen des rechtwinkligen Achsenkreuzes gleich Null wird

164. Begriff der allgemeinen Axonometrie. Die Lage eines Punktes P im Raum kann man durch seine Abstande x, y, z von drei zueinander senkrechten Ebenen festlegen. Diese Ebenen sind die Achsenebenen eines rechtwinkligen Achsenkreuzes $OXYZ$, und die Abstande x, y, z sind gleich den Strecken OP_x, OP_y, OP_z von O bis zu denjenigen Punkten P_x, P_y, P_z der Achsen, in denen die zu den Achsenebenen parallelen Ebenen durch P die x-, y- und z-Achse treffen. Die Abschnitte OP_x, OP_y, OP_z sind mit der Langeneinheit, namlich der gemeinsamen Lange von OX, OY und OZ zu messen, und zwar mit Vorzeichen. Die Abschnitte werden positiv oder negativ gerechnet, je nachdem die Punkte P_x, P_y, P_z auf derselben Seite von O liegen wie X, Y, Z oder nicht Dies ist der Begriff der sogenannten rechtwinkligen Koordinaten x, y, z im Raum. Die Größen x, y, z heißen so, weil zu irgend drei positiven oder negativen Zahlen x, y, z ein bestimmter Punkt P des

Raumes zugehört oder koordiniert ist. Liegt eine senkrechte Projektion des Achsenkreuzes $OXYZ$ vor wie in Fig. 235, entworfen nach Nr. 53, so kann man mit Hilfe des Sinusmaßstabes (Nr. 63) zu jedem gegebenen Streckentripel x, y, z die verkürzten Strecken x', y', z' und damit auch die Bilder der Punkte P_x, P_y, P_z, schließlich also auch das Bild P' des Punktes P mit den Koordinaten x, y, z ermitteln. Ist irgendein Gegenstand im Raum dadurch festgelegt worden, daß man für alle Punkte P des Gebildes die rechtwinkligen Koordinaten x, y, z angegeben hat — und dies geschieht in der analytischen Geometrie des Raumes —, so kann man hiernach die senkrechte Projektion des Gegenstandes in das Bild $O'X'Y'Z'$ des Achsenkreuzes einzeichnen. Dies Verfahren, auf das wir später (in Nr. 282 u. f.) noch einmal zurückkommen, heißt die senkrechte Axonometrie.

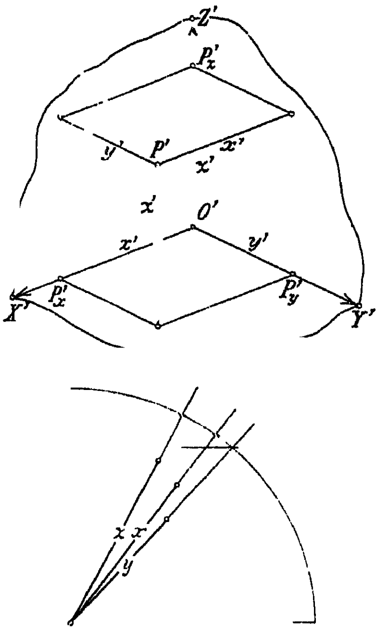


Fig. 235

Der Pohlkesche Satz in seiner engeren Fassung gestattet uns nun aber auch, von demselben Gegenstand ein Bild in allgemeiner Axonometrie zu entwerfen, d. h. eine richtige schiefe Parallelprojektion des Gebildes dadurch herzustellen, daß wir mittels der gegebenen rechtwinkligen Koordinaten x, y, z der Punkte P des Gegenstandes die Bilder $\mathfrak{P}$ dieser Punkte in ein in schiefer Parallelprojektion gegebenes Bild $\mathfrak{O}\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ des rechtwinkligen Achsenkreuzes $OXYZ$ einzeichnen. Denn nach jenem Satze dürfen wir die drei Strecken $\mathfrak{O}\mathfrak{X}$, $\mathfrak{O}\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{O}\mathfrak{Z}$ in beliebigen Richtungen und beliebig lang ziehen, siehe Fig. 236, so daß es nur noch erübrigt, die Längen $\mathfrak{O}\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{O}\mathfrak{P}_y$, $\mathfrak{O}\mathfrak{P}_z$ im Bilde aus

$$x = \frac{\mathfrak{O}\mathfrak{P}_x}{\mathfrak{O}\mathfrak{X}}, \qquad y = \frac{\mathfrak{O}\mathfrak{P}_y}{\mathfrak{O}\mathfrak{Y}}, \qquad z = \frac{\mathfrak{O}\mathfrak{P}_z}{\mathfrak{O}\mathfrak{Z}}$$

zu ermitteln. Am bequemsten geschieht dies so: Man wählt das Bild $\mathfrak{O}\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ des Achsenkreuzes derart, daß die Achsenlängen $\mathfrak{O}\mathfrak{X}$, $\mathfrak{O}\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{O}\mathfrak{Z}$ im Bilde kleiner als die Längeneinheit oder wahre Achsenlänge OX ($= OY = OZ$) sind, und zeichnet wie beim Sinusmaßstab einen Viertelkreis, dessen Radius die Längeneinheit ist. Auf dem lotrechten Radius trägt man dann die Strecken $\mathfrak{O}\mathfrak{X}$, $\mathfrak{O}\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{O}\mathfrak{Z}$ vom Mittelpunkt aus auf und zieht durch die

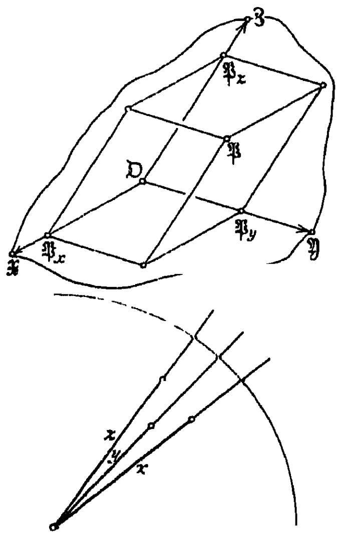


Fig. 236.

Endpunkte die Parallelen zum wagerechten Radius. Sie schneiden den Viertelkreis in drei Punkten, die man mit dem Mittelpunkte durch Strahlen verbindet. Um nun z. B. $\mathfrak{O}\mathfrak{P}_x$ zu bekommen, tragt man die wahre Koordinate x auf dem zugehörigen Strahl vom Mittelpunkt aus auf und greift dann mittels des Zirkels den Abstand des Endpunktes vom wagerechten Radius ab, ohne ihn wirklich zu zeichnen.

Die Punkte P' und $\mathfrak{P}$ in Fig. 235 und 236 sind die Bilder eines und desselben Punktes P, bezogen auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz $OXYZ$ mit gleichlangen Achsen, und zwar gibt Fig 235 eine senkrechte Projektion, dagegen Fig. 236 eine allgemeine Parallelprojektion des Achsenkreuzes und des Punktes P.

Hiernach ist man imstande, von jedem Gegenstand, dessen Punkte auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz bezogen sind, eine in allen Abmessungen richtige Parallelprojektion zu entwerfen. Als Beispiel wahlen wir den Schnitt einer Strecke PQ mit einer durch ein Dreieck ABC gegebenen Ebene. Dies ist zunachst in Fig. 237, einer Wiederholung der Fig. 12 von Nr. 16, dargestellt Darin sind zwei zueinander senkrechte gleichlange Achsen OX und OY eingezeichnet, die auf der Tafel selbst liegen sollen. Die dritte ebenso lange Achse OZ stehe in O auf der Tafel senkrecht. Die Koordinaten x und y der Punkte P, Q, A, B, C sind gleich den Abstanden der Punkte P', Q', A', B', C' in Fig. 237 von den Achsen OY und OX, die Koordinaten z die auf dem Hohenmaßstab angegebenen Hohen.

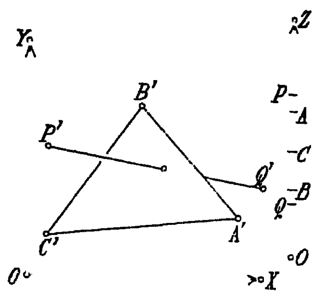


Fig 237

Wird nun die schiefe Parallelprojektion $\mathfrak{O}\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ des Achsenkreuzes wie in der vorhergehenden Fig. 236 angenommen, so kann man durch das vorhin angegebene Verfahren zu jedem Punkt P, Q, A, B, C die Parallelprojektion $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ausfindig machen. Am bequemsten verfahrt man so, daß man zunachst in der Achsenebene $\mathfrak{O}\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ die in Fig 237 angegebenen Punkte P', Q', A', B', C' mittels jenes Verfahrens eintragt, wodurch man in Fig 238 zu der gestrichelten Zeichnung in der Ebene $\mathfrak{O}\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ kommt, bei der wir die Bezeichnungen fortgelassen haben. Dann zieht man durch die gefundenen Punkte die Parallelen zu $\mathfrak{O}\mathfrak{Z}$ und tragt auf ihnen die zugehörigen verkurzten Langen der z-Koordinaten auf. Die Endpunkte sind die Bilder $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$

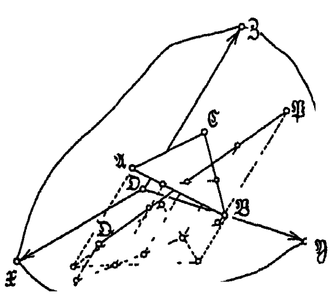


Fig 238

Das gewonnene Bild in Fig. 238 befriedigt aber wenig; es sieht verzerrt aus, und zwar deshalb, weil es, wenn es richtig wirken soll, nur aus einer solchen Projektionsrichtung betrachtet werden darf, die nach dem Pohlkeschen Satze zu dem schiefen Bild $\mathfrak{O}\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ des rechtwinkligen Achsenkreuzes $OXYZ$ gehört. Man könnte diese Projektionsrichtung ermitteln (nach Nr. 163); es wäre aber umständlich. Deshalb verwendet man die allgemeine Axonometrie so, wie es hier geschehen ist, wenig. Wenn man die Koordinaten x, y, z aller Punkte eines Gebildes kennt, wird

man es ja auch immer vorziehen, eine **senkrechte** Projektion des Gebildes dadurch herzustellen, daß man statt des Bildes $\mathfrak{O}\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ des Achsenkreuzes in Fig. 236 oder Fig. 238 eine senkrechte Projektion $O'X'Y'Z'$ des Achsenkreuzes wie in Fig 235 benutzt. Man wird also die senkrechte Axonometrie bevorzugen, über die wir, wie gesagt, später noch einmal sprechen werden.

Immerhin wendet man die allgemeine oder schiefe Axonometrie gern bei der Darstellung solcher Gebilde an, bei denen es nicht auf die genauen Werte der drei rechtwinkligen Koordinaten x, y, z ankommt, die aber drei zueinander senkrechte ausgezeichnete Richtungen aufweisen, wie z. B. die meisten Bauwerke in Länge, Breite und Höhe. Denn auf Grund des Pohlkeschen Satzes in seiner engeren Fassung ist es erlaubt, irgend drei von $\mathfrak{O}$ aus gezogene Strecken $\mathfrak{O}\mathfrak{X}$, $\mathfrak{O}\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{O}\mathfrak{Z}$ als die Bilder dreier zueinander senkrechter und gleichlanger Strecken aufzufassen. Man wendet also den Pohlkeschen Satz an, um anschauliche Skizzen von Bauwerken u. dgl. zu entwerfen. Dies geschah allerdings schon in Nr. 154, wo vom Pohlkeschen Satz noch nicht die Rede gewesen war. Deshalb beachte man: Damals konnten wir nur sagen, daß z. B. die Fig. 221 eine richtige Parallelprojektion einer Tür in einer Wand vorstellt. Jetzt aber können wir hinzufügen: Es ist erlaubt, anzunehmen, daß die Breite der Tür, die Tiefe der Türnische und die Höhe der Tür in Wahrheit in ganz bestimmten Längenverhältnissen zueinander stehen. Dies stand damals noch nicht fest und ist erst durch den Pohlkeschen Satz begründet.

Es gibt einen **Sonderfall**, in dem die schiefe Axonometrie bei voller Berücksichtigung der wahren Abmessungen der Gegenstände leicht anzuwenden ist und daher auch häufig angewandt wird, nämlich den Fall, wo zwei Achsen auch im Bilde zueinander senkrecht sind und die wahre Länge haben, siehe Fig. 239, wo $\mathfrak{O}\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{O}\mathfrak{Z}$ zueinander senkrecht und gleich lang sind. Nimmt man die dritte Achse im Bilde in beliebiger Richtung und Länge $\mathfrak{O}\mathfrak{X}$ an, so ist es leicht, eine derjenigen Richtungen zu ermitteln, aus denen das Achsenbild betrachtet werden muß. Denn man kann in diesem

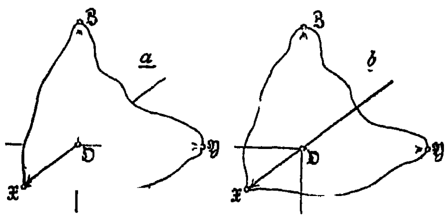


Fig 239

Fall annehmen, daß die wahren Achsen OY und OZ auf der Zeichenebene selbst liegen und also mit $\mathfrak{O}\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{O}\mathfrak{Z}$ zusammenfallen. Denkt man sich daher in $\mathfrak{O}$ das Lot auf die Tafel bis zu einem Punkte X errichtet, und zwar in der Länge von $\mathfrak{O}\mathfrak{Y}$ (oder $\mathfrak{O}\mathfrak{Z}$), so ist die Richtung des Strahles von X nach der Stelle $\mathfrak{X}$ der Tafel diejenige, aus der projiziert das wahre Achsenkreuz $OXYZ$ gerade das gegebene Bild $\mathfrak{O}\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ bekommt. Man kann sich das Lot in $\mathfrak{O}$ auch nach der Unterseite der Tafel hin errichtet denken. Daher ergeben sich zwei zugehörige Richtungen, aus denen betrachtet das Achsenkreuz den richtigen Eindruck macht. Bei der einen Annahme blickt man in den Oktanten $OXYZ$ hinein, bei der anderen blickt man auf ihn. Wählt man $\mathfrak{O}\mathfrak{X}$ insbesondere geradeso lang wie $\mathfrak{O}\mathfrak{Y}$ oder $\mathfrak{O}\mathfrak{Z}$, so besteht das Entwerfen der axonometrischen Zeichnung in diesem Sonderfall in nichts anderem als der

Ausführung der Kavalierperspektive (Nr. 105) Ist $\mathfrak{OX}$ größer oder kleiner als $\mathfrak{OY}$ (oder $\mathfrak{OZ}$), so handelt es sich um die uberhöhte oder verflachte Kavalierperspektive (Nr. 108)

Anmerkung· Nach Nr. 163 gehören zu Fig 239 vier wesentlich verschiedene Achsenkreuze *OXYZ* im Raum und zwei wesentlich verschiedene Projektionsrichtungen. Deshalb lassen sich die Bilder in Fig 239 noch wesentlich anders auffassen Sie stellen auch gewisse rechtwinklige Achsenkreuze *OXYZ* mit gleichlangen Achsen dar, bei denen die Ebene *OYZ* nicht mit der Tafel zusammenfallt und auch nicht zur Tafel parallel ist Dies sei nur nebenbei erwahnt, bei der praktischen Anwendung der Axonometrie im Fall der Fig. 239 wird diese andere Auffassung nicht benutzt

165. Parallelprojektion der Kugel. Der Schlagschatten der Kugel bei Parallelbeleuchtung, der in Nr. 136 besprochen wurde, ist nichts anderes als eine Parallelprojektion der Kugel auf die Tafel. Es erscheint aber zweckmäßig, im Anschluß an den soeben besprochenen Sonderfall der Axonometrie noch einmal auf die Parallelprojektion der Kugel zuruckzukommen. Wir wahlen *O* als Kugelmitte, die gemeinsame Lange der Achsen *OX*, *OY*, *OZ* gleich dem Kugelradius, so daß *X*, *Y*, *Z* auf der Kugel liegen. Weiterhin wählen wir *OY* und *OZ* als zur Tafel parallele Radien. Dann ergibt sich das Bild des Achsenkreuzes bei beliebiger Parallelprojektion wie in Fig 239 der letzten Nummer. Wird $\mathfrak{OX}$ uber $\mathfrak{O}$ hinaus um die eigene Lange bis $\bar{\mathfrak{X}}$ verlangert, so sind $\bar{\mathfrak{X}}$ und $\mathfrak{X}$ die Bilder der Endpunkte des zur Tafel senkrechten Kugeldurchmessers Indem wir die Kugel als Erdkugel auffassen, können wir diesen Durchmesser die Erdachse nennen, *X* den Nordpol und $\bar{X}$ den Sudpol. Der Großkreis in der Ebene *OYZ* ist dann der Äquator Da seine Ebene zur Tafel parallel ist, erscheint der Äquator im Bild als der Kreis um $\mathfrak{O}$ durch $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$, siehe Fig 240. Auch alle Breitenkreise der Kugel sind zur Tafel parallel und erscheinen daher als Kreise Die Bilder ihrer Mitten liegen auf $\mathfrak{X}\bar{\mathfrak{X}}$. Wird $\mathfrak{K}$ beliebig auf $\mathfrak{X}\bar{\mathfrak{X}}$ als Mittelpunkt gewahlt, so bekommt man den Radius des zugehorigen Breitenkreises so: Die Parallele zu $\mathfrak{XZ}$ durch $\mathfrak{K}$ schneide $\mathfrak{OZ}$ in $\mathfrak{L}$. Die in $\mathfrak{L}$ auf $\mathfrak{OZ}$ errichtete Halbsehne des Aquatorkreises sei ϱ. Nun leuchtet ein, daß die wahren Langen von $\mathfrak{OK}$ und $\mathfrak{OL}$ einander gleich sind und deshalb ϱ der gesuchte Radius ist. Mit ϱ als Radius wird daher der Kreis um $\mathfrak{K}$ geschlagen. Will man alle Breitenkreise von zehn zu zehn Grad haben, so wird man zunachst den Äquatorkreis von $\mathfrak{Z}$ aus in je zehn Grad einteilen und dann die Halbsehnen ϱ durch die Teilpunkte legen. Dadurch gehen die zugehörigen Punkte $\mathfrak{L}$ und die zugehörigen Kreismitten $\mathfrak{K}$ hervor. In Fig. 240 sind alle diese Breitenkreise gezeichnet.

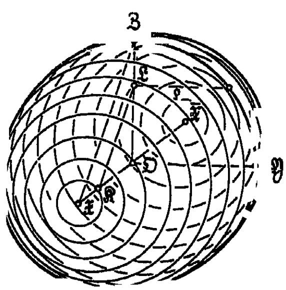


Fig 240

Der Umriß der Kugel ist nach Nr. 136 die Ellipse mit den Brennpunkten $\mathfrak{X}$ und $\bar{\mathfrak{X}}$ und derjenigen Nebenachse, die gleich dem Durchmesser der Kugel, d. h. gleich dem des Äquators ist. Die Bilder der Breitenkreise verlaufen im Innern dieser Ellipse; teils kommen sie bis an die Ellipse heran, teils nicht. Indem man jene Breitenkreise von zehn zu zehn Grad zeichnet, ergibt sich die Umrißellipse schon genügend scharf als Einhüllende der Kreise.

Es ist leicht, auch die Bilder der Längenkreise der Kugel von je zehn zu zehn Grad zu zeichnen, da man ohne Mühe konjugierte Durchmesser der Bildellipsen dieser Kreise bekommt. So kann man eine beliebige Parallelprojektion des Gradnetzes der Kugel für den Fall zeichnen, wo die Erdachse zur Tafel senkrecht ist.

Anmerkung Die in Fig 240 gezeichneten Kreise sind nach der Anmerkung der letzten Nummer nicht nur die Bilder der Breitenkreise. Vielmehr ist jeder auch noch das Bild eines zweiten Kugelkreises, dessen Ebene nicht zur Tafel parallel liegt Hierauf kommen wir in Nr. 278 zurück

166. Ansichten in Vogelschau. Wählt man $\mathfrak{O}\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{O}\mathfrak{Y}$ so, daß sie einen sehr stumpfen Winkel bilden, so verlauft die zum Bild $\mathfrak{O}\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ des Achsenkreuzes $OXYZ$ gehörige projizierende Richtung nahezu parallel zur Ebene OXY, so daß Figuren, die dieser Ebene angehören, eine besonders starke Verzerrung erfahren. Insbesondere macht man diese Annahme bei der Herstellung von Ansichten in Vogelschau, indem man Gegenstände darstellt, die auf der Ebene OXY aufgebaut sind, wie z. B. Hauser und Erdwerke. Wie sich diese Bilder von den Darstellungen in Kavalierperspektive (Nr. 105) unterscheiden, zeigt Fig. 241. Bei der Kavalierperspektive im Fall a erscheint der Grundriß in der wahren Gestalt als Rechteck, dagegen bei der Ansicht in Vogelschau im Fall b als Parallelogramm. Eine Stadtansicht in Kavalierperspektive zeigt die Straßenzüge in der wahren Gestalt, eine Ansicht in Vogelschau tut es nicht Will man also einen Stadtplan durch Einzeichnen der Häuser anschaulicher machen, ohne auf die wirkliche Gestalt zu verzichten, so muß man die Kavalierperspektive benutzen. Malerischer ist allerdings die Ansicht in Vogelschau.

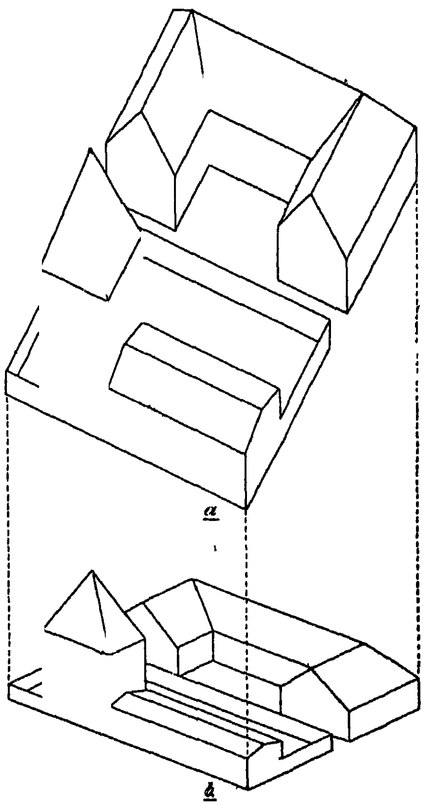


Fig. 241

167. Schiefe Achsenkreuze. In gewissen Fällen empfiehlt es sich, räumliche Gebilde nicht auf ein rechtwinkliges, sondern auf ein schiefes Achsenkreuz zu beziehen, dessen Achsen irgendwelche Winkel miteinander bilden, so für gewisse Betrachtungen der analytischen Geometrie sowie für Kristallgestalten derjenigen Systeme, die schiefe Achsen aufweisen. Ein allgemeines schiefes Achsenkreuz wird durch drei in beliebigen Richtungen von einem Punkt O ausgehende Strecken OX, OY, OZ von beliebigen Längen gebildet. Das Vierflach $OXYZ$ hat dann allgemeine Gestalt. Nach dem Pohlkeschen Satz in seiner allgemeinen Fassung (Nr. 160) kann ein beliebiges Viereck $\mathfrak{O}\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ der

Ebene, dessen Ecken nicht sämtlich in gerader Linie liegen, als eine Parallelprojektion eines Vierflachs von beliebiger Gestalt benutzt werden.

Hiernach ist es leicht, auch von Gebilden, die auf schiefe Achsenkreuze bezogen sind, irgendwelche Parallelprojektionen zu entwerfen. Unter den schiefwinkligen Koordinaten x, y, z eines Punktes P versteht man die Strecken, die auf den Achsen OX, OY, OZ von denjenigen Ebenen abgeschnitten werden, die durch P gehen und zu den Ebenen OYZ, OZX, OXY parallel sind und also zusammen mit den drei Achsenebenen einen Spat bilden, in dem P die Gegenecke von O ist. Es ist klar, daß man genau so wie in Nr. 164 die Bilder von Punkten herstellen kann, die gegebene schiefwinklige Koordinaten haben.

168. Übungen. In den folgenden Aufgaben sei das Bild eines rechtwinkligen Achsenkreuzes OX, OY, OZ mit gleichlangen Achsen beliebig in schiefer Parallelprojektion angenommen.

1) Eine Ebene sei durch ihre Schnittpunkte mit den Achsen, eine Gerade durch ihre Schnittpunkte mit zwei Achsenebenen gegeben. Gesucht der Schnittpunkt der Ebene mit der Geraden.

2) In der Ebene OXY und in der Ebene OYZ sei je ein Punkt P, Q gewählt. Wie verhält sich in Wirklichkeit die Länge der Strecke PQ zur Achsenlänge OX?

3) Drei Punkte des Raumes seien durch die Fußpunkte der Lote von ihnen auf die drei Achsenebenen gegeben. Gesucht der Schnitt der Ebene der drei Punkte mit den Achsenebenen.

4) Die Ellipse zu zeichnen, als die sich der Kreis durch die drei Punkte X, Y, Z darstellt.

5) Man zeichne einen Kristall des tesseralen Systems (Nr 69, 70) in allgemeiner Parallelprojektion.

§ 7. Involutionen[1]).

169. Über die Abbildung mehrerer rechter Winkel einer Ebene. Auf der Tafel seien mehrere Geradenpaare $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1$ — $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2$ — $\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3$ usw gegeben. Dann kann man die Frage stellen, ob sie als Parallelprojektion mehrerer rechtwinkliger Geradenpaare a_1, b_1 — a_2, b_2 — a_3, b_3 usw. einer Ebene aufgefaßt werden dürfen. Da parallele Geraden Projektionen haben, die ebenfalls zueinander parallel sind, ist es keine wesentliche Beschränkung, wenn wir alle gegebenen Geradenpaare auf der Tafel durch solche ersetzen, die zu ihnen parallel sind und von einem gemeinsamen Punkt $\mathfrak{S}$ ausgehen.

Rechtwinklige Geradenpaare einer Ebene mit gemeinsamem Scheitelpunkt liegen immer so, daß jedes Paar jedes andere Paar trennt, d. h. eine Gerade a_1 läßt sich in eine zu ihr senkrechte Gerade b_1 durch stetige Drehung nur dadurch überführen, daß dabei eine der beiden Geraden a_2, b_2 eines anderen rechtwinkligen Paares mit demselben Scheitel überstrichen wird. Deshalb ist die aufgeworfene Frage von vornherein zu verneinen, falls die in der Zeichnung gegebenen Paare

[1]) Vom Inhalt des siebenten und achten Paragraphen dieses Kapitels werden, abgesehen von ganz wenigen gelegentlichen und unwesentlichen Bemerkungen, erst im zweiten Bande Anwendungen gemacht werden. Diese Paragraphen können also vorläufig überschlagen werden.

$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1$ — $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2$ — $\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3$ usw. mit dem gemeinsamen Scheitel $\mathfrak{S}$ nicht sämtlich einander trennen. Die Beantwortung der Frage steht jedoch noch aus, falls jedes dieser Paare jedes andere trennt, wie wir nunmehr voraussetzen wollen.

Liegen bloß zwei einander trennende Paare $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2$ vor, so ist die Frage leicht zu erledigen: Man ziehe irgendeine Gerade s, die nicht durch $\mathfrak{S}$ geht, siehe Fig. 242. Sie schneide die Geraden in den Punkten A_1, B_1 und A_2, B_2. Diese beiden Punktepaare trennen einander, d. h. zwischen A_1 und B_1 liegt einer der Punkte A_2, B_2 und zwischen A_2 und B_2 liegt einer der Punkte A_1, B_1. Daher haben die Kreise mit den Durchmessern A_1B_1 und A_2B_2 zwei Schnittpunkte. Einer von ihnen sei mit S bezeichnet. Diejenige Affinität nun, bei der s die Affinitatsachse ist und bei der dem Punkt S der Punkt $\mathfrak{S}$ entspricht, führt die Geradenpaare a_1, b_1 und a_2, b_2, die sich durch Verbinden von S mit A_1, B_1 und A_2, B_2 ergeben, in die vorgelegten Geradenpaare $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2$ uber. Da $a_1 \perp b_1$ und $a_2 \perp b_2$ ist und die Affinitat in der Doppelebene durch Drehung der einen Ebene um s in eine Parallelprojektion einer Ebene auf eine andere verwandelt werden kann (Nr. 124), gibt es also in der Tat in einer gewissen Ebene zwei rechtwinklige Geradenpaare a_1, b_1 und a_2, b_2 derart, daß sie bei geeigneter Parallelprojektion in die gegebenen Geradenpaare $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2$ der Tafel ubergehen.

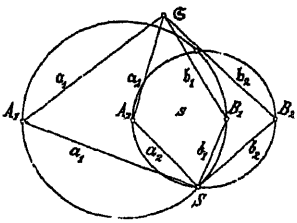


Fig 242.

Tritt nun noch ein drittes gegebenes Paar $\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3$ hinzu, das ebenfalls durch die Paare $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2$ getrennt wird, und sind A_3, B_3 seine Schnittpunkte mit s, so wird allerdings der Winkel A_3SB_3 im allgemeinen kein rechter sein Dieser Umstand ist aber noch kein genugender Grund zu dem Schluß, in diesem Fall die aufgeworfene Frage zu verneinen, denn es ware denkbar, daß man bei geeigneter Wahl der vorhin beliebig angenommenen Geraden s erreichen konnte, daß auch $\sphericalangle A_3SB_3$ ein rechter Winkel würde Bis auf weiteres lassen wir die Frage offen, wir werden sie erst in Nr. 181 beantworten. Die Fragestellung veranlaßt uns namlich zur Einfuhrung eines neuen Begriffes, der auch für andere Zwecke wichtig ist und deshalb vorher besprochen werden soll:

Wir nehmen ein rechtwinkliges Geradenpaar a_0, b_0 mit dem Schnittpunkt S an Lassen wir die beiden Geraden sich so um S drehen, daß sie immer zugleich gleiche Winkel zurücklegen, so bleiben sie immer zueinander senkrechte Geraden a, b, wenn beide Drehungen in demselben Sinne stattfinden. Haben dagegen die beiden Drehungen entgegengesetzten Sinn, so gibt es zwei Geraden durch S derart, daß jenes bewegliche Geradenpaar a, b zu jeder dieser beiden Geraden beständig symmetrisch liegt. Die Symmetriegeraden sind namlich diejenigen, durch die man die rechten Winkel des ursprünglichen Geradenpaares a_0, b_0 in gleiche Teile zerlegt.

Im Falle gleichen Drehsinnes gehen aus a_0, b_0 solche Geradenpaare a, b hervor, von denen jedes alle übrigen Paare trennt, im anderen Falle nie. Eine Gerade s, die nicht durch S geht, möge das bewegliche Geradenpaar in einer allgemeinen Lage a, b in A und B schneiden.

Ferner sei im Falle gleichen Drehsinnes der Fußpunkt des Lotes von S auf s mit M bezeichnet, siehe Fig. 243 a. Im anderen Falle kommt es einmal vor, daß eine Gerade des Paares zu s parallel wird, und es sei M der Schnittpunkt der zugehörigen zweiten Geraden des Paares mit s, siehe das gestrichelte Geradenpaar in Fig. 243 b. In beiden Fallen ist nun $\sphericalangle SAM = \sphericalangle BSM$ und $\sphericalangle SMA = \sphericalangle BMS$, also $\triangle SMA \backsim \triangle BMS$, mithin $MA \cdot MS = MS : MB$ oder also $MA \cdot MB$ gleich MS^2. Wir wollen nun die Strecken auf s mit bestimmten Vorzeichen messen, indem wir auf s einen Pfeil anbringen und vorschreiben, daß MA oder MB positiv oder negativ zu rechnen sei, je nachdem der Sinn von M nach A oder B dem Pfeil entspricht oder ihm entgegen ist. Im Fall a hat dann MA stets das entgegengesetzte Vorzeichen wie MB, indem M jedes Punktepaar A, B trennt, so daß $MA \cdot MB$ negativ ist. Im Fall b dagegen trennt M kein Punktepaar A, B, so daß $MA \cdot MB$ positiv ist. Da MS^2 als Quadrat eine positive Größe ist, ergibt sich also im ersten oder zweiten Fall

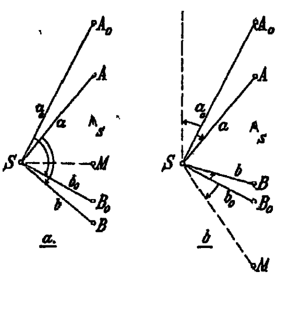


Fig 243

$$MA \cdot MB = -MS^2, \qquad MA \cdot MB = +MS^2$$

170. Punktinvolutionen. Wir kehren die Betrachtung um: Unter M sei ein bestimmter Punkt einer mit Pfeil versehenen Geraden s verstanden, und c bedeute eine Strecke von gegebener Lange Dann werde jedem Punkt A von s ein Punkt B von s derart zugeordnet, daß

$$MA \cdot MB = -c^2 \quad \text{oder} \quad MA \cdot MB = +c^2$$

ist. Man kommt dadurch zu unendlich vielen Punktepaaren A, B auf s, im ersten Fall wird jedes Paar durch M getrennt, im zweiten keines Da die Vorschrift in Hinsicht auf A und B symmetrisch ist, folgt: Gehort zu A der Punkt B, so gehört weiterhin zu B wieder der Punkt A. Jeder Punkt von s gehört also einem, aber auch nur einem Punktepaar an.

Im ersten Fall werde in M auf s das Lot errichtet und gleich c gemacht. Der Endpunkt des Lotes heiße S. Wegen $MA \cdot MB = -MS^2$ ist dann $\triangle ASB$ bei S rechtwinklig. Daher kommen wir zu Fig 243 a der letzten Nummer zurück, wenn wir noch unter A_0 und B_0 irgendein bestimmtes unter den Punktepaaren A, B verstehen und SA, SB, SA_0, SB_0 mit a, b, a_0, b_0 bezeichnen.

Im zweiten Fall werde S irgendwo auf dem Kreis um M mit dem Radius c angenommen. Dann ist $MA \cdot MB = MS^2$, und daraus folgt wieder, daß $\triangle SMA \backsim \triangle BMS$ ist. Also bildet SM mit SB denselben Winkel wie SA mit dem parallel zu s durch S im Pfeilsinn gezogenen Strahl. Dies gilt für jedes Punktepaar A, B, so daß jedes Geradenpaar SA, SB oder a, b dadurch entsteht, daß man SM und den soeben erwähnten zu s parallelen Strahl um S durch beliebige gleiche Winkel, aber in verschiedenen Sinnen dreht. Unter diesen Paaren a, b ist augenscheinlich ein rechtwinkliges Paar a_0, b_0 vorhanden. Bezeichnet man seine Schnittpunkte mit s mit A_0, B_0, so kommt man zu Fig. 243 b der letzten Nummer zurück. Somit gilt der Satz:

Ist M ein gegebener Punkt einer mit Pfeil versehenen Geraden s und bedeutet c eine Strecke von gegebener Länge, so bestimmt die Vorschrift

$$MA \cdot MB = -c^2 \qquad \text{oder} \qquad MA \cdot MB = +c^2$$

lauter Punktepaare A, B auf s derart, daß jeder Punkt von s einem, aber auch nur einem Paar angehört. Im ersten Fall trennen sich je zwei Paare, im zweiten nicht. In beiden Fällen gibt es mindestens ein rechtwinkliges Geradenpaar a_0, b_0 durch einen Punkt S außerhalb s derart, daß jedes Punktepaar A, B durch solche Geraden a, b von S aus auf s ausgeschnitten wird, die aus a_0 und b_0 durch Drehung um gleiche Winkel in gleichem bzw. verschiedenem Drehsinn entstehen.

Der Inbegriff aller Punkte einer Geraden s heißt eine Punktreihe, die Gerade s selbst der Träger der Punktreihe Man sagt, daß die Punkte einer Punktreihe in Involution liegen oder eine Involution bilden, wenn eine Vorschrift von der Form

$$MA \cdot MB = -c^2 \qquad \text{oder} \qquad MA \cdot MB = +c^2$$

mittels eines auf s gegebenen Punktes M und einer gegebenen Strecke c lauter Punktepaare A, B auf dem Trager s bestimmt. Das fur alle Punktepaare A, B der Involution konstante Produkt $MA \cdot MB$, also $-c^2$ oder $+c^2$, heißt die Potenz der Involution. Ist die Potenz negativ, so heißt die Involution elliptisch, ist die Potenz positiv, so heißt die Involution hyperbolisch. Elliptische Involutionen stehen nämlich, wie sich bald zeigen wird (in Nr 182) in enger Beziehung zu den Ellipsen. Erst spater (in Nr 261) wird sich zeigen, daß hyperbolische Involutionen in ebenso enger Beziehung zu den bisher noch nicht erwahnten Hyperbeln stehen Der Punkt M wird der Mittelpunkt der Involution genannt Rückt A nach M, so wird $MA = 0$, also $MB = \infty$ wegen $MA \cdot MB = \pm c^2$, d. h. der Mittelpunkt der Involution ist derjenige Punkt, der zusammen mit dem unendlich fernen Punkt der Geraden s ein Punktepaar der Involution bildet.

Wenn ein Punktepaar der Involution aus zwei zusammenfallenden Punkten besteht, wird man diese Stelle einen Doppelpunkt der Involution nennen. Soll D ein Doppelpunkt sein, so müßte im Falle der elliptischen Involution $MD^2 = -c^2$ sein, was aber wegen der verschiedenen Vorzeichen unmöglich ist Eine elliptische Involution hat demnach keinen Doppelpunkt. Im Fall der hyperbolischen Involution dagegen ist die Forderung $MD^2 = +c^2$ erfüllbar durch $MD = c$ oder $MD = -c$, d. h. eine hyperbolische Involution hat zwei verschiedene Doppelpunkte D_1 und D_2, und der Mittelpunkt M der Involution ist die Mitte von D_1D_2, das Quadrat der Strecke MD_1 oder MD_2 die Potenz der Involution. Die Doppelpunkte D_1 und D_2 sind die Schnittpunkte von s mit demjenigen Kreis, auf dem wir vorhin den Punkt S wahlten. Man sieht ferner: In einer hyperbolische Involution wird jedes Punktepaar A, B durch einen der beiden Doppelpunkte getrennt.

171. Ausgeartete oder parabolische Involutionen. Die Vorschrift für eine Punktinvolution verlangt, daß das Produkt $MA \cdot MB$ für jedes Punktepaar A, B einen konstanten Wert habe. Den Fall, wo dies Produkt gleich Null ist, haben wir bisher beiseite gelassen. Soll $MA \cdot MB = 0$ sein, so muß entweder $MA = 0$ oder $MB = 0$ sein. Ist $MA = 0$, d. h. liegt A in M, so kann B irgendwo auf s gewählt werden. Demnach bestimmt die Vorschrift $MA \cdot MB = 0$ alle diejenigen Punktepaare des Trägers s, von denen immer ein Punkt im Mittelpunkt M selbst liegt. Dies ist eine Ausartung der Involution, und sie hat an sich keine Bedeutung. Man nennt sie eine ausgeartete Involution. Sie muß immerhin erwähnt werden, weil es zuweilen vorkommt (z. B. in Nr. 179), daß eine elliptische Involution zu einer hyperbolischen führt, indem der Durchgang durch eine ausgeartete Involution stattfindet. Die ausgearteten Involutionen heißen auch parabolische Involutionen, weil sie zu den noch nicht besprochenen Parabeln in Beziehung stehen.

172. Punktinvolution mit unendlich fernem Mittelpunkt. Da alle Punktepaare einer elliptischen Involution durch ihren Mittelpunkt getrennt werden, leuchtet ein, daß, falls der Mittelpunkt ins Unendlichferne rückt, dasselbe von einem Punkte eines jeden Paares gilt, so daß sich eine ausgeartete Involution mit unendlich fernem Mittelpunkt ergibt. Anders verhält es sich bei einer hyperbolischen Involution, wenn ihr Mittelpunkt ins Unendlichferne rückt. Da der Mittelpunkt die Mitte zwischen den beiden Doppelpunkten ist, rückt einer von ihnen ebenfalls ins Unendlichferne, während der andere, der mit D bezeichnet sei, im Endlichen bleiben kann. Der Kreis vom Durchmesser D_1D_2, auf dem in Nr. 170 der Punkt S angenommen wurde, wird jetzt als Kreis mit unendlich fern auf s gelegener Mitte das Lot zu s durch D. Eines der Geradenpaare durch S, die nach Nr. 170 auf s die Punktepaare der Involution ausschneiden, ist die doppelt zählende Gerade SD, und alle anderen Geradenpaare gehen aus dieser Doppelgeraden hervor, wenn man die eine Gerade in einem Sinne, die andere im entgegengesetzten Sinne gleichartig um S dreht. Mithin hat jedes Punktepaar A, B den Punkt D als Mitte, d. h.: Jeder Punkt A geht in den zugehörigen Punkt B durch sogenannte Spiegelung am Doppelpunkt D über. Demnach ist die Spiegelung aller Punkte einer Punktreihe an einem Punkte D ihres Trägers eine hyperbolische Involution mit unendlich fernem Mittelpunkt.

173. Parallelprojektion einer Punktinvolution. Der Träger s einer Punktinvolution mit dem Mittelpunkt M und der Potenz $-c^2$ oder c^2 werde durch parallele Strahlen auf eine Gerade $\mathfrak{s}$ projiziert; dabei gehe M in $\mathfrak{M}$ über. Jedes Punktepaar A, B der Involution liefert ein Punktepaar $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{s}$. Durch die Projektion werden alle Strecken auf s in demselben Maßstab vergrößert oder verkleinert, d. h. mit einer Konstanten k multipliziert:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{A} = k \cdot MA, \qquad \mathfrak{M}\mathfrak{B} = k \cdot MB.$$

Aus der Vorschrift

$$MA \cdot MB = -c^2 \qquad \text{oder} \qquad MA \cdot MB = +c^2$$

ergibt sich also:

$$\mathfrak{M}\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{B} = -k^2c^2 \qquad \text{oder} \qquad \mathfrak{M}\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{B} = +k^2c^2$$

Dies besagt

Vermöge Parallelprojektion oder Affinität geht jede elliptische Punktinvolution wieder in eine elliptische und jede hyperbolische Punktinvolution wieder in eine hyperbolische Punktinvolution über. Dabei entspricht dem Mittelpunkt der ursprünglichen Involution der Mittelpunkt der neuen. Es ist selbstverständlich, daß dabei auch die Doppelpunkte der hyperbolischen Involution in die Doppelpunkte der neuen übergehen.

Man kann den Satz auch so aussprechen· Die Begriffe: elliptische Punktinvolution, hyperbolische Punktinvolution, Mittelpunkt der Punktinvolution und Doppelpunkte der hyperbolischen Punktinvolution verhalten sich gegenuber Parallelprojektionen oder Affinitaten invariant.

174. Strahleninvolutionen. Unter einem Strahlenbüschel versteht man den Inbegriff aller Geraden, die man in einer Ebene durch einen Punkt, den Scheitel des Büschels, legen kann. Wenn nun auf einer Geraden s eine Involution von Punktepaaren A, B vorliegt, und wenn man jedes dieser Punktepaare mit einem außerhalb s gelegenen Punkt S durch Geraden a, b verbindet, sagt man, daß die Strahlenpaare a, b des Büschels mit dem Scheitel S eine Strahleninvolution bilden oder auch, daß die Strahlen des Büschels in Involution liegen. Diese Strahleninvolution heißt elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch, je nachdem sie aus einer entsprechend bezeichneten Punktinvolution entstanden ist. Die parabolischen Strahleninvolutionen sind wie die parabolischen Punktinvolutionen (Nr 171) Ausartungen, weil in ihnen allen Strahlen ein einziger Strahl zugeordnet ist. Die Strahlenpaare einer elliptischen Strahleninvolution trennen einander, die einer hyperbolischen nicht. Eine elliptische Strahleninvolution hat keine Doppelstrahlen, dagegen hat jede hyperbolische zwei Doppelstrahlen, d. h. es kommt bei ihr zweimal vor, daß ein Strahlenpaar zusammenfallt. Diese Doppelstrahlen gehen nach den Doppelpunkten der hyperbolischen Punktinvolution, woraus die Strahleninvolution entstanden ist, und sie liegen so, daß jedes Strahlenpaar der Involution von dem Paar der Doppelstrahlen getrennt wird

Strahleninvolutionen traten schon, ohne so genannt worden zu sein, in Nr. 169 auf, wo ein Punkt S in besonderer Lage hinsichtlich des Tragers s der Punktreihe angenommen wurde und die beweglichen Strahlenpaare a, b die Involution bildeten Also ergibt sich eine besondere elliptische oder hyperbolische Strahleninvolution, wenn sich zwei zuerst zueinander senkrecht gelegene Geraden so um ihren Schnittpunkt drehen, daß sie zugleich gleichgroße Winkel zurücklegen, und zwar entsteht eine elliptische, wenn der Drehsinn beider Geraden derselbe ist, eine hyperbolische im anderen Fall. Im ersten Fall spricht man von einer rechtwinkligen Strahleninvolution, weil jedes ihrer Strahlenpaare rechtwinklig ist. Im zweiten Fall spricht man von einer symmetrischen Strahleninvolution, weil jedes Strahlenpaar symmetrisch zu den beiden Doppelstrahlen liegt, die ihrerseits zueinander senkrecht sind. Die

Doppelstrahlen sind nämlich in Fig. 243 b von Nr. 169 diejenigen, durch die man die rechten Winkel von a_0 und b_0 in gleiche Teile zerlegt.

175. Parallelprojektion einer Strahleninvolution. Da die Strahleninvolutionen aus den Punktinvolutionen abgeleitet wurden, ergibt sich aus Nr. 173:

Vermöge Parallelprojektion oder Affinität geht jede elliptische Strahleninvolution wieder in eine elliptische und jede hyperbolische Strahleninvolution wieder in eine hyperbolische Strahleninvolution über. Dabei gehen Doppelstrahlen wieder in Doppelstrahlen über. Man kann also sagen, daß sich die Begriffe: elliptische Strahleninvolution, hyperbolische Strahleninvolution und Doppelstrahlen der hyperbolischen Strahleninvolution gegenüber Parallelprojektionen oder Affinitäten invariant verhalten.

Insbesondere sei eine elliptische Strahleninvolution in einem Büschel mit dem Scheitel S vorgelegt; sie sei dadurch entstanden, daß von S aus die Strahlen nach den Punktepaaren einer elliptischen Involution auf einer Geraden s gezogen wurden. Der Mittelpunkt der Punktinvolution sei M, ihre Potenz sei $-c^2$. Wenn nun $\mathfrak{S}$ als Endpunkt eines auf s in M errichteten Lotes von der Länge c angenommen wird, bilden die von $\mathfrak{S}$ nach den Punktepaaren auf s gehenden Strahlen eine rechtwinklige Involution. Die vorgelegte und diese rechtwinklige Strahleninvolution sind zueinander affin, indem s die Affinitätsachse ist und dem Punkt S der Punkt $\mathfrak{S}$ entspricht.

Wird irgendeine hyperbolische Strahleninvolution vorgelegt, entstanden mit Hilfe des Scheitels S aus einer hyperbolischen Punktinvolution auf s, und sind D_1 und D_2 ihre Doppelpunkte, so möge $\mathfrak{S}$ auf dem Kreis mit dem Durchmesser D_1D_2 gewählt werden. Dann bilden die von $\mathfrak{S}$ nach den Punktepaaren auf s gehenden Strahlenpaare eine symmetrische Involution, und diese ist zur vorgelegten Strahleninvolution affin. Somit gilt der Satz.

Durch geeignete Parallelprojektion oder Affinität läßt sich jede elliptische Strahleninvolution in eine rechtwinklige und jede hyperbolische Strahleninvolution in eine symmetrische überführen.

Wenn S und $\mathfrak{S}$ weder zusammenfallen noch zu s symmetrisch liegen, gibt es nach Nr. 127 nur ein rechtwinkliges Strahlenpaar mit dem Scheitel S, dem ein rechtwinkliges mit dem Scheitel $\mathfrak{S}$ als affin entspricht, d. h. unter den Strahlenpaaren der zuerst betrachteten elliptischen Strahleninvolution mit dem Scheitel S gibt es bloß ein rechtwinkliges Paar. Wenn dagegen S mit $\mathfrak{S}$ zusammenfällt oder S und $\mathfrak{S}$ zu s symmetrisch liegen, ist auch die elliptische Involution mit dem Scheitel S rechtwinklig. Eine elliptische Strahleninvolution hat also, sobald sie nicht eine rechtwinklige ist, ein, aber auch nur ein rechtwinkliges Strahlenpaar.

In bezug auf eine hyperbolische Strahleninvolution läßt sich nicht ebenso schließen, weil die affine Involution mit dem Scheitel $\mathfrak{S}$ ja nicht rechtwinklig, sondern symmetrisch ist. Wir kommen auf diesen Fall in Nr. 177 zurück.

176. Schnitt einer Strahleninvolution mit einer Geraden. Nach Nr. 174 werde eine Strahleninvolution dadurch erzeugt, daß man alle Punktepaare A, B einer Punktinvolution auf einer Geraden s durch Geraden a, b mit einem Scheitel S verbindet. Das Strahlenbuschel werde dann mit irgendeiner nicht durch S gehenden Geraden $\bar{s}$ geschnitten, siehe Fig. 244. Jedes Strahlenpaar a, b liefert ein Punktepaar $\bar{A}, \bar{B}$ auf $\bar{s}$. Die Frage ist jetzt, ob diese Punktepaare $\bar{A}, \bar{B}$ auch eine Involution auf $\bar{s}$ erzeugen.

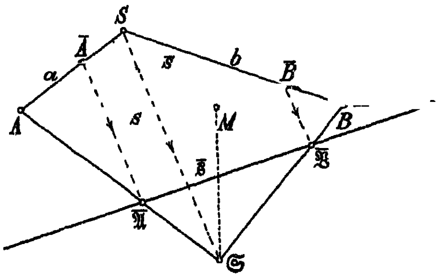


Fig. 244

Nehmen wir zunächst an, die vorgelegte Punktinvolution auf s sei elliptisch, M ihr Mittelpunkt, $-c^2$ ihre Potenz. Wie in der letzten Nummer sei $\mathfrak{S}$ der Endpunkt des in M auf s errichteten Lotes von der Lange c. Vermöge derjenigen Affinitat, die s zur Achse hat und bei der dem Punkt S der Punkt $\mathfrak{S}$ entspricht, geht die gegebene elliptische Strahleninvolution in die rechtwinklige mit dem Scheitel $\mathfrak{S}$ uber Vermöge ihrer wird die Gerade $\bar{s}$ in eine gewisse Gerade $\bar{\mathfrak{s}}$ verwandelt und jedes Punktepaar $\bar{A}, \bar{B}$ auf $\bar{s}$ in ein Punktepaar $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}$ auf $\bar{\mathfrak{s}}$ Da $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}$ auf $\mathfrak{S}A$ und $\mathfrak{S}B$ liegen, wird jedes Punktepaar $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}$ auf $\bar{\mathfrak{s}}$ durch die Schenkel eines rechten Winkels mit dem Scheitel $\mathfrak{S}$ ausgeschnitten. Auf diese Art entsteht aber auf $\bar{\mathfrak{s}}$ nach Nr. 170 eine elliptische Punktinvolution. Somit bilden die Paare $\bar{\mathfrak{A}}, \bar{\mathfrak{B}}$ auf $\bar{\mathfrak{s}}$ eine elliptische Involution Diese Paare sind nun zu den Paaren $\bar{A}, \bar{B}$ auf $\bar{s}$ affin. Nach Nr. 173 bilden demnach auch die Paare $\bar{A}, \bar{B}$ auf $\bar{s}$ eine elliptische Involution.

Ganz entsprechend schließt man, wenn die vorgelegte Strahleninvolution hyperbolisch ist, indem man sie nach Nr. 175 durch Affinitat in eine symmetrische verwandelt. Somit gilt der Satz

Der Schnitt einer Strahleninvolution mit einer Geraden ist eine Punktinvolution, und zwar sind beide Involutionen zugleich elliptisch oder zugleich hyperbolisch.

Die Bedeutung dieses Satzes wird klarer, wenn man im Auge behalt, wie eine Strahleninvolution nach Nr 174 entsteht. Er besagt nämlich:

Liegt eine Gerade s, ein Punkt M auf s und eine Strecke c vor, werden dann lauter Punktepaare A, B auf s nach einer der beiden Vorschriften

$$MA \cdot MB = -c^2 \qquad \text{oder} \qquad MA \cdot MB = +c^2$$

ausgewählt und verbindet man alle diese Punkte A, B durch Strahlen a, b mit einem beliebigen Punkt S, so werden alle Strahlenpaare a, b durch eine beliebige Gerade $\bar{s}$ in lauter Punktepaaren $\bar{A}, \bar{B}$ so geschnitten, daß diese Paare ihrerseits wieder einer der beiden Vorschriften

$$\bar{M}\bar{A} \cdot \bar{M}\bar{B} = -\bar{c}^2 \qquad \text{oder} \qquad \bar{M}\bar{A} \cdot \bar{M}\bar{B} = +\bar{c}^2$$

gehorchen, wobei $\bar{M}$ ein gewisser Punkt auf $\bar{s}$ und $\bar{c}$ eine gewisse Strecke ist. Siehe Fig. 245 für den Fall einer elliptischen

Involution. Hier sind die Punktepaare A, B mit $1, 1 - 2, 2$ usw. bezeichnet und vermöge der rechten Winkel mit einem Scheitel T aus s ausgeschnitten worden. Die neuen Punktepaare $\bar{A}, \bar{B}$ sind mit $\bar{1}, \bar{1} - \bar{2}, \bar{2}$ usw. bezeichnet. Es gibt also einen Punkt $\bar{T}$ derart, daß auch diese Paare vermöge der rechten Winkel mit dem Scheitel $\bar{T}$ aus $\bar{s}$ ausgeschnitten werden.

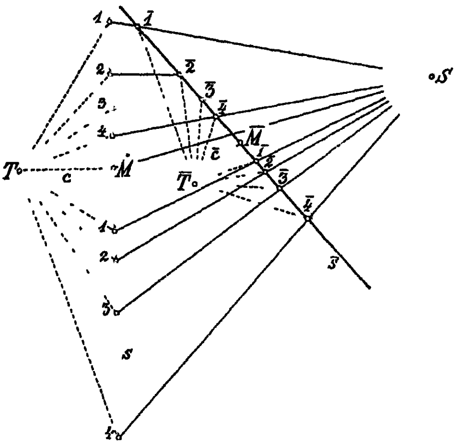


Fig. 245

Die Mittelpunkte M und $\bar{M}$ der beiden Involutionen sind die Fußpunkte der Lote von T und $\bar{T}$ auf s und $\bar{s}$. Sie liegen aber im allgemeinen **nicht** auf einer Geraden durch S, d. h. **dem Mittelpunkt** M **der gegebenen Involution entspricht im allgemeinen nicht der Mittelpunkt** $\bar{M}$ **der neuen Involution.** Aber wenn es sich um eine **hyperbolische** Involution auf s handelt und D_1, D_2 ihre Doppelpunkte sind, liegen die Doppelpunkte $\bar{D}_1, \bar{D}_2$ der neuen Involution auf $\bar{s}$ so, daß $D_1\bar{D}_1$ und $D_2\bar{D}_2$ durch S gehen.

177. Das rechtwinklige Strahlenpaar einer hyperbolischen Strahleninvolution. Eine hyperbolische Strahleninvolution von Paaren a, b mit dem Scheitel S und den Doppelstrahlen d_1, d_2 werde mit einer Parallelen zu d_2 geschnitten, siehe Fig. 246, und D sei der Schnittpunkt der Parallelen mit d_1. Nach dem letzten Satz entsteht auf der Parallelen eine hyperbolische Involution von Punktepaaren A, B, deren einer Doppelpunkt D ist, während der andere unendlich fern liegt, d. h. nach Nr. 172 entsteht eine Spiegelung an D. Also liegt D in der Mitte aller Strecken AB. Soll nun das Paar a, b insbesondere rechtwinklig, also $\sphericalangle ASB$ ein rechter Winkel sein, so muß AB der Durchmesser eines Kreises durch S sein. Mithin müssen dann A, B die Schnittpunkte U, V des Trägers mit dem Kreis um D durch S sein. **Folglich hat eine hyperbolische Strahleninvolution ein, aber auch nur ein rechtwinkliges Strahlenpaar** u, v.

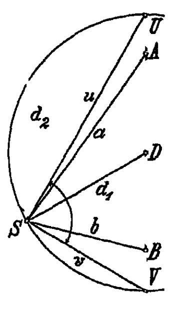


Fig. 246

Liegt insbesondere eine symmetrische Strahleninvolution vor, so sind ihre Doppelstrahlen d_1, d_2 nach Nr. 174 zueinander senkrecht. Deshalb sei ausdrücklich bemerkt, daß dies Paar **nicht** das soeben betrachtete einzig vorhandene rechtwinklige Paar ist, denn zu d_1 gehört ja nicht d_2, sondern d_1 selbst. Vielmehr sind die Strahlen u, v des rechtwinkligen Paares in diesem Fall diejenigen Geraden, die mit d_1 und d_2 Winkel von 45° bilden.

178. Involution bestimmt durch zwei Elementenpaare. Auf einem geradlinigen Träger s seien zwei **verschiedene** Punktepaare A_1, B_1

und A_2, B_2 irgendwie gegeben. Es soll also weder A_1 noch B_1 mit A_2 oder B_2 zusammenfallen. Dann fragt es sich, ob es auf s eine Involution mit den beiden Paaren A_1, B_1 und A_2, B_2 gibt, d. h. ob auf s ein Punkt M derart vorhanden ist, daß

$$MA_1 \cdot MB_1 = MA_2 \cdot MB_2$$

ist. Zur Beantwortung der Frage werde durch A_1 und B_1 irgendein Kreis gelegt, ein zweiter durch A_2 und B_2 so, daß er den ersten in zwei Punkten S und T schneidet, was sich immer erreichen laßt. Nimmt man nun an, die Gerade, die den fraglichen Punkt M mit S verbindet, schneide außer in S den ersten Kreis in T_1 und den zweiten in T_2, so ware

$$MA_1 \cdot MB_1 = MS \cdot MT_1, \qquad MA_2 \cdot MB_2 = MS \cdot MT_2$$

nach dem Satz uber die Sekantenabschnitte von Kreisen. Die Forderung, die darin bestand, daß die linken Seiten dieser beiden Gleichungen ubereinstimmen sollen, kame also auf $MT_1 = MT_2$ hinaus, d. h. T_1 mußte mit T_2 im zweiten gemeinsamen Punkt T beider Kreise zusammenfallen. Folglich ist der Schnittpunkt von s mit ST der einzig in Frage kommende Punkt M, und in der Tat ist für ihn

$$MA_1 \cdot MB_1 = MS \cdot MT = MA_2 \cdot MB_2$$

Siehe Fig. 247a fur den Fall, wo die Paare A_1, B_1 und A_2, B_2 einander trennen, und Fig 247b fur den anderen Fall Demnach sind A_1, B_1 und A_2, B_2 Punktepaare einer Involution mit der Potenz $MS \cdot MT$. Diese Potenz ist im Fall a negativ und im Fall b positiv.

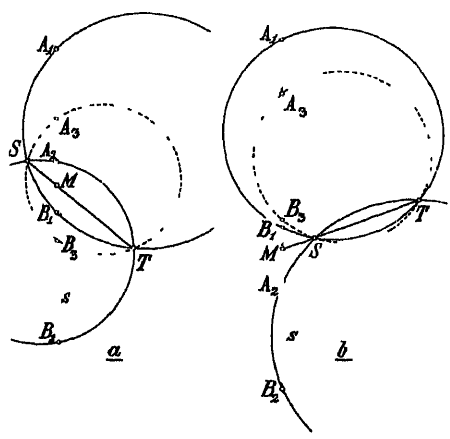


Fig 247

Nunmehr mögen in der Ebene zwei verschiedene Geradenpaare a_1, b_1 und a_2, b_2 durch einen Punkt S gegeben sein, d h. weder a_1 noch b_1 soll mit a_2 oder b_2 zusammenfallen Dann fragt es sich, ob es eine Strahleninvolution mit dem Scheitel S und den Strahlenpaaren a_1, b_1 und a_2, b_2 gibt. Diese Frage wird nach Nr 176 auf die vorige zuruckgeführt, indem man die Figur mit irgendeiner Geraden s in Punktepaaren A_1, B_1 und A_2, B_2 schneidet. Sie ist demnach ebenfalls zu bejahen. Indem wir das Wort Element anwenden, wenn von Punkten einer Geraden oder Strahlen eines Büschels die Rede sein soll, sprechen wir das Ergebnis so aus:

Zwei beliebig gegebene, aber verschiedene Elementenpaare, bei denen also kein Element des einen Paares mit einem des anderen zusammenfällt, gehoren stets einer, aber auch nur einer Involution an.

Die Voraussetzung, daß die beiden gegebenen Elementenpaare verschieden sein sollen, hindert nicht, daß eines der Paare oder jedes aus zusammenfallenden Elementen besteht. Wenn in Fig. 247 z. B. A_1 mit B_1 zusammenfallt, wird aus dem Kreis durch A_1 und B_1 ein den Träger s in diesem Doppelpunkt berührender Kreis.

Um nun weiterhin zu irgendeinem Punkt A_3 von s den vermöge der Involution zugeordneten Punkt B_3 zu bekommen, kann man den Kreis durch A_3, S und T benutzen. Er trifft nämlich s zum zweitenmal in B_3, weil ja für diesen Schnittpunkt offenbar auch $MA_3 \cdot MB_3 = MS \cdot MT$ ist und $MS \cdot MT$ die Potenz der Involution vorstellt. Handelt es sich um eine elliptische Involution, d. h. trennen die beiden gegebenen Punktepaare A_1, B_1 und A_2, B_2 einander, so kann man insbesondere als die Hilfskreise die mit den Durchmessern A_1B_1 und A_2B_2 wählen. Sie schneiden sich in zwei zu s symmetrisch gelegenen Punkten S und T. Dann hat auch der Kreis durch A_3, S und T seinen Mittelpunkt auf s, d. h. auch $\sphericalangle A_3SB_3$ ist ein rechter Winkel. Somit kommt man zu Fig. 243a von Nr. 169 zurück.

Anmerkung. Die Bezeichnung Involution rührt von G. Desargues (Nr. 148) her. Sie findet sich in seinem Buch: „Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres d'un cône avec un plan, et aux événemens des contrariétés d'entre les actions des puissances ou forces“, Paris 1639. Dies Buch ist verschollen, aber Ph. de la Hire (Nr. 73) hat von der ersten Hälfte des Buches 1679 eine Abschrift gemacht, die von M. Chasles (Nr. 5) ans Licht gezogen wurde, siehe seine „Note sur les ouvrages de Desargues“, Comptes rendus de l'Acad. des sciences, 20. Bd. 1845, S. 1550—1554. Ein Abdruck der Abschrift findet sich in den bei Nr. 148 genannten und von N. G. Poudra herausgegebenen „Oeuvres de Desargues“, 1. Bd. Paris 1864, S. 103—230, im Anschluß daran S. 231—232 ein Abdruck der Bemerkungen, wodurch de la Hire bekräftigt, daß die Abschrift von ihm herrührt. Auf S. 119 des Abdrucks definiert Desargues als Involution von drei Punktepaaren A_1, B_1 — A_2, B_2 — A_3, B_3 auf einer Geraden diejenige Beziehung, die zwischen ihnen durch die Forderung

$$MA_1 \cdot MB_1 = MA_2 \cdot MB_2 = MA_3 \cdot MB_3$$

ausgedrückt wird (seine Bezeichnungen sind andere, auch braucht er keine Formeln, sondern drückt die Eigenschaft in Worten aus).

Man kann diese Bedingungen vom Punkt M frei machen, so daß man zu einer Bedingung kommt, die nur die Entfernungen der Punkte der drei Paare voneinander enthält. Bringt man nämlich auf der Geraden s einen Pfeil an und rechnet man allgemein eine auf der Geraden gelegene Strecke PQ positiv oder negativ, je nachdem der Sinn von P nach Q dem Pfeil entspricht oder ihm entgegen ist, so kann man alle Strecken als Summen aus der Strecke MA_1 und anderen Strecken darstellen. So z. B. ist $MB_1 = MA_1 + A_1B_1$ usw. Die beiden Gleichungen

$$MA_1 \cdot MB_1 = MA_2 \cdot MB_2,$$
$$MA_1 \cdot MB_1 = MA_3 \cdot MB_3$$

ergeben demnach:

$$MA_1 (MA_1 + A_1B_1) = (MA_1 + A_1A_2)(MA_1 + A_1B_2),$$
$$MA_1 (MA_1 + A_1B_1) = (MA_1 + A_1A_3)(MA_1 + A_1B_3)$$

oder nach Auflösen der Klammern:

$$MA_1 (A_1B_1 - A_1A_2 - A_1B_2) = A_1A_2 \cdot A_1B_2,$$
$$MA_1 (A_1B_1 - A_1A_3 - A_1B_3) = A_1A_3 \cdot A_1B_3$$

oder einfacher

$$MA_1 (A_2B_1 - A_1B_2) = A_1A_2 \cdot A_1B_2,$$
$$MA_1 (A_3B_1 - A_1B_3) = A_1A_3 \cdot A_1B_3.$$

Das mit M behaftete Glied MA_1 fällt durch Division beider Gleichungen heraus. Dann geht hervor:

$$(A_2B_1 - A_1B_2)A_1A_3 \cdot A_1B_3 = (A_3B_1 - A_1B_3)\, A_1A_2 \cdot A_1B_2.$$

Hier kann man A_1A_3 durch $A_1B_2 - A_3B_2$ und A_1A_2 durch $A_1B_3 - A_2B_3$ ersetzen. Dann ergibt sich nach der Auflösung der Klammern und gehöriger Ordnung:

$$A_1B_2 \cdot A_2B_3 \cdot A_3B_1 - A_1B_3 \cdot A_2B_1 \cdot A_3B_2 +$$
$$+ (A_1B_3 - A_1B_2 + A_2B_1 - A_2B_3 + A_3B_2 - A_3B_1)\, A_1B_2 \cdot A_1B_3 = 0$$

Nun aber ist $A_1B_3 - A_1B_2 = B_2B_3$, $A_2B_1 - A_2B_3 = B_3B_1$, $A_3B_2 - A_3B_1 = B_1B_2$, demnach der Inhalt der Klammer gleich der Summe $B_2B_3 + B_3B_1 + B_1B_2$, die augenscheinlich gleich Null ist. Folglich geht schließlich die Bedingung in dieser übersichtlichen Form hervor.

$$A_1B_2 \cdot A_2B_3 \cdot A_3B_1 = A_1B_3 \cdot A_2B_1 \cdot A_3B_2 .$$

Dies also ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß drei Punktepaare $A_1, B_1 - A_2, B_2 - A_3, B_3$ in Involution liegen.

Allerdings ist zu bemerken, daß diese Involutionsbeziehung zwischen drei Punktepaaren schon lange vor Desargues vorkam, nämlich bei Pappus von Alexandria (vermutlich gegen Ende des dritten Jahrhunderts n. Chr.), siehe „Pappi Alexandrini collectiones", herausgeg von Friedr Hultsch, 2 Bd Berlin 1877, S. 873, außerdem bei anderen Aber erst Desargues gab ihr den Namen, den er übrigens nicht weiter begründete, und erkannte ihre große Bedeutung für die Geometrie

179. Schnitte von Kreisbüscheln mit Geraden. In der letzten Nummer ergab sich, daß jeder Kreis durch die Punkte S und T, der die Gerade s trifft, sie in einem Punktepaar der betrachteten Involution schneidet. Die Gesamtheit aller Kreise der Ebene, die durch zwei feste Punkte S und T gehen, heißt ein Kreisbüschel mit den Scheiteln S und T. Man hat also den Satz:

Ein Kreisbüschel wird von jeder Geraden in einer Involution geschnitten.

Der Mittelpunkt dieser Involution ist derjenige Punkt M, in dem die Sekante ST die schneidende Gerade s trifft. Die Involution ist elliptisch oder hyperbolisch, je nachdem s die Gerade ST zwischen S und T oder außerhalb der Sehne ST schneidet. So schneidet die Gerade s_e in Fig. 248 aus dem Kreisbüschel eine elliptische Involution mit dem Mittelpunkt M_e, die Gerade s_h eine hyperbolische Involution mit dem Mittelpunkt M_h aus. Dagegen würde eine durch S oder T gehende Gerade eine ausgeartete oder parabolische Involution ausschneiden (Nr. 171). Im Falle der hyperbolischen Involution auf s_h sind die Doppelpunkte diejenigen Punkte D_1 und D_2, in denen s von Kreisen des Büschels berührt wird. Da M_h außerhalb aller Kreise des Büschels liegt, gehen von M_h an alle Kreise Tangenten. Sie sind sämtlich gleich dem geometrischen Mittel von M_hS und M_hT, so daß ihre Berührungspunkte auf einem Kreis um M_h liegen, der demnach alle Kreise des Büschels rechtwinklig schneidet. Da man nun, um eine hyperbolische Involution zu bekommen, die Gerade s_h durch einen beliebigen Punkt M_h der Geraden ST außerhalb der Strecke ST legen kann, ergeben sich unendlich viele derartige Kreise. Die Schar

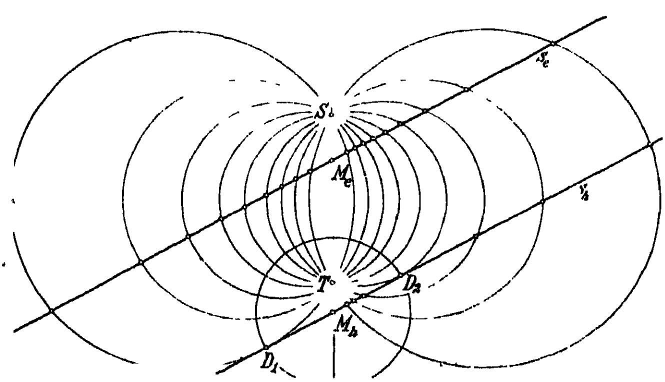


Fig 248

dieser das ursprüngliche Kreisbüschel rechtwinklig schneidenden Kreise wird auch ein Kreisbüschel genannt; ihm kommen aber keine Scheitel zu. Der oben aufgestellte Satz über den Schnitt eines Kreisbüschels mit einer Geraden gilt auch für dies Büschel. Dies erkennt man wie folgt.

Ist s eine beliebige Gerade, so möge sie irgendeinen Kreis dieses zweiten Büschels in A' und B' schneiden, siehe Fig. 249, worin mehrere Kreise des zweiten Büschels dargestellt sind. Der Mittelpunkt M des Kreises liegt auf der Geraden ST und außerhalb der Strecke ST. Die Mittelsenkrechte von ST, d. h. der Ort der Mitten aller Kreise des ersten Büschels, das in Fig. 249 nicht dargestellt ist, schneide s in M'. Der Kreis um M' durch S und T gehört dem ersten Büschel an und schneidet daher den Kreis um M rechtwinklig in zwei Punkten P und Q derart, daß $M'P$ und $M'Q$ die Tangenten von M' an den Kreis um M sind. Also ist $M'A \cdot M'B' = M'P^2 = M'Q^2 = M'S^2$. Für alle auf diese Art hervorgehenden Punktepaare A', B' auf s ist daher das Produkt $M'A' \cdot M'B'$ ein und dieselbe positive Größe $M'S^2$, d. h. alle diese Punktepaare machen eine hyperbolische Involution mit dem Mittelpunkt M' aus.

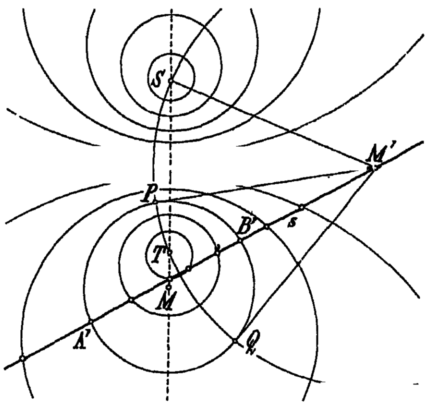


Fig 249

Wenn S und T zusammenrücken, liefert das erste Büschel die Gesamtheit aller Kreise, die eine Gerade g in einem Punkt S berühren. Das zweite Büschel besteht dann aus allen Kreisen durch S, deren Mittelpunkte auf g liegen, so daß alle diese Kreise die zu g senkrechte Gerade durch S berühren. Das zweite Büschel ist also in diesem Fall ebenso wie das erste beschaffen, und eine beliebige nicht durch S gehende Gerade schneidet jedes Büschel in einer hyperbolischen Involution.

Liegen irgend zwei Kreise k_1 und k_2 in der Ebene vor, so gehören sie allemal einem Kreisbüschel an. Dies ist ohne weiteres klar, wenn sich die Kreise schneiden oder berühren. Haben die Kreise keinen Punkt gemein, so kommt man zu einem Büschel von der zweiten Art. Dies beweist man so: Die Gerade s durch die Mittelpunkte M_1 und M_2 schneide k_1 in A_1', B_1' und k_2 in A_2', B_2'. Diese Punktepaare trennen einander nicht und gehören daher nach Nr. 178 einer hyperbolischen Involution an. Da der Mittelpunkt M' der Involution weder das eine noch das andere Punktepaar trennt, liegt er außerhalb beider Kreise, und wegen $M'A_1' \cdot M'B_1' = M'A_2' \cdot M'B_2'$ sind die Tangenten von M' an beide Kreise gleich lang. Mithin gibt es einen Kreis k' um M', der k_1 und k_2 senkrecht schneidet. Er treffe s in S und T. Die Gesamtheit aller Kreise durch S und T bildet ein Büschel von der ersten Art, und daher gehören die Kreise k_1 und k_2 zu demjenigen Büschel von der zweiten Art, das dieses überall senkrecht schneidet.

Anmerkung. Durch Rechnung läßt sich zeigen, daß alle diejenigen Kreise, die alle Kreise durch zwei Punkte S und T senkrecht schneiden, die Mittelsenkrechte von ST in denselben beiden imaginären Punkten treffen. Man kann daher die drei Arten von Kreisbüscheln so kennzeichnen. Entweder haben alle Kreise des Büschels zwei verschiedene reelle Punkte oder zwei zusammenfallende reelle Punkte, d. h. einen Punkt und seine Tangente, oder zwei verschiedene imaginäre Punkte gemein.

***180. Maßbeziehungen bei einer Punktinvolution**[1]. Auf dem Träger s einer Punktinvolution sei ein Pfeil und irgendwo ein sogenannter Anfangspunkt O angebracht. Dann kann als Bestimmungsgröße oder Koordinate irgendeines Punktes P auf s die Strecke OP dienen, positiv oder negativ, je nachdem der Sinn von O nach P dem Pfeil entspricht oder ihm entgegen ist. Der Mittelpunkt M der Involution habe die Koordinate $OM = m$, und es sei $-c^2$ oder $+c^2$ die Potenz der Involution. Sind $OA = x$ und $OB = y$ die Koordinaten irgendeines Punktepaares A, B der Involution, so folgt aus $MA \cdot MB = \mp c^2$ die Gleichung

$$(x - m)(y - m) = \mp c^2$$

oder ausgerechnet

$$xy - m(x + y) + m^2 \pm c^2 = 0 .$$

Hier gilt das obere oder untere Vorzeichen, je nachdem es sich um eine elliptische oder hyperbolische Involution handelt. Die Gleichung heißt bilinear, weil sie jede der beiden veränderlichen Koordinaten x und y linear enthält. Die allgemeinste bilineare Gleichung hat die Form

$$hxy + kx + ly + n = 0 ,$$

wo h, k, l, n Konstanten bedeuten. Da sie, falls h und l nicht gleich Null sind, d. h. falls y wirklich in der Gleichung auftritt, nach y auflösbar ist:

$$y = -\frac{kx + n}{hx + l},$$

bestimmt sie zu jedem beliebigen x ein y, d. h. zu jedem beliebigen Punkt A auf s einen zugeordneten Punkt B. Aber diese Zuordnung ist im allgemeinen keine Involution. Wenn man ein bestimmtes x wählt und vermöge der Gleichung das zugehörige y berechnet, müßte sich im Falle der Involution zeigen, daß, sobald man für x den gefundenen Wert y setzt und dann das zugehörige y berechnet, wieder der ursprüngliche Wert x hervorgeht. Mithin ist zu verlangen, daß sich die bilineare Gleichung nicht ändert, wenn man x mit y vertauscht. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn $l = k$ ist, d. h. wenn die bilineare Gleichung insbesondere die symmetrische Form

$$hxy + k(x + y) + n = 0$$

hat.

Im Fall $h \neq 0$ ergibt sich nun nach Division mit h und einfacher Umformung

$$\left(x + \frac{k}{h}\right)\left(y + \frac{k}{h}\right) = \frac{k^2 - nh}{h^2}.$$

[1]) Die mit Sternchen versehenen Nummern sind überschlagbar.

Diese Gleichung stimmt mit der ersten Gleichung

$$(x - m)(y - m) = \mp c^2$$

überein, wenn man

$$m = -\frac{k}{h}, \qquad \mp c^2 = \frac{k^2 - nh}{h^2}$$

wählt. Mithin definiert die allgemeine symmetrische bilineare Gleichung

$$hxy + k(x + y) + n = 0$$

eine elliptische oder hyperbolische Involution, je nachdem $k^2 - nh$ negativ oder positiv ist. Im Falle $h = 0$ ergibt sich die bloß lineare symmetrische Gleichung

$$k(x + y) + n = 0 \qquad \text{oder} \qquad x + y = -\frac{n}{k}.$$

Sie besagt, daß jedes Punktepaar A, B denjenigen Punkt D, dessen Koordinate $-\frac{1}{2}n : k$ ist, zur Mitte hat, d. h. es liegt die Spiegelung am Punkt D vor, also eine hyperbolische Involution mit unendlich fernem Mittelpunkt (Nr. 172).

181. Parallelprojektion mehrerer rechter Winkel einer Ebene. Jetzt kehren wir endlich zur Fragestellung in Nr. 169 zurück. Auf der Tafel seien drei Geradenpaare $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1 - \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2 - \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3$ durch einen gemeinsamen Punkt $\mathfrak{S}$ gegeben. Die Frage ist, ob sie als Parallelprojektion dreier rechtwinkliger Geradenpaare $a_1, b_1 - a_2, b_2 - a_3, b_3$ einer Ebene aufgefaßt werden dürfen. Da diese rechtwinkligen Paare einer rechtwinkligen elliptischen Strahleninvolution angehören würden, müssen die drei gegebenen Paare der Projektion dieser Involution, d. h. nach Nr. 175 einer elliptischen Strahleninvolution angehören. Ist dies der Fall, so steht aber auch nach Nr. 175 fest, daß diese elliptische Involution stets in eine rechtwinklige projiziert werden kann, d. h.:

Drei auf der Tafel vorliegende Strahlenpaare $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1 - \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2 - \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3$ durch einen Punkt sind dann, aber auch nur dann die Parallelprojektion dreier rechtwinkliger Strahlenpaare einer Ebene, wenn sie alle drei einer elliptischen Strahleninvolution angehören.

Nach Nr. 178 ist nun diese elliptische Involution schon vollständig bestimmt, wenn nur die beiden ersten Strahlenpaare $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2$ vorliegen, und zwar können sie beliebig gewählt werden, falls sie sich nur trennen. Man erkennt also, daß weiterhin zwar $\mathfrak{a}_3$ beliebig angenommen werden darf, dann aber $\mathfrak{b}_3$ vollkommen bestimmt ist.

Hiervon machen wir eine wichtige Anwendung, indem wir die Frage beantworten, wie man eine beliebige Parallelprojektion mehrerer Rechtflache (Nr. 52) zu zeichnen hat, die auf einer und derselben Ebene stehen. Diese Aufgabe ist insbesondere für architektonische Zwecke von Bedeutung, da die auf einer Ebene stehenden Bauwerke meistens auf die Grundform von Rechtflachen zurückgeführt werden können.

Ein einzelnes Rechtflach kann in Parallelprojektion willkürlich gezeichnet werden, wenn man nur auch im Bilde die zueinander parallelen Kanten als Parallelen darstellt (Nr. 154), so z. B. das erste Rechtflach in Fig. 250. Soll nun ein zweites, auf derselben Ebene stehendes Rechtflach dargestellt werden, so kann man nach dem Vorhergehenden seine Grundkanten ebenfalls beliebig annehmen mit der einzigen Einschrankung, daß die Parallelen $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$ zu den Grundkanten des ersten und zweiten Rechtflachs, die man durch irgendeinen Punkt $\mathfrak{S}$ ziehen kann, einander trennen. So ist das zweite Rechtflach in Fig. 250 hergestellt worden. Will man nun irgendein drittes Rechtflach zeichnen, das auf derselben Grundebene steht, so darf man nur noch eine Grundkantenrichtung, also etwa die der Kante $\mathfrak{g}$, nach Belieben annehmen. Die Richtung der anstoßenden Grundkante $\mathfrak{h}$ ergibt sich dann so: Man zieht durch $\mathfrak{S}$ die Parallele $\mathfrak{a}_3$ zu $\mathfrak{g}$. Darauf schneidet man $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ mit irgendeiner nicht durch $\mathfrak{S}$ gehenden Geraden s. Sind $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ die Schnittpunkte, so werden die Kreise mit den Durchmessern $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$ einander zweimal schneiden, da die Paare $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$ einander trennen. Einer der Schnittpunkte sei S. Nun ist S der Scheitel einer rechtwinkligen elliptischen Strahleninvolution, deren beide ersten Strahlenpaare die von S nach $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ und nach $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$ sind. Folglich ist in S das Lot auf $S\mathfrak{A}_3$ zu errichten und mit s in $\mathfrak{B}_3$ zum Schnitt zu bringen. Dann ist $\mathfrak{S}\mathfrak{B}_3$ oder $\mathfrak{b}_3$ der zu $\mathfrak{a}_3$ gehörige zweite Strahl der Involution mit dem Scheitel $\mathfrak{S}$, d. h. die Grundkante $\mathfrak{h}$ des dritten Rechtflachs muß zu $\mathfrak{b}_3$ parallel gezogen werden. In Fig 250 ist die Hilfsgerade s wagerecht angenommen, das ist aber nicht nötig. Wenn man irgendeine andere Hilfsgerade s benutzte, würde man denselben Strahl $\mathfrak{b}_3$ erhalten.

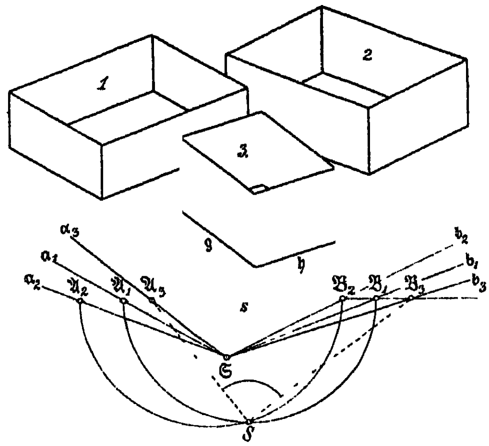


Fig 250

In derselben Weise kann man beliebig viele auf derselben Grundebene stehende Rechtflache in Parallelprojektion zeichnen. *Die vorstehend angegebene Konstruktion ist grundlegend für die Darstellung mehrerer rechtwinkliger Bauwerke in derjenigen Ansicht, die wir als die Vogelschau bezeichnet hatten* (Nr. 166).

182. Involution der konjugierten Durchmesser einer Ellipse. Da die rechtwinkligen Durchmesserpaare eines Kreises eine elliptische Involution bilden, ergibt sich nach Nr. 72 und 175: *Die konjugierten Durchmesserpaare einer Ellipse bilden eine elliptische Involution. Umgekehrt: Liegt eine elliptische Strahleninvolution vor, so gibt es stets eine Ellipse, deren konjugierte Durchmesser-*

paare auf den Strahlenpaaren dieser Involution liegen. Aus diesem Grunde haben die elliptischen Strahleninvolutionen und infolgedessen auch die elliptischen Punktinvolutionen ihren Namen erhalten.

Der Satz von Nr. 175, wonach eine elliptische Strahleninvolution entweder nur ein rechtwinkliges Strahlenpaar oder lauter rechtwinklige Strahlenpaare hat, besagt dasselbe wie der Satz von Nr. 72, wonach eine Ellipse entweder nur ein rechtwinkliges konjugiertes Durchmesserpaar, die Achsen, oder lauter rechtwinklige konjugierte Durchmesserpaare hat. Der zweite Fall ist der des Kreises.

Gibt man zwei von einem Punkt 𝔐 ausgehende Paare von Geraden $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$ in der Ebene, so liegen auf ihnen dann und nur dann konjugierte Durchmesserpaare einer Ellipse mit dem Mittelpunkt 𝔐, wenn die Paare einander trennen. Zu jeder fernerhin durch 𝔐 angenommenen Geraden $\mathfrak{a}_3$ erhalt man dann diejenige Gerade $\mathfrak{b}_3$, auf der sich der zum Durchmesser $\mathfrak{a}_3$ konjugierte Durchmesser befindet, indem man die in Fig 250 der letzten Nummer dargestellte Konstruktion anwendet.

Die Aufgabe, die Richtungen der Achsen einer Ellipse zu finden, wenn die Richtungen zweier konjugierter Durchmesserpaare gegeben sind, ist hiernach leicht zu losen. Sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$ in Fig. 250 der letzten Nummer die gegebenen Paare, so hat man in der Affinitat, die zwischen den Strahlen von 𝔖 nach $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$ sowie von S nach $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$ besteht und bei der s die Affinitatsachse ist, diejenigen rechten Winkel mit den Scheiteln S und 𝔖 zu bestimmen, die einander als affin entsprechen. Dies geschieht nach Nr 127.

Liegt eine elliptische Strahleninvolution mit dem Scheitel 𝔐 vor, so sind alle diejenigen Ellipsen, deren konjugierte Durchmesserpaare dieser Involution angehoren, einander ahnlich und ahnlich gelegen mit dem gemeinsamen Mittelpunkt 𝔐. Denn durch eine geeignete Parallelprojektion oder Affinitat kann man die Involution in eine rechtwinklige verwandeln Dann aber mussen alle diese Ellipsen in Kreise übergehen Da diese Kreise konzentrisch sind, entsprechen ihnen in der Tat lauter ahnliche und ahnlich gelegene konzentrische Ellipsen.

183. Übungen. 1) Gegeben seien zwei Kreise, die sich nicht schneiden Gesucht irgendein Kreis desjenigen Kreisbuschels, dem die beiden gegebenen Kreise angehoren (Nr. 179).

2) Gegeben sei ein Parallelogramm 𝔄𝔅ℭ𝔇. Durch seine Mitte 𝔐 sei irgendeine Gerade $\mathfrak{a}$ gezogen. Das Parallelogramm kann als eine Parallelprojektion eines Quadrates $ABCD$ aufgefaßt werden. Dabei ist $\mathfrak{a}$ das Bild einer durch die Mitte M des Quadrats gehenden Geraden a in der Quadratebene. Wie ergibt sich das Bild $\mathfrak{b}$ der zu a senkrechten Geraden b durch die Quadratmitte? Die Parallelen zu den Parallelogrammseiten und die Diagonalen des Parallelogramms sind Strahlenpaare einer elliptischen Involution, zu der auch das Paar $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ gehört.

3) Dieselbe Aufgabe kann man auch so lösen: Schneidet $\mathfrak{a}$ die Seite 𝔄𝔅 des Parallelogramms in 𝔛, so ziehe man durch 𝔛 die Parallele zur Diagonale 𝔅𝔇. Sie schneide 𝔄𝔇 in 𝔜. Die Parallele zu 𝔄𝔅 durch 𝔜 treffe 𝔅ℭ in 𝔷. Die gesuchte Gerade $\mathfrak{b}$ geht durch 𝔷. Man beweise

diese Konstruktion, indem man das Parallelogramm als Projektion eines Quadrats auffaßt.

4) Wie in Fig. 250 von Nr. 181 seien zwei Rechtflache, die auf derselben Ebene ruhen, in Parallelprojektion dargestellt. Wie hat man ein drittes Rechtflach zu zeichnen, das auf derselben Ebene ruht und dessen Grundrechteck auch im Bilde rechteckig erscheinen soll? Diese Aufgabe ist dieselbe wie die in Nr. 182 besprochene Aufgabe, die Achsenrichtungen einer Ellipse aus den Richtungen zweier konjugierter Durchmesserpaare zu ermitteln.

5) Von einer Ellipse sind die Richtungen zweier konjugierter Durchmesserpaare gegeben. Außerdem sei die Länge der Hauptachse gegeben. Gesucht wird die Länge der Nebenachse sowie die Lage beider Achsen (Nr. 182).

§ 8. Polareigenschaften des Kreises und der Ellipse[1]).

184. Harmonische Punktepaare. Wenn eine Strecke AB in einem gegebenen Verhältnis geteilt werden soll, aber das Vorzeichen des Verhältnisses nicht vorgeschrieben ist, ergeben sich nach Nr. 9 zwei Teilpunkte C und D, ein innerer und ein äußerer. Zum inneren gehört der negative, zum äußeren der positive Wert des Verhältnisses. Man sagt, daß C und D die Strecke AB *harmonisch* teilen. Wenn man wie in Nr. 169 einen Pfeil auf der Geraden AB anbringt und die Strecken auf der Geraden positiv oder negativ rechnet, je nachdem sie dem Pfeilsinn entsprechen oder nicht, ist die Bedingung der harmonischen Teilung

$$AC \cdot BC = -AD \cdot BD.$$

Sie bleibt dieselbe, wenn C mit D vertauscht wird. Es ist also gleichgültig, welcher der Teilpunkte C, D der innere sein soll. Die Bedingung läßt sich so umformen

$$AC \cdot AD = -BC \cdot BD$$

oder auch, da $AC = -CA$ usw. ist

$$CA \cdot DA = -CB \cdot DB.$$

Jetzt aber besagt sie, daß A und B die Strecke CD harmonisch teilen. Also gilt der Satz:

Wird eine Strecke AB durch ein Punktepaar C, D harmonisch geteilt, so wird auch die Strecke CD durch das Punktepaar A, B harmonisch geteilt. Man braucht deshalb gar nicht anzugeben, welches der beiden Punktepaare das ursprüngliche sein soll, und man pflegt zu sagen, daß die beiden Punktepaare einander harmonisch trennen, oder spricht kurz von zwei harmonischen Punktepaaren.

Da Teilverhältnisse durch Parallelprojektion nicht geändert werden, leuchtet ein, daß *zwei harmonische Punktepaare vermöge Parallelprojektion oder Affinität wieder in zwei harmonische Punktepaare übergehen.*

Schließlich sei noch daran erinnert, wie man eine harmonische Teilung herstellt: Sind A und B gegeben, so zieht man durch A und B parallele

[1]) Vgl. die Fußnote zu § 7 auf S. 228.

Geraden, siehe Fig. 251; auf der einen trägt man irgendeine Strecke m von A aus ab, auf der anderen irgendeine Strecke n von B aus, diese aber nach beiden Seiten hin. Dann liefert der Schnitt der Geraden AB mit den Geraden, die den Endpunkt von m mit den Endpunkten der beiden Strecken n verbinden, ein zu A, B harmonisches Punktepaar C, D. Sind A, B und C gegeben, so erhält man durch andere Reihenfolge derselben Konstruktion den zugehörigen vierten Punkt D. Liegt C in der Mitte von AB, so liegt D unendlich fern.

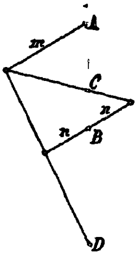


Fig 251

Anmerkung: Die harmonische Teilung einer Strecke war schon den griechischen Mathematikern des Altertums geläufig. Die Bezeichnung der Punktepaare als harmonische Paare wurde erst durch Ch. Brianchon (Nr. 150) eingeführt, siehe „Mémoire sur les lignes du second ordre; faisant suite aux recherches publiées dans les journaux de l'école royale polytechnique", Paris 1817, S. 8, 9.

185. Gesamtheit der zu einem Punktepaar harmonischen Punktepaare. Sind $C_1, D_1 - C_2, D_2$ usw. zu A, B harmonische Punktepaare, siehe Fig. 252, so seien von einem Punkte S außerhalb des Tragers s dieser Punktepaare die Geraden $a, b - c_1, d_1 - c_2, d_2$ usw. nach den Punkten gezogen. Diese Geraden werden von der zu a parallelen Geraden $\mathfrak{s}$ durch B in Punktepaaren geschnitten. Das erste Paar besteht aus dem unendlich fernen Punkt und aus B, das zweite sei das Paar $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_1$, das dritte das Paar $\mathfrak{C}_2, \mathfrak{D}_2$ usw. Nun ist abgesehen vom Vorzeichen

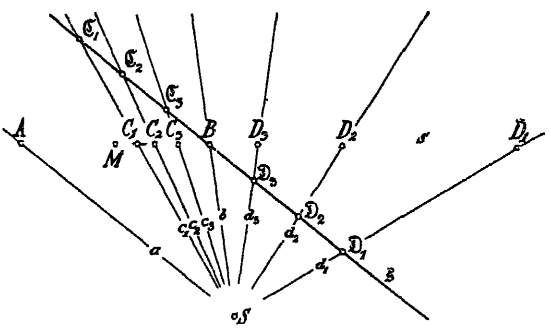


Fig 252

$AC_1 : BC_1 = AS \cdot B\mathfrak{C}_1$ und $AD_1 : BD_1 = AS : B\mathfrak{D}_1$, also, da die Verhaltnisse $AC_1 \cdot BC_1$ und $AD_1 : BD_1$ abgesehen vom Vorzeichen einander gleich sind, $B\mathfrak{C}_1 = B\mathfrak{D}_1$. Ebenso ist $B\mathfrak{C}_2 = B\mathfrak{D}_2$ usw. Die Punktepaare $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_1 - \mathfrak{C}_2, \mathfrak{D}_2$ usw. haben somit B als Mitte, d. h. sie bilden eine hyperbolische Punktinvolution mit dem im Endlichen gelegenen Doppelpunkt B und dem unendlichfernen Doppelpunkt (Nr. 172). Demnach bilden die Strahlenpaare $c_1, d_1 - c_2, d_2$ usw. eine hyperbolische Strahleninvolution (Nr. 174). Folglich gibt ihr Schnitt mit s die hyperbolische Punktinvolution mit den Doppelpunkten A und B (Nr 176) Dieser Schnitt besteht aber aus den Punktepaaren $C_1, D_1 - C_2, D_2$ usw. Somit gilt der Satz:

Alle zu einem Punktepaar A, B harmonischen Punktepaare machen die hyperbolische Punktinvolution mit den Doppelpunkten A und B aus.

Ist M der Mittelpunkt dieser hyperbolischen Punktinvolution (Nr. 170), d. h. die Mitte zwischen den Doppelpunkten A und B, so ist daher:

$$MC_1 \cdot MD_1 = MC_2 \cdot MD_2 = \ldots = MA^2 = MB^2 .$$

Da auch C_1D_1 nach Nr 184 durch A und B harmonisch geteilt wird, liegt die Mitte N_1 von C_1D_1 so, daß ebenfalls $N_1A \cdot N_1B = N_1C_1^2 = N_1D_1^2$ ist. Somit gilt für harmonische Paare A, B und C, D der Satz:

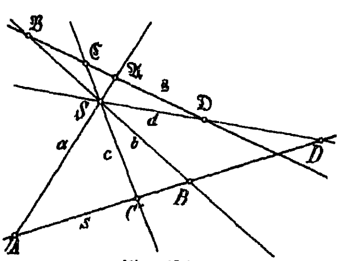
Sind A, B und C, D harmonische Punktepaare und ist M die Mitte von AB sowie N die Mitte von CD, so ist

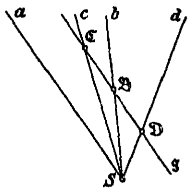
$$MC \cdot MD = MA^2 = MB^2, \qquad NA \cdot NB = NC^2 = ND^2.$$

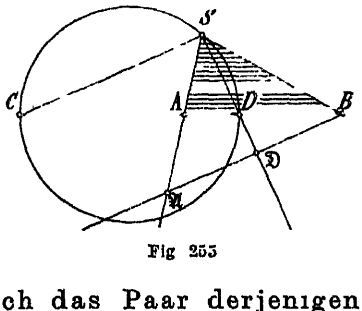
186. Harmonische Strahlenpaare. Sind A, B und C, D harmonische Punktepaare und sind a, b und c, d die Geraden, die diese Punkte mit irgendeinem außerhalb der Geraden $ABCD$ gelegenen Punkt S verbinden, so heißen a, b und c, d harmonische Strahlenpaare. Man sagt auch, daß jedes dieser Strahlenpaare das andere harmonisch trennt. Aus der letzten Nummer folgt sofort.

Alle Strahlenpaare $c_1, d_1 - c_2, d_2$ usw., die ein Strahlenpaar a, b harmonisch trennen, bilden die hyperbolische Strahleninvolution mit den Doppelstrahlen a, b. Auch die Umkehrung gilt: Jedes Strahlenpaar einer hyperbolischen Strahleninvolution trennt das Paar der Doppelstrahlen der Involution harmonisch

Nach Nr. 176 folgt daraus: Zwei harmonische Strahlenpaare werden von jeder Geraden, die nicht durch ihren Scheitel geht, in harmonischen Punktepaaren geschnitten. Wenn also A, B und C, D in Fig 253 harmonische Punktepaare auf einer Geraden s sind, werden die Strahlen a, b und c, d von irgendeinem Punkte S nach A, B und C, D von jeder Geraden 𝔰 in harmonischen Punktepaaren 𝔄, 𝔅 und ℭ, 𝔇 geschnitten. Wählt man insbesondere die schneidende Gerade 𝔰 als eine Parallele zu SA, so kommt man zu Fig. 252 der letzten Nummer zurück, d. h. dann wird 𝔅 die Mitte von ℭ𝔇, während 𝔄 unendlich fern liegt. Sind drei Strahlen a, b, c durch einen Scheitel S gegeben und will man denjenigen Strahl d durch S finden, der zusammen mit c das Strahlenpaar a, b harmonisch teilt, so kann man daher so verfahren. Man zieht zu a eine Parallele 𝔤, siehe Fig. 254, die b und c in 𝔅 und ℭ treffe, und bestimmt 𝔇 auf 𝔤 so, daß 𝔅 die Mitte von ℭ𝔇 ist. Alsdann ist S𝔇 der gesuchte Strahl d. Wird insbesondere der Winkel (a, b) durch c in gleiche Teile geteilt, so ist $𝔅ℭ = 𝔅S$, so daß d zu c senkrecht wird, d. h.: Ein Strahlenpaar wird insbesondere durch das Paar derjenigen Strahlen, die seine beiden Winkel in gleiche Teile zerlegen, harmonisch getrennt. Da nun zwei harmonische Strahlen-


Fig 253


Fig 254


Fig 255

paare durch jede Gerade in harmonischen Punktepaaren getroffen werden, folgt hieraus weiterhin: **Diejenigen beiden Geraden, die den Winkel S eines Dreiecks ASB sowie den Nebenwinkel in gleiche Teile zerlegen, teilen die Dreiecksseite AB innerlich und äußerlich in demselben Verhältnis**, siehe Fig. 255. Sind C und D die Teilpunkte und schneidet die Parallele zu SC durch B die Strahlen SA und SD in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$, so ist $\mathfrak{D}$ die Mitte von $B\mathfrak{A}$, also $SB = S\mathfrak{A}$ und daher $SA : SB = SA : S\mathfrak{A}$, ohne Rücksicht aufs Vorzeichen. Es ist aber $SA : S\mathfrak{A} = CA : CB = DA : DB$. Sind nur die beiden Punkte A und B gegeben und wird dem Punkt S vorgeschrieben, er solle sich in der Ebene so bewegen, daß $SA : SB$ ein gegebenes Verhaltnis bewahrt, so teile man AB in C und D innerlich und äußerlich in diesem Verhaltnis. Alsdann besagt das Vorhergehende, daß SC und SD die Winkel von SA und SB in gleiche Teile zerlegen, daher $\sphericalangle CSD$ ein rechter Winkel ist. Mithin geht der bekannte Satz hervor: **Der Ort derjenigen Punkte S der Ebene, deren Abstände von zwei festen Punkten A und B ein konstantes Verhältnis haben, ist ein Kreis.** Die Endpunkte eines Durchmessers dieses Kreises sind die zu A, B harmonischen Punkte C, D, die AB innerlich und außerlich in dem konstanten Verhaltnis teilen.

187. Vollständiges Viereck. Irgendwelche vier Punkte A, B, C, D der Ebene bestimmen ein Viereck. Insgesamt gibt es sechs Geraden, die je zwei der vier Punkte verbinden. Man bezeichnet vier von ihnen als die Seiten, die beiden anderen als die Diagonalen des Vierecks, sobald man unter dem Viereck die Flache verstehen will, die von den vier ausgewahlten Seiten begrenzt wird. Hier jedoch, wo diese Flache nicht in Betracht gezogen werden soll, ist eine derartige Unterscheidung nur willkurlich und storend. Jetzt sollen vielmehr alle sechs Geraden, die je zwei der Punkte A, B, C, D verbinden, die Seiten des Vierecks heißen, und zwar in beliebiger Ausdehnung bis ins Unendlichferne. Bei dieser Auffassung nennt man $ABCD$ ein **vollstandiges Viereck**, siehe Fig. 256.

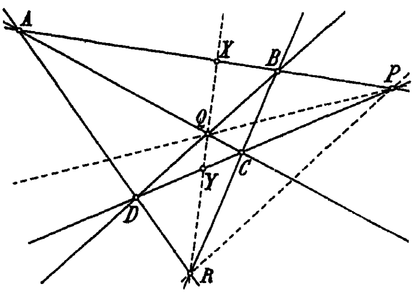


Fig. 256

Wird eine Seite herausgegriffen, so werden damit auch diejenigen zwei Ecken herausgegriffen, die auf ihr liegen. Die durch die beiden anderen Ecken bestimmte Seite heißt die Gegenseite der zuerst gewahlten Seite. Es gibt also drei Paare von Gegenseiten, namlich AB, CD — AC, BD — AD, BC. Jedes Paar von Gegenseiten hat einen Schnittpunkt. Diese drei Schnittpunkte P, Q, R heißen die **Diagonalpunkte**. Ihr Dreieck PQR wird das Diagonaldreieck genannt, und die Seiten PQ, QR, RP dieses Dreiecks heißen die **Diagonalen** des vollständigen Vierecks. Dieser Begriff der Diagonalen ist also ein ganz anderer als der gewöhnliche. **Ein vollstandiges Viereck hat somit vier Ecken, sechs Seiten, drei Diagonalpunkte und drei Diagonalen.**

Wir greifen eine Seite des vollstandigen Vierecks heraus, etwa AB, und betrachten diejenige hyperbolische Punktinvolution, die A und B

als Doppelpunkte hat. Vermöge der Involution gehört zu dem auf AB gelegenen Diagonalpunkt P ein Punkt X. Die Strahlenpaare von dem Diagonalpunkt Q nach allen Punktepaaren der Involution bilden nach Nr. 174 die hyperbolische Strahleninvolution mit den Doppelstrahlen QA, QB. Ein Strahlenpaar dieser Involution besteht aus QP und QX. Die Gegenseite von AB, nämlich CD, schneidet die Strahleninvolution nach Nr. 176 in einer hyperbolischen Punktinvolution mit den Doppelpunkten auf QA und QB, also mit den Doppelpunkten C und D. Da P auf CD liegt, besteht ein Punktepaar dieser Involution aus P und dem Punkt Y, in dem QX die Gerade CD schneidet. Ebenso wie soeben der Diagonalpunkt Q benutzt wurde, werde jetzt der Diagonalpunkt R herangezogen: Die Strahlenpaare von R nach allen Punktepaaren der Involution auf AB bilden eine hyperbolische Strahleninvolution, und sie wird durch die Gerade CD in einer hyperbolischen Punktinvolution geschnitten, deren Doppelpunkte die Schnittpunkte von RA und RB mit CD, also D und C sind. Dies aber ist dieselbe Involution wie vorher, da die Involution durch ihre Doppelpunkte vollständig bestimmt wird. Da P auf CD liegt, muß deshalb der zu P zugeordnete Punkt, nämlich Y, auf dem Strahl RX gelegen sein, weil die Involution jetzt durch die Gerade CD auf den von R ausgehenden Strahlen ausgeschnitten wird, d. h. RX trifft CD in demselben Punkt Y, wie es QX tut. Mithin liegen X und Y auf der Diagonale QR. Da nun X der zu P gehörige Punkt der hyperbolischen Involution auf AB mit den Doppelpunkten A und B bedeutete, ergibt sich nach Nr. 185: Das Punktepaar P, X ist zum Punktepaar A, B harmonisch. Was sich hier für den Schnittpunkt X der Diagonale QR mit der Seite AB ergeben hat, läßt sich ebenso für alle Diagonalen und Seiten beweisen. Somit gilt der Satz:

Die auf einer Seite eines vollständigen Vierecks gelegenen beiden Ecken werden harmonisch getrennt durch den auf ihr gelegenen Diagonalpunkt und denjenigen Punkt, in dem die nicht durch diesen Diagonalpunkt gehende Diagonale die Seite schneidet.

Das Strahlenpaar QA, QB wird vom Strahlenpaar QP, QR, das nach P und X geht, harmonisch getrennt. Also gilt, da QA und QB zwei Gegenseiten AC und BD des Vierecks sind, der Satz:

Zwei Gegenseiten eines vollständigen Vierecks werden harmonisch getrennt durch die beiden Diagonalen, die von ihrem Schnittpunkt ausgehen.

188. Pol und Polare beim Kreis. In der Ebene eines Kreises mit dem Mittelpunkt M sei ein Punkt P gewählt, und die Gerade PM treffe den Kreis in A und B, siehe Fig. 257 a oder b, je nachdem P außerhalb oder innerhalb des Kreises liegt. Eine durch P gehende Gerade schneide den Kreis in C und D. Dann ist P einer der drei Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks $ABCD$, die beiden anderen, nämlich der Schnittpunkt von AD und BC sowie der von AC und BD, seien mit Q und R bezeichnet. Da $\sphericalangle ACB$ und $\sphericalangle ADB$ rechte Winkel sind, ist Q der Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks ABR, folglich die dritte Höhe RQ, also $RQ \perp AB$. Nach der letzten Nummer schneidet RQ die Vierecksseiten AB und CD in Punkten X und Y derart, daß sowohl P, X das Paar A, B als auch P, Y das Paar C, D harmonisch trennt. Die Diagonale RQ

des Vierecks sei als diejenige, die den Diagonalpunkt P nicht enthalt, sondern ihm gegenuberliegt, mit p bezeichnet. Ihre Lage ist unabhängig von der Lage der von P ausgehenden Kreissekante CD, denn X liegt auf der Geraden PM so, daß P, X und A, B harmonische Paare sind, und p steht in X auf PM senkrecht. Daraus folgt:

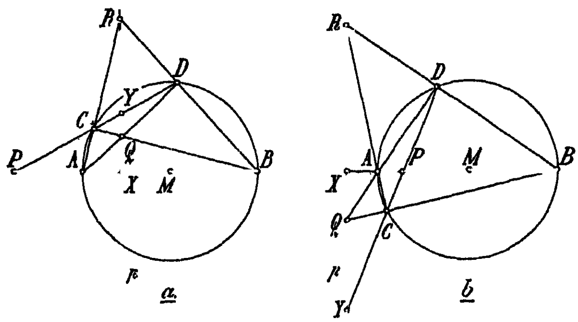


Fig. 257

Zu jedem Punkt P außerhalb oder innerhalb eines Kreises in der Ebene gehort eine Gerade p, indem jede von P ausgehende Sekante den Kreis in einem Punktepaar C, D trifft, das harmonisch getrennt wird durch P und den Schnittpunkt Y der Sekante mit p. Diese P zugeordnete Gerade p ist senkrecht zur Geraden von P nach der Mitte des Kreises.

Wahlt man nicht wie vorhin den Punkt P, sondern die Gerade p beliebig, so kann man den zugehörigen Punkt P leicht ermitteln. Denn er liegt auf derjenigen Geraden durch die Mitte M, die auf p senkrecht steht, und wenn der Kreis diese Gerade in A, B und p diese Gerade in X schneidet, ist P derjenige Punkt, der zusammen mit X das Punktepaar A, B harmonisch trennt. Ebenso also, wie jedem außerhalb oder innerhalb des Kreises gelegenen Punkt P eine den Kreis schneidende oder meidende Gerade p zugeordnet wird, ist auch jeder den Kreis schneidenden oder meidenden Geraden p ein Punkt P außerhalb oder innerhalb des Kreises zugeordnet. Diese beiden zusammengehörigen Elemente P und p nennt man **Pol und Polare**, also P den Pol der Geraden p in bezug auf den Kreis und p die Polare des Punktes P in bezug auf den Kreis. Aus den Sätzen der vorigen Nummer folgt:

In jedem dem Kreis eingeschriebenen vollständigen Viereck $ABCD$ ist jeder der drei Diagonalpunkte P, Q, R der Pol der ihm gegenüberliegenden Diagonale p, q, r, siehe Fig. 258. Diese Figur unterscheidet sich von den Figuren 257 dadurch, daß AB nicht gerade durch die Kreismitte geht.

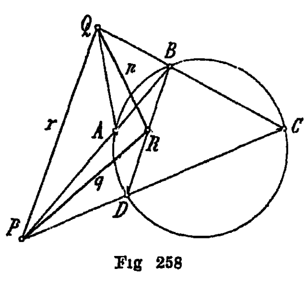


Fig. 258

Sind P, p und Q, q zwei Paare von Polen und Polaren und liegt Q auf p, so kann man folgern, daß auch P auf q liegt. Denn man ziehe von Q eine Gerade, die den Kreis in A und D schneide. Die Geraden PA und PD mögen den Kreis zum zweitenmal in B und C und die Polare p von P in X und Y treffen. Dann wird das Paar A, B von P, X und das Paar C, D von P Y harmonisch getrennt. Andererseits schneidet die P gegenüberliegende Diagonale des vollstandigen Vier-

ecks $ABCD$ die Geraden AB und CD nach Nr. 187 auch in den zu P gehörigen harmonischen Punkten X und Y, d. h. sie fallt mit p zusammen. Da nun Q auf p und auf AD liegt, geht also auch BC durch Q, und daraus folgt weiterhin, daß die Polare q von Q als die Q gegenüberliegende Diagonale des vollständigen Vierecks in der Tat durch P geht. Somit gilt der Satz:

Liegt ein Punkt Q auf einer Geraden p, so geht die Polare q von Q durch den Pol P von p.

Unter einem Polardreieck versteht man ein Dreieck PQR, in dem jede Ecke der Pol der gegenüberliegenden Seite ist. Alle Polardreiecke ergeben sich als die Diagonaldreiecke der dem Kreis eingeschriebenen vollständigen Vierecke. Stets liegt eine, aber auch nur eine Ecke des Polardreiecks im Innern des Kreises. Um den Pol P einer gegebenen Polare p zu finden, kann man also auch ein Polardreieck benutzen: Man wahlt zwei Punkte Q und R auf p und bestimmt ihre Polaren q und r. Der Schnittpunkt von q und r ist der gesuchte Pol P.

Dreht sich eine von einem Punkt P außerhalb des Kreises ausgehende Sekante um P, so rücken ihre Schnittpunkte A, B mit dem Kreis zusammen, sobald die Sekante eine der von P ausgehenden Tangenten wird. Da aber bestandig derjenige Punkt X, der zusammen mit P das Punktepaar A, B harmonisch trennt, auf der Polare p und zwischen A und B liegt, ergibt sich der Satz:

Die Polare eines außerhalb des Kreises gelegenen Punktes P schneidet den Kreis in den Berührungspunkten der von P ausgehenden Tangenten. Sie ist demnach die Beruhrungssehne des Punktes P. Auf Grund dieses Satzes kann man an einem gezeichnet vorliegenden Kreis die Tangenten von einem Punkte P aus mit Benutzung des Lineals allein, ohne Zirkel, ermitteln, siehe Fig. 259, indem man von P aus drei Sekanten zieht und ihre Schnittpunkte mit dem Kreis kreuzweise verbindet, wodurch jedesmal ein Punkt der Polare p entsteht. Ihre Schnittpunkte mit dem Kreis sind die Berührungspunkte der Tangenten von P aus. Rückt P ins Unendlichferne, so wird seine Polare p ein Durchmesser. Da demnach die Polaren aller un endlich fernen Punkte die Durchmesser sind, ist der Mittelpunkt der Pol der unendlich fernen Geraden.

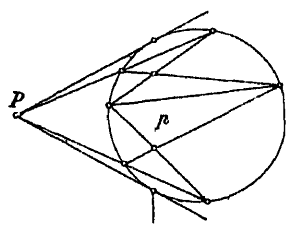


Fig 250

Rückt ein Punkt P auf den Kreis, so ist von den Schnittpunkten A und B irgendeiner durch ihn gehenden Sekante einer in P selbst gelegen, d. h. der zu P hinsichtlich A, B harmonische Punkt X fällt dann auch mit P zusammen. Demnach kann man auf diese Art nicht feststellen, was unter der Polare eines Punktes P des Kreises selbst zu verstehen ist; diese Betrachtung zeigt nur, daß die Polare durch P gehen muß. Man kann aber die Polare eines Punktes P des Kreises so definieren, daß alle vorher aufgestellten Sätze über Pole und Polaren gültig bleiben. Sind nämlich q und r zwei Geraden durch den Kreispunkt P, so liegen ihre Pole Q und R auf der Tangente von P. Bezeichnet man also die Tangente eines Kreispunktes als seine Polare

so gilt nach wie vor der Satz, daß, wenn ein Punkt Q auf einer Geraden p liegt, auch die Polare q von Q durch den Pol P von p geht.

189. Pol und Polare bei der Ellipse. Da eine Ellipse eine Parallelprojektion eines Kreises ist und da harmonische Punktepaare durch Parallelprojektion wieder in harmonische Punktepaare übergehen (Nr 184), kann man die Begriffe Pol und Polare auch auf den Fall der Ellipse übertragen. Es ergibt sich:

Liegt eine Ellipse vor, so ordnet sie jedem Punkt oder Pol P in ihrer Ebene eine Gerade als Polare p derart zu, daß jede von P ausgehende Sekante die Ellipse in einem Punktepaar schneidet, das harmonisch getrennt wird durch P und den Schnittpunkt der Sekante mit p. Die Polare eines Punktes der Ellipse selbst ist die Tangente dieses Punktes. Liegt ein Punkt auf der Polare eines anderen, so liegt der zweite Punkt auf der Polare des ersten. Die Polare eines außerhalb der Ellipse gelegenen Punktes ist seine Berührungssehne. In jedem der Ellipse eingeschriebenen vollständigen Viereck bilden die Diagonalen ein Polardreieck, und auf diese Art ergeben sich alle Polardreiecke, d h alle Dreiecke, in denen jede Ecke Pol der Gegenseite ist. Eine, aber auch nur eine Ecke des Polardreiecks liegt innerhalb der Ellipse. Der Mittelpunkt der Ellipse ist der Pol der unendlich fernen Geraden; jeder Durchmesser hat einen unendlich fernen Pol

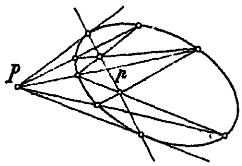


Fig 260

Man kann wie in Fig. 259 der letzten Nummer auch an einer gezeichnet vorliegenden Ellipse von einem außerhalb der Ellipse gelegenen Punkt aus die Tangenten mit Hilfe des Lineals allein, ohne Zirkel, ermitteln, siehe Fig 260. In Nr 78 lag der Fall anders, dort wurden die Tangenten aus den gegebenen Achsen der Ellipse ermittelt.

Anmerkung Die Bezeichnung Polare wurde von F J Servois (Professor an der Artillerieschule in Metz) gelegentlich eingeführt in der Abhandlung „Solution du premier des deux problèmes proposés à la page 259 de ce volume, et du problème proposé à la page 126 du même volume", Ann de Mathém. p. et appl. 1 Bd 1810/11, S 337—341, insbesondere S. 337, die Bezeichnung Polare durch J. D Gergonne (Nr. 5) in der Abhandlung „Théorie analytique des pôles des lignes et des surfaces du second ordre" ebenda 3. Bd 1812/13, S 293—303, insbesondere S. 297. Aber die Begriffe Pol und Polare und die auf sie bezüglichen Sätze sind bedeutend älter. Schon Apollonius (Nr. 77) stellte den Satz auf, nach dem die Punkte X, die auf den von einem Punkte P aus gezogenen Sekanten AB zusammen mit P die Paare A, B harmonisch trennen, auf einer Geraden liegen (3 Buch, 37. Satz, a a O, bei Barrow, S. 78) Als eigentlicher Begründer der Polarentheorie galt Ph de la Hire wegen seines bei Nr 73 erwähnten Werkes „Sectiones conicae in novem libros distributae", wo sie im ersten und zweiten Buch entwickelt wird Jedoch nach Auffindung der bei Nr. 178 genannten Schrift „Brouillon project etc" hat G. Desargues den Vorrang. Von ihm rührt der in Nr. 187 mit Hilfe der Involution geführte Beweis her („Oeuvres de Desargues", herausgeg von N G. Poudra, 1 Bd, S. 171 u f.). Da uns dieses Werk von Desargues eben nur durch eine von De la Hire gemachte Abschrift bekannt ist, erscheint De la Hire, indem er die Polarentheorie als sein Eigentum entwickelt, allerdings in bedenklichem Licht Doch ist zu bemerken, daß seine Abschrift aus dem Jahr 1789 stammt, daß er selbst schon früher, wenn auch nicht so ausführlich, die Polarentheorie in seinem Buche „Nouvelle méthode en géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques", Paris 1773, S 38 u f., behandelt hat und daß er die Beweise für den Kreis anders führte. als es Desargues getan hatte.

***190. Konjugierte Elemente und ihre Involutionen**[1]. Man führt den Begriff konjugierte Punkte bzw. konjugierte Geraden durch folgende Erklärungen ein:

Zwei Punkte P und Q der Ebene heißen in bezug auf eine in der Ebene gelegene Ellipse konjugiert, wenn die Polare von P durch Q geht oder, was dasselbe besagt, die Polare von Q durch P geht.

Zwei Geraden p und q der Ebene heißen in bezug auf eine in der Ebene gelegene Ellipse konjugiert, wenn der Pol von p auf q liegt oder, was dasselbe besagt, der Pol von q auf p liegt.

Da in Nr. 72 der Begriff der konjugierten Durchmesser eingeführt wurde, muß aber noch gezeigt werden, daß er sich der zweiten Erklarung unterordnet: Sind p und q konjugierte Durchmesser der Ellipse, so bekommt man die Polare des unendlich fernen Punktes von p, indem man von ihm aus, d. h parallel zu p, lauter Sekanten AB zieht und auf ihnen die vierten harmonischen Punkte zu den Paaren der Schnittpunkte A, B und dem unendlich fernen Punkt bestimmt Diese vierten Punkte sind nun nach Nr 184 die Mitten der parallelen Sehnen AB, und sie bilden in der Tat den zu p konjugierten Durchmesser

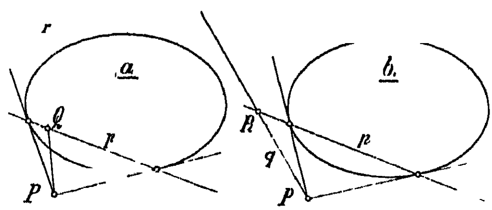


Fig 261

Wird eine Gerade r beliebig gewahlt, so gibt es zu jedem Punkt P auf r einen ebenfalls auf r gelegenen konjugierten Punkt Q, denn die Polare p von P schneidet r in dem Punkt Q, siehe Fig 261 a. Demnach ordnen sich alle Punkte der Geraden r in lauter konjugierte Punktepaare P, Q an.

Wird ein Punkt R beliebig gewahlt, so gibt es zu jeder Geraden p durch R eine ebenfalls durch R gehende konjugierte Gerade q, die Verbindende des Pols P von p mit R, siehe Fig 261 b Demnach ordnen sich alle Strahlen durch einen Punkt R in lauter konjugierte Strahlenpaare p, q an

Man wird vermuten, daß diese Paare eine Involution darstellen. Daß es zutrifft, erkennt man zunachst im Fall des Kreises Es sei namlich r eine beliebig gewahlte Gerade und N der Fußpunkt des Lotes von der Kreismitte M auf r, siehe Fig. 262 a oder b, je nachdem r den Kreis meidet oder schneidet. Der Pol R von r liegt auf MN. Ist P irgendein Punkt auf r, so geht die Polare p von P durch R, da P auf r liegt, und sie steht nach Nr. 188 auf MP senkrecht. Der Schnittpunkt von r und p sei Q. Nun ist $\triangle NPM \backsim \triangle NRQ$ also das Verhältnis $NP : NM$ zunächst ohne Rücksicht aufs Vorzeichen gleich $NR : NQ$ und daher das Produkt $NP \cdot NQ$ gleich dem Produkt $NM \cdot NR$. Was die Vorzeichen

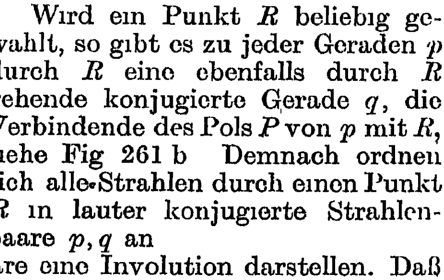


Fig. 262

[1]) Die mit Sternchen versehenen Nummern sind uberschlagbar.

betrifft, so haben NP und NQ im Fall a verschiedenen, dagegen NM und NR gleichen Sinn, so daß $NP \cdot NQ$ negativ und $NM \cdot NR$ positiv ist. Im Fall b verhält es sich umgekehrt. Daher ist in beiden Fällen.

$$NP \cdot NQ = -NM \cdot NR\,.$$

Die rechte Seite ist im Fall a negativ, im Fall b positiv. Da die Formel für jedes konjugierte Punktepaar P, Q auf r gilt und ihre rechte Seite von der Wahl des Punktes P auf r unabhängig ist, besagt sie, daß $NP \cdot NQ$ für alle diese Paare denselben negativen oder positiven konstanten Wert hat, d. h. daß die Punktepaare P, Q auf r eine elliptische oder hyperbolische Involution bilden (Nr. 170). Die Polaren p und q der Punktepaare sind die Strahlen von R nach Q und P, mithin bilden sie nach Nr. 174 eine elliptische oder hyperbolische Strahleninvolution. Die ausgesprochene Vermutung ist hiermit für den Fall des Kreises als richtig dargetan. Durch Parallelprojektion ergibt sich daraus, daß sie auch im Fall einer Ellipse stimmt. Somit haben wir die Sätze:

Die hinsichtlich einer Ellipse konjugierten Punktepaare auf einer beliebigen Geraden bilden eine elliptische oder hyperbolische Involution, je nachdem die Gerade die Ellipse meidet oder schneidet. Im zweiten Fall sind die Schnittpunkte der Geraden mit der Ellipse die Doppelpunkte der Involution.

Die hinsichtlich einer Ellipse konjugierten Strahlenpaare eines beliebigen Punktes bilden eine elliptische oder hyperbolische Involution, je nachdem der Punkt innerhalb oder außerhalb der Ellipse liegt. Im zweiten Fall sind die Tangenten vom Punkt aus die Doppelstrahlen der Involution.

Die Richtigkeit des Nachsatzes erhellt aus dem Umstand, daß ein Punkt oder eine Gerade nur dann zu sich selbst konjugiert ist, wenn der Punkt auf der Ellipse liegt oder die Gerade die Ellipse berührt. Nimmt man den Träger r der Punktreihe als Tangente der Ellipse oder den Scheitel R des Strahlenbüschels als Punkt der Ellipse an, so gehen ausgeartete oder parabolische Involutionen (Nr. 171) hervor.

Anmerkung: Die Bezeichnung konjugierte Punkte wurde von Otto Ludw Hesse (geb. 1811 in Königsberg i Ostpr, zuletzt Professor der Mathematik am Münchener Polytechnikum, gest. 1874 in München) eingeführt, siehe „De curvis et superficiebus secundi ordinis" (Über die Kurven und Flächen zweiter Ordnung), Journ. f d. r. u. ang. Math. 20. Bd. 1840, S. 285—308, insbesondere S. 291 (siehe auch „Ludwig Otto Hesses gesammelte Werke", herausgeg. von der bayer. Akad d. Wiss., München 1897, S. 21—49, insbesondere S. 30). Dagegen nannte J Steiner (Nr. 5) konjugierte Punkte harmonisch, und J. V. Poncelet (Nr. 5) nannte sie reziprok

***191. Dualität in der Ebene, Transformation durch reziproke Polaren.** In Nr. 5 wurde von der Dualität im Raume gesprochen. Beschränkt man sich auf die Ebene, so sind die Begriffe Punkt und Gerade zueinander dual, weil sich die beiden Sätze gegenüberstehen:

Zwei verschiedene Punkte der Ebene verbindet eine, aber auch nur eine Gerade.

Zwei verschiedene Geraden der Ebene schneiden sich in einem, aber auch nur einem Punkte.

Deshalb kann man zu jeder aus Punkten und Geraden und ihren verbindenden Geraden und Schnittpunkten bestehenden ebenen Figur eine

duale herstellen, indem man jeden Punkt durch eine Gerade, jede Gerade durch einen Punkt ersetzt und, falls ein Punkt mit einer Geraden vereinigt liegt (Nr 5), d. h. falls ein Punkt einer Geraden angehört, die dualen Gebilde Gerade und Punkt so wählt, daß die Gerade durch den Punkt geht. Das einfachste zu sich selbst duale Gebilde in der Ebene ist der Inbegriff eines Punktes und einer Geraden, die mit ihm vereinigt liegt. Zu sich selbst dual ist auch das Dreieck als Inbegriff von drei Punkten und ihren drei verbindenden Geraden. Eine nicht zu sich selbst duale Figur ist z. B eine Punktreihe (Nr. 170), denn zu ihr ist ein Strahlenbuschel (Nr. 174) dual Aus einem vollstandigen Viereck (Nr. 187) geht vermoge der Dualitat in der Ebene ein sogenanntes vollständiges Vierseit hervor. Dies ist der Inbegriff von vier Geraden a, b, c, d der Ebene. Sie haben sechs Schnittpunkte zu je zweien, und diese sechs Punkte heißen die Ecken des vollstandigen Vierseits, siehe Fig. 263. Greift man eine Ecke heraus, so gehen durch sie zwei Seiten Der Schnittpunkt der beiden anderen Seiten heißt die Gegenecke Die durch beide Ecken bestimmte Gerade heißt eine Diagonale. Das vollstandige Vierseit hat daher drei Diagonalen p, q, r. Die Schnittpunkte der Diagonalen zu je zweien heißen die Diagonalpunkte Das vollstandige Vierseit hat somit vier Seiten, sechs Ecken, drei Diagonalen und drei Diagonalpunkte.

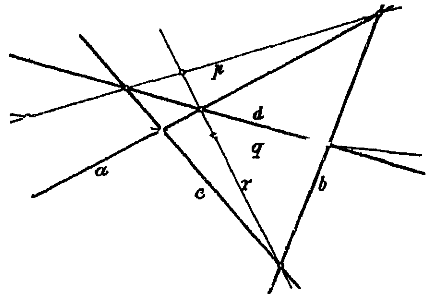


Fig 263

Die Art, wie man zu einer ebenen Figur eine duale findet, ist noch in hohem Maße willkurlich Insbesondere aber kann man auf einem ganz bestimmten Wege zu einer jeden Figur eine duale konstruieren, indem man in der Ebene eine Ellipse annimmt und jeden Punkt P der Figur durch seine Polare p und jede Gerade q der Figur durch ihren Pol Q hinsichtlich der Ellipse ersetzt. Daß man so in der Tat zu einer dualen Figur kommt, beruht auf dem Satz, daß, wenn P mit q vereinigt liegt, auch die Polare p durch den Pol Q geht (Nr. 189). Dies Verfahren, aus einer Figur eine duale abzuleiten, heißt die Transformation durch reziproke Polaren. Die beiden zueinander dualen Figuren werden in diesem Fall reziprok oder polar genannt.

Ein Beispiel von dualen Sätzen kam in Nr. 148 vor, der Satz des Desargues und seine Umkehrung. Ein anderes Beispiel ist dieses:

Liegt auf einer Geraden r der Ebene eine elliptische oder hyperbolische Involution von Punktepaaren A, B vor, so bilden die zu diesen Punktepaaren A, B gehörigen Polaren a, b hinsichtlich einer Ellipse eine elliptische bzw. hyperbolische Involution, deren Scheitel der Pol R von r ist.

Liegt in einem Strahlenbüschel der Ebene mit dem Scheitel R eine elliptische oder hyperbolische Involution von Strahlenpaaren a, b vor, so bilden die zu diesen Strahlenpaaren a, b gehörigen Pole A, B hinsichtlich einer Ellipse eine elliptische bzw. hyperbolische Involution auf der Polare r von R.

Wir beweisen diese Sätze zunächst für den Fall eines Kreises: Sind R und r Pol und Polare in bezug auf einen Kreis mit dem Mittelpunkt M, siehe Fig. 264, und sind A, B Punkte auf r, so gehen die Polaren a, b von A, B durch R und sind senkrecht zu MA und MB. Liegt nun auf r eine elliptische oder hyperbolische Involution der Punktepaare A, B vor, so bilden die Strahlenpaare MA, MB nach Nr. 174 eine elliptische bzw. hyperbolische Involution. Da $MA \perp a$ und $MB \perp b$ ist, gilt dasselbe also auch von den Strahlenpaaren a, b. Indem man die Figur einer Parallelprojektion unterwirft, wodurch der Kreis zur Ellipse wird, bekommt man den allgemeinen Beweis der vorstehenden Satze.

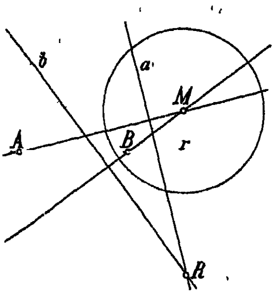


Fig. 264

Wenn A, B und C, D einander harmonisch trennende Punktepaare sind, gehören sie einer hyperbolischen Involution an. Umgekehrt: Irgend zwei Punktepaare A, B und C, D einer hyperbolischen Involution trennen einander harmonisch, vgl. Nr. 185. Wendet man hierauf den ersten der beiden vorstehenden Satze an, so ergibt sich der nachfolgende links stehende Satz, zu dem der rechts stehende dual ist:

Sind A, B und C, D zwei einander harmonisch trennende Punktepaare, so trennen auch ihre Polaren a, b und c, d hinsichtlich einer Ellipse einander harmonisch.

Sind a, b und c, d zwei einander harmonisch trennende Strahlenpaare, so trennen auch ihre Pole A, B und C, D hinsichtlich einer Ellipse einander harmonisch.

Siehe Fig. 265. Zusammengefaßt ergibt sich demnach:

Bei der Ausubung einer Transformation durch reziproke Polaren bleiben elliptische Involutionsbeziehungen, hyperbolische Involutionsbeziehungen und harmonische Beziehungen bestehen. Man sagt daher, daß sich diese Beziehungen gegenüber der Ausfuhrung einer Transformation durch reziproke Polaren invariant verhalten.

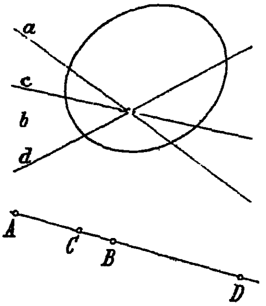


Fig. 265

Anmerkung: Der Begriff des vollstandigen Vierseits, dem der des vollständigen Vierecks dual gegenubersteht, wurde von Lazare Nicolas Marguérite (Comte de) Carnot (geb. 1753 in Nolay, franz. Ingenieuroffizier, Schopfer der Heere der ersten franzosischen Republik, 1800 Kriegsminister, nach der Wiederherstellung des Konigtums zuruckgezogen in Magdeburg lebend, wo er 1823 starb) eingefuhrt in seiner „Géométrie de position", Paris 1803, S. 120, dann auch in seinem „Essai sur la théorie des transversales", Anhang eines „Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace", Paris 1806, S. 65—95, insbesondere S. 69. Die Theorie der reziproken Polaren ruhrt von J.V. Poncelet (Nr. 5) her, siehe „Théorie générale des polaires réciproques", Journ. f. d. r. u. ang. Math. 4. Bd. 1829, S. 1—71, abgedruckt in seinem bei Nr. 5 genannten „Traité etc." als letzter Abschnitt. Sie stammt nach Poncelets eigener Angabe (2. Bd. 2. Aufl. Paris 1866, S. 57) aus der Zeit 1823/24. Vor Poncelet wurde sie unbewußt gelegentlich, und zwar rein rechnerisch angewandt von Gaspard Monge (geb. 1746 in Beaune, Lehrer an der Kriegsschule in Mézières, seit 1783 Prufer der Gardes du Pavillon in Paris, zeitweilig Minister, dann Professor an der 1794 eroffneten École normale, darauf an der 1795

eroffneten Ecole polytechnique zu Paris, im Jahre 1816 aller Ämter verlustig erklart, 1818 in geistiger Umnachtung in Paris gestorben), siehe „De l'intégrale de l'équation différentielle etc", Correspondance sur l'école impériale polytechnique par M Hachette, Nr 4, Juli 1805, Paris 1. Bd 2 Aufl 1813, S 73—74

***192. Einige Anwendungen der Transformation durch reziproke Polaren.** Nach Nr. 189 gelten die im folgenden links stehenden Satze. Vermoge der Transformation durch reziproke Polaren gehen aus ihnen die rechts stehenden hervor

Zieht man von einem Punkt P der Ebene zwei Geraden q und r, die eine Ellipse in den Punktepaaren A, B und C, D schneiden, so liegt der Schnittpunkt von AC und BD sowie der von AD und BC auf der Polare p von P.

Zieht man von zwei Punkten Q und R einer Geraden p der Ebene die Tangentenpaare a, b und c, d an eine Ellipse, so schneiden sich die Geraden, von denen die eine den Schnittpunkt von a und c mit dem von b und d, die andere den von a und d mit dem von b und c verbindet, im Pol P von p, siehe Fig 266

Die drei Diagonalpunkte P, Q, R eines einer Ellipse eingeschriebenen vollstandigen Vierecks bilden ein Polardreieck

Die drei Diagonalen p, q, r eines einer Ellipse umschriebenen vollstandigen Vierseits bilden ein Polardreieck, siehe wieder Fig 266.

Die Schnittpunkte A, B einer Ellipse mit einer Geraden r werden durch irgendeinen Punkt P der Geraden r und durch den Schnittpunkt von r mit der Polare p von P harmonisch getrennt.

Die Tangenten a, b von einem Punkt R an eine Ellipse werden durch irgendeine von R ausgehende Gerade p und durch die R mit dem Pol P von p verbindende Gerade harmonisch getrennt, siehe Fig. 267

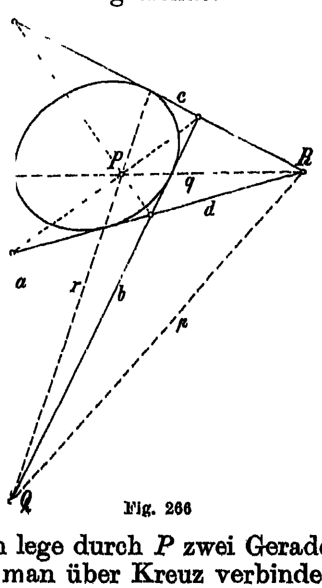


Fig. 266

193. Übungen. 1) Durch einen Punkt P die Parallele zu zwei gegebenen parallelen Geraden a, b mit Hilfe des Lineals allein zu ziehen

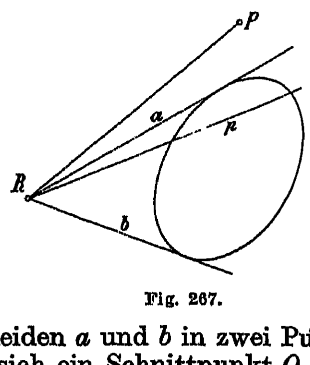


Fig. 267.

Man lege durch P zwei Geraden. Sie schneiden a und b in zwei Punkten, die man über Kreuz verbindet, wodurch sich ein Schnittpunkt Q ergibt.

Zieht man nun von Q aus irgend zwei Geraden und verbindet ihre Schnittpunkte mit a und b über Kreuz, so geht ein Punkt der gesuchten Parallelen hervor (Nr. 187).

2) Durch einen Punkt die Gerade nach dem unerreichbaren Schnittpunkt zweier gegebenen Geraden zu ziehen. Diese Aufgabe laßt sich in entsprechender Weise lösen.

3) Zu beweisen: Ist ein Dreieck ABC einer Ellipse umschrieben und sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Berührungspunkte der Seiten BC, CA, AB, so gehen die drei Geraden $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$, $C\mathfrak{C}$ durch einen Punkt. Die Polare von A geht durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$; die Punkte $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, B, C sind die Ecken eines vollstandigen Vierecks, auf das man Nr. 187 anwendet.

Drittes Kapitel.

Senkrechte Projektion auf mehrere Tafeln.

§ 1. Grundaufgaben.

194. Grundriß und Aufriß. Im ersten Kapitel haben wir einen Punkt P im Raum dadurch festgelegt, daß wir seine senkrechte Projektion P' auf eine Tafel sowie seine Höhe $P'P$ über der Tafel angaben. Zur Lösung von Aufgaben benutzten wir dabei häufig Hilfsebenen, die auf der Tafel senkrecht standen und also gewisse Querschnitte der räumlichen Gebilde enthielten. Diese Hilfsebenen legten wir um ihre Spurgeraden in die Tafel um, vgl. z. B. die Aufgabe über den Schnitt einer Kugel mit einer Geraden in Nr. 89, Fig. 131. Jetzt verfahren wir anders. Außer der senkrechten Projektion auf eine Tafel, die wir uns zweckmäßig so wie früher wagerecht denken und die Grundrißtafel nennen wollen, benutzen wir auch die senkrechte Projektion auf eine zweite Tafel, die Aufrißtafel, die auf der Grundrißtafel senkrecht stehe, also lotrecht sein soll. Die senkrechten Projektionen eines Gegenstandes auf die Grundriß- und Aufrißtafel heißen Grundriß und Aufriß des Gegenstandes. Der Grundriß eines Punktes P werde wie früher mit P', sein Aufriß werde mit P'' (gelesen: P zweigestrichen) bezeichnet. Die Ebene der beiden projizierenden Strahlen PP' und PP'' ist zu beiden Tafeln und demnach zu ihrer Schnittgeraden, der Projektionsachse, senkrecht. Sie trifft diese Achse in einem Punkte P_0, der so liegt, daß $P'P_0$ und $P''P_0$ zur Achse senkrecht sind. Ein in der Grundrißtafel gewählter Punkt P' und ein in der Aufrißtafel gewählter Punkt P'' sind dann, aber auch nur dann der Grundriß und Aufriß eines Punktes P, wenn die Lote von P' und P'' auf die Achse denselben Fußpunkt P_0 haben. Der Punkt P ist durch die Angabe von P' und P'' vollkommen bestimmt.

Die Grundrißtafel hat eine Oberseite (Nr. 8). Eine der beiden Seiten der Aufrißtafel nennen wir ihre Vorderseite. Die Tafeln zerlegen den Raum in vier Teile, Quadranten. Hauptquadrant heißt derjenige Teil, nach dem die Oberseite der Grundrißtafel und die Vorderseite der Aufrißtafel hin gerichtet ist. Soweit möglich, setzt man die zu zeichnenden Gebilde in den Hauptquadranten.

Die Höhe eines Punktes über der Grundrißtafel ist gleich der Höhe seines Aufrisses über der Projektionsachse und ist positiv oder negativ, je nachdem der Punkt über oder unter der Grundrißtafel liegt (Nr. 8).

Der Abstand eines Punktes von der Aufrißtafel ist gleich dem Abstand seines Grundrisses von der Projektionsachse und ist positiv oder negativ, je nachdem der Punkt vor oder hinter der Aufrißtafel liegt.

Ein Punkt liegt dann und nur dann in der Grundrißtafel, wenn sein Aufriß auf der Projektionsachse liegt.

Ein Punkt liegt dann und nur dann in der Aufrißtafel, wenn sein Grundriß auf der Projektionsachse liegt.

Die beiden Tafeln sind hinsichtlich der Projektionen eines Gegenstandes vollkommen gleichberechtigt, und alles Wesentliche unserer späteren Betrachtungen ist gänzlich unabhängig davon, wie die Tafeln im Raume gelegen sind, wenn sie nur aufeinander senkrecht stehen Es trägt aber zur Erleichterung der Anschauung bei, wenn wir die Grundrißtafel wagerecht annehmen. Auch erleichtert diese Annahme häufig die Redeweise; deshalb beharren wir bei ihr.

Eine Gerade g, die zu keiner Tafel senkrecht ist, hat sowohl als Grundriß eine Gerade g' als auch als Aufriß eine Gerade g'', und nur dann, wenn g selbst zur Projektionsachse senkrecht ist (ohne sie notwendig zu schneiden), sind beide Projektionen g' und g'' zur Projektionsachse senkrecht. Der Fall, daß eine der beiden Projektionen g' und g'' zur Achse senkrecht ist, die andere nicht, kann überhaupt nicht eintreten. Die beiden Projektionen g' und g'' treffen die Projektionsachse nur dann in demselben Punkt, wenn die Gerade g selbst die Achse schneidet, und zwar in ebendiesem Punkt. Wählt man in den beiden Tafeln Geraden g' und g'' irgendwie so, daß keine zur Projektionsachse senkrecht ist, so gibt es eine Gerade g im Raum, deren Projektionen g' und g'' sind, und diese Gerade g ist durch die Angabe der beiden Projektionen g' und g'' vollkommen bestimmt. Um sie festzulegen, wähle man nämlich zwei zur Projektionsachse senkrechte Ebenen. Sie schneiden g' und g'' in Punktepaaren A', A'' und B', B'', siehe Fig 268. Nun sind A' und A'' die Projektionen eines bestimmten Punktes A im Raum, ebenso B' und B'' die eines bestimmten Punktes B im Raum, und die Gerade g ist die Verbindende von A und B. Nimmt man g' und g'' senkrecht zur Projektionsachse an, so sind sie nur dann die Projektionen einer Geraden g, wenn sie sich auf der Achse treffen Tun sie dies, so reichen sie aber doch noch nicht zur Festlegung der Geraden g aus, denn jede Gerade in der Ebene, die g' und g'' enthält und also zur Projektionsachse senkrecht ist, hat den Grundriß g' und den Aufriß g''. Man muß in diesem Fall, um die Gerade g im Raum festzulegen, noch die Projektionen A', A'' und B', B'' zweier Punkte von g auf g' und g'' angeben, siehe Fig. 269. Steht eine Gerade g auf der einen Tafel senkrecht, so ist ihre Projektion auf diese bloß ein Punkt, ihre Projektion auf die andere zur Achse senkrecht. Höchstens eine

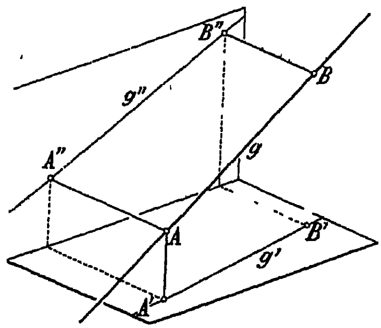


Fig 268

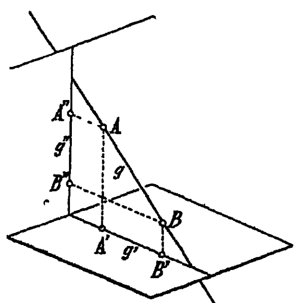


Fig 269

der beiden Projektionen einer Geraden kann bloß ein Punkt sein. Vorläufig werden wir Geraden vermeiden, die zur Projektionsachse senkrecht oder beinahe senkrecht sind. In Nr 211 kommen wir auf sie zurück

Parallele Geraden haben zueinander parallele Grundrisse und zueinander parallele Aufrisse, soweit ihre Projektionen nicht bloß Punkte sind Umgekehrt: Ist $g' \parallel l'$ und $g'' \parallel l''$, so sind g', g'' und l', l'' die Projektionen zweier paralleler Geraden g und l, falls nicht g', l', g'', l'' alle vier die Achse senkrecht kreuzen.

Die Schnittpunkte einer Geraden mit den Tafeln heißen ihre Spurpunkte (Nr 8). Wir bezeichnen sie meistens mit S_1 und S_2, je nachdem es sich um den Grundriß- oder Aufrißspurpunkt handelt Die Bezeichnungen S' und S'' sind nicht erlaubt, denn unter S' und S'' waren ja nach dem Vorhergehenden die beiden Projektionen eines Punktes S zu verstehen

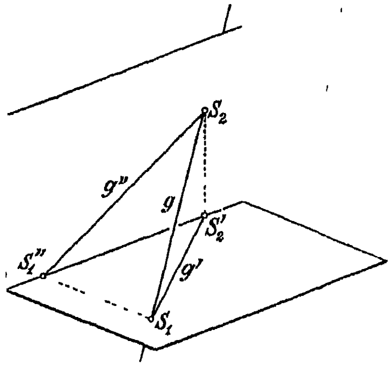


Fig 270

Der Grundriß-Spurpunkt S_1 einer Geraden g fällt mit seinem Grundriß S_1' zusammen und liegt auf g', während sein Aufriß S_1'' der Schnittpunkt der Achse mit g'' ist, siehe Fig 270

Der Aufriß-Spurpunkt S_2 einer Geraden g fällt mit seinem Aufriß S_2'' zusammen und liegt auf g'', während sein Grundriß S_2' der Schnittpunkt der Achse mit g' ist, siehe Fig 270

Eine Gerade, die Punkte A, B mit erreichbaren Projektionen enthält, kann sehr wohl unerreichbare Spurpunkte haben, siehe Fig 268 Deshalb soll man die Spurpunkte einer Geraden nicht benutzen, wenn man stets ausführbare Konstruktionen haben will

195. Sichtbarkeit. Wir nehmen immer an, die Grundrißtafel werde von oben, die Aufrißtafel von vorn betrachtet Der Beobachter befinde sich also im Hauptquadranten Der Grundriß eines Gegenstandes täuscht dem Beobachter den Gegenstand um so vollkommener vor, je mehr sich die Sehstrahlen den Loten zur Grundrißtafel nähern Man muß daher die Zeichnung auf der Grundrißtafel aus weiter Ferne von oben her betrachten (Nr 15). Entsprechendes gilt von der Zeichnung auf der Aufrißtafel: sie muß aus weiter Ferne von vorn her betrachtet werden

Die Richtung, aus der man den

Grundriß betrachtet, kann man durch einen Pfeil in der Aufrißtafel kennzeichnen, der von oben her senkrecht auf die Achse weist.

Aufriß betrachtet, kann man durch einen Pfeil in der Grundrißtafel kennzeichnen, der von vorn her senkrecht auf die Achse weist.

Grundriß und Aufriß eines Gegenstandes sind daher Ansichten des Gegenstandes aus zwei zueinander senkrechten Richtungen. Ist der Gegenstand undurchsichtig, so ist sein Umriß in der Grundrißtafel im allgemeinen das Bild einer anderen Linie auf der Oberfläche des Gegenstandes als sein Umriß in der Aufrißtafel.

Bei der Betrachtung des Grundrisses decken sich zwei Punkte, wenn ihre Grundrißprojektionen zusammenfallen. Dann ist derjenige Punkt der höhere und also sichtbare, dessen Aufrißprojektion höher liegt.

Bei der Betrachtung des Aufrisses decken sich zwei Punkte, wenn ihre Aufrißprojektionen zusammenfallen. Dann ist derjenige Punkt der vordere und also sichtbare, dessen Grundrißprojektion weiter vorn liegt.

In Fig. 271 liegen zwei Geraden nebst ihren Projektionen vor. Ihre Grundrisse haben eine Stelle gemein, die mit A' und B' bezeichnet ist, ebenso ihre Aufrisse eine Stelle, die mit C'' und D'' bezeichnet ist. Zu A' und B' als Grundrissen gehoren verschieden hoch gelegene Punkte A und B der Geraden. Der Punkt A liegt höher, weil sein Aufriß A'' höher als B'' liegt. Also deckt A im Grundriß B zu. Zu C'' und D'' als Aufrissen gehören verschieden weit vorn gelegene Punkte C und D der Geraden. Der Punkt D liegt weiter vorn, weil sein Grundriß D' weiter vorn als C' liegt Also deckt D im Aufriß C zu.

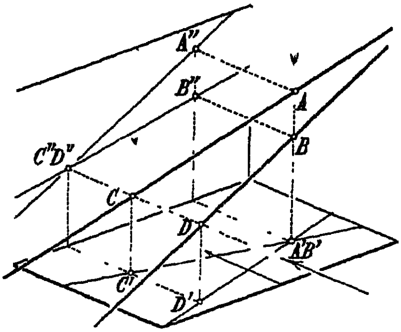


Fig 271

Aufschluß über die Sichtbarkeit im Grundriß geben somit die Höhen im Aufriß, Aufschluß über die Sichtbarkeit im Aufriß die Abstände von der Achse im Grundriß.

Die Tafeln kann man sich durchsichtig oder undurchsichtig denken Im zweiten Fall werden sie die Sichtbarkeit eines Gegenstandes nicht hindern, wenn er in den Hauptquadranten gesetzt wird. Wenn man, wie es später geschehen soll, Schlagschatten von Gegenstanden auf den Tafeln entwirft, muß man sich die Tafeln undurchsichtig vorstellen.

196. Grundriß- und Aufrißtafel in einer Doppelebene. Da das Zeichnen in zwei zueinander senkrechten Ebenen zu unbequem wäre, bringt man die Tafeln durch Drehung um die Projektionsachse in eine gemeinsame Ebene, die Ebene der Zeichnung, die dadurch eine Doppelebene wird. Zeichnet man auf einem Tisch, so liegt die Grundrißtafel darauf, und man wird daher die Aufrißtafel um die Achse umlegen. Zweckmaßig verfahrt man dabei so, daß der obere Teil der Aufrißtafel mit dem hinteren Teil der Grundrißtafel zur Deckung kommt, denn dann fallen Grundriß und Aufriß eines im Hauptquadranten gelegenen Gebildes nicht aufeinander. Zeichnet man auf einer Wandtafel, so liegt der Aufriß auf der Tafel, und man wird daher den Grundriß um die Achse umlegen. Zweckmäßig so, daß der vordere Teil der Grundrißtafel mit dem unteren Teil der Aufrißtafel zur Deckung kommt, aus demselben Grund wie vorher. In den Figuren von Nr. 194 und 195 stellten wir die Tafeln in ihren ursprünglichen Lagen gegeneinander dar. Dies konnte nur dadurch bewerkstelligt werden, daß wir Parallelprojektionen entwarfen, und in ihnen erscheinen die Grundrisse und Aufrisse verzerrt. Künftig stellen wir die Zeichnungen immer in der

Doppelebene her, so daß sie dann den Grundriß und Aufriß unverzerrt zeigen. Dabei werden wir die Projektionsachse von links nach rechts ziehen und den darüber gelegenen Teil als die obere Aufrißtafel und hintere Grundrißtafel, den darunter gelegenen Teil als die vordere Grundrißtafel und untere Aufrißtafel auffassen. Immer aber muß man sich die Tafeln in der ursprunglichen rechtwinkligen Lage denken Für den Anfang empfiehlt es sich daher, sich von den Gebilden, die dargestellt werden, dadurch eine richtige Vorstellung zu machen, daß man das Blatt, worauf man die Grundrisse und Aufrisse zeichnet, langs der Projektionsachse rechtwinklig knifft

Da die Projektionen eines Punktes P immer so liegen, daß sich die Lote von ihnen auf die Achse treffen (Nr. 194), folgt Zwei Punkte P', P'' der Doppelebene der Zeichnung sind dann, aber auch nur dann Grundriß und Aufriß eines Punktes P, wenn die Gerade $P'P''$ zur Projektionsachse senkrecht ist. In Fig 272a liegt P vorn und oben, im Fall b vorn und unten, im Fall c hinten und oben, im Fall d hinten und unten Sind die Tafeln undurchsichtig, so ist der Punkt P nur im Fall a sichtbar, in den Fallen a und b ist auch sein Grundriß, in den Fallen a und c auch sein Aufriß sichtbar. Sonst sind die Grundrisse und Aufrisse nicht zu sehen

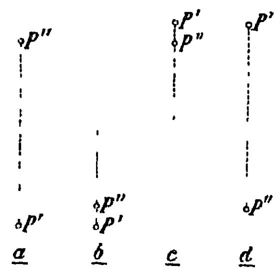


Fig 272.

Die Regel, wonach die Gerade $P'P''$ zur Achse senkrecht sein muß, darf nicht so ausgedrückt werden, daß man sagt, daß der Grundriß senkrecht unter dem Aufriß liegen musse, denn dies trifft z B in den Fallen c und d nicht zu Allerdings trifft es immer dann zu, wenn der Punkt im Hauptquadranten liegt. Zur Vermeidung einer Überfullung der Figuren werden wir kunftig die Lote zur Achse, auf denen die Projektionen von Punkten liegen, haufig fortlassen oder nur andeuten

Solange die Tafeln noch ihre ursprungliche, rechtwinklige Lage haben, kann man sich irgendeinen Punkt S_1 der Grundrißtafel geradlinig mit irgendeinem Punkt S_2 der Aufrißtafel verbunden denken. Denn dann liegt eine Gerade g im Raum vor, die S_1 und S_2 als Spurpunkte hat. Es ware jedoch sinnlos, auch nach vollzogenem Umlegen der Tafeln in eine Doppelebene diese geradlinige Verbindung auszuführen. Vielmehr kann man dann nur die beiden Projektionen g' und g'' der Geraden zeichnen. Der Grundriß g' geht durch S_1 und den auf der Achse gelegenen Grundriß von S_2, der Aufriß g'' durch S_2 und den auf der Achse gelegenen Aufriß von S_1, siehe Fig. 273 für verschiedene Annahmen. In den Fällen a und c liegt

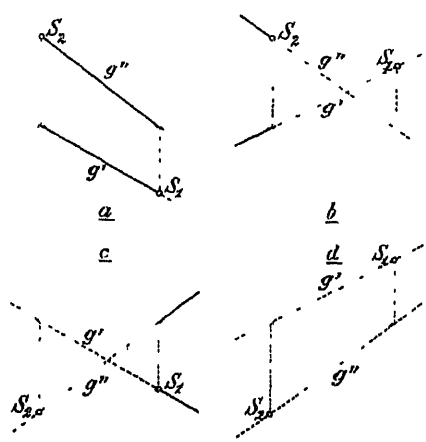


Fig 273

der Grundriß-Spurpunkt S_1 auf dem vorderen Teil der Grundrißtafel, sonst hinten, in den Fällen a und b liegt der Aufriß-Spurpunkt S_2 auf dem oberen Teil der Aufrißtafel, sonst unten. Sind die Tafeln undurchsichtig, so sieht man nur die ausgezogenen Teile der Geraden Im Fall d ist dann die Gerade nirgends sichtbar.

197. Schnitt zweier Geraden. Werden die Projektionen a', a'' und b', b'' zweier Geraden a und b beliebig angenommen, so sind die Geraden im allgemeinen windschief, z. B. in Fig. 271 von Nr. 195 Sie schneiden sich dann und nur dann, wenn der Schnittpunkt P' von a' und b' und der Schnittpunkt P'' von a'' und b'' auf einem Lot zur Achse liegen, siehe Fig. 274, denn nur dann sind P' und P'' die Projektionen eines Punktes P.

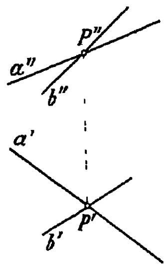


Fig 274

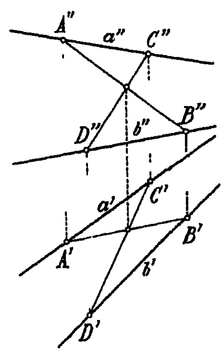


Fig 275

Die Entscheidung darüber, ob zwei Geraden a, b einander schneiden, läßt sich nicht in dieser Art herbeiführen, wenn die Schnittpunkte P' und P'' unerreichbar sind, siehe Fig 275 Man wählt in diesem Fall einen Punkt A auf a und einen Punkt B auf b und verbindet sie, ferner wählt man noch einen Punkt C auf a und einen Punkt D auf b und verbindet sie. Dann und nur dann, wenn AB und CD einander schneiden, gilt dasselbe von a und b

198. Grundriß und Aufriß einer Ebene. Drei Punkte A, B, C liegen dann, aber auch nur dann in gerader Linie, wenn sowohl A', B', C' als auch A'', B'', C'' je in gerader Linie liegen, vorausgesetzt, daß diese beiden Geraden $A'B'C'$ und $A''B''C''$ nicht in ein Lot zur Achse zusammenfallen Tritt dies ein, so schließt man nur, daß A, B, C in einer zur Achse senkrechten Ebene liegen.

Liegen A', B', C' in gerader Linie, aber A'', B'', C'' nicht, so liegen A, B, C in einer zur Grundrißtafel senkrechten Ebene

Liegen A'', B'', C'' in gerader Linie, aber A', B', C' nicht, so liegen A, B, C in einer zur Aufrißtafel senkrechten Ebene.

Wenn weder A', B', C' noch A'', B'', C'' in gerader Linie liegen, sind auch die drei Punkte A, B, C nicht in gerader Linie gelegen. Sie bestimmen dann eine Ebene, die weder zur Grundrißtafel noch zur Aufrißtafel senkrecht ist. Die Grundrisse aller Punkte dieser Ebene erfüllen die ganze Grundrißtafel, ihre Aufrisse die ganze Aufrißtafel Die Ebene ist durch die Angabe der Projektionen der drei Punkte A, B, C vollkommen bestimmt. Deshalb gehört zu einem irgendwo bestimmt angenommenen

Grundriß P' eines Punktes P der Ebene ein nicht mehr willkürlich annehmbarer, sondern bestimmter Aufriß P''. Man findet ihn, indem man durch P irgendeine in

Aufriß P'' eines Punktes P der Ebene ein nicht mehr willkürlich annehmbarer, sondern bestimmter Grundriß P'. Man findet ihn, indem man durch P irgendeine in

der Ebene enthaltene Gerade legt. Den Grundriß dieser Geraden kann man willkürlich durch P' ziehen Schneidet er $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ in X', Y', Z', so sind die zugehörigen Aufrisse X'', Y'', Z'' einerseits auf den Loten von X', Y', Z' auf die Achse und andererseits auf $B''C''$, $C''A''$, $A''B''$ gelegen Deshalb gehen die in gerader Linie gelegenen Punkte X'', Y'', Z'' hervor; ihre Gerade ist die Aufrißprojektion der Geraden der Ebene, mithin die gesuchte Aufrißprojektion P'' von P der Schnittpunkt von $X''Y''Z''$ mit dem Lot von P' auf die Achse, siehe Fig 276

der Ebene enthaltene Gerade legt Den Aufriß dieser Geraden kann man willkürlich durch P'' ziehen Schneidet er $B''C''$, $C''A''$, $A''B''$ in X'', Y'', Z'', so sind die zugehörigen Grundrisse X', Y', Z' einerseits auf den Loten von X'', Y'', Z'' auf die Achse und andererseits auf $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ gelegen Deshalb gehen drei in gerader Linie gelegene Punkte X', Y', Z' hervor, ihre Gerade ist die Grundrißprojektion der Geraden der Ebene, mithin die gesuchte Grundrißprojektion P' von P der Schnittpunkt von $X'Y'Z'$ mit dem Lot von P'' auf die Achse, siehe Fig 276.

Dies Verfahren laßt sich vereinfachen Wahlt man als Hilfsgerade z. B die Gerade PA, so braucht man nur noch den Schnittpunkt X der Geraden mit BC zu ermitteln. Übrigens darf man selbstverstandlich P' oder P'' auch außerhalb des Dreiecks $A'B'C'$ oder $A''B''C''$ annehmen, da die Ebene ABC allseitig unbegrenzt fortsetzbar ist

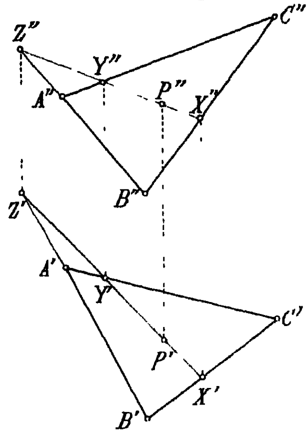


Fig 276

Im Grundriß sieht man stets die Oberseite, im Aufriß stets die Vorderseite der Ebene Entweder ist nun die Oberseite dasselbe wie die Vorderseite oder nicht Der erste Fall liegt vor, wenn die Projektionen $A'B'C'$ und $A''B''C''$ des Dreiecks ABC denselben Umlaufsinn haben, der zweite, wenn ihr Umlaufsinn verschieden ist. In Fig. 277a sieht man in beiden Projektionen dieselbe Seite der Ebene, indem hier die sichtbare Seite zugleich Ober- und Vorderseite ist, in Fig 277b dagegen zeigen die Projektionen die Ebene von verschiedenen Seiten Die Oberseite, die man im Grundriß sieht, ist die Hinterseite. Sie ist im Aufriß nicht zu sehen, er zeigt vielmehr die Vorderseite, die zugleich die Unterseite ist Wenn man die beiden Seiten der Ebene mit verschiedenen Farben anlegen will, müssen die beiden Projektionen im Fall a dieselbe Farbe zeigen, im Fall b dagegen verschieden gefärbt sein.

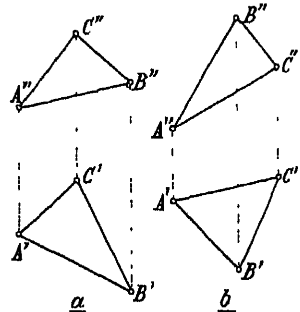
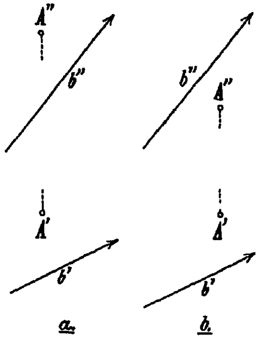


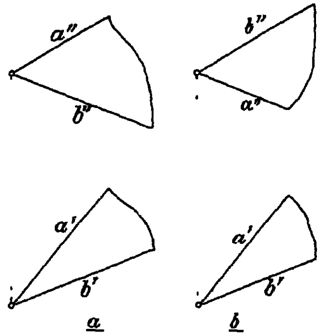
Fig 277

Wählt man die Projektionen von vier Punkten A, B, C, D irgendwie, so werden die Punkte A, B, C, D im allgemeinen nicht in einer Ebene liegen, sondern ein windschiefes Viereck bilden. Sie bilden nur dann ein ebenes Viereck,

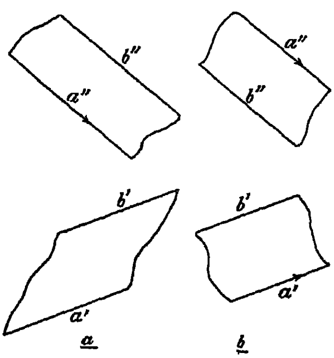
wenn der Schnittpunkt von $A'C'$ mit $B'D'$ und der Schnittpunkt von $A''C''$ mit $B''D''$ auf einem Lot zur Projektionsachse liegen. (Statt AC und BD kann man auch ein anderes Paar wie z. B. AB und CD wählen.)


Fig 278

Statt durch drei Punkte kann man eine Ebene auch durch einen Punkt A und eine nicht durch ihn gehende Gerade b geben, siehe Fig. 278. Dieser Fall ist leicht auf den in Fig. 277 zurückführbar, weil man auf b zwei Punkte B und C annehmen kann, wodurch man zur Darstellung der Ebene mittels eines Dreiecks ABC zurückgelangt. Man erkennt daraus: Die beiden Projektionen zeigen dieselben Seiten der Ebene, wenn A' und A'' auf derselben Seite von b' bzw. b'' gelegen sind, vorausgesetzt, daß man b' und b'' in übereinstimmender Weise mit Pfeilen versehen hat und die Seiten von b' und b'' nach den Pfeilen als rechte oder linke Seite bezeichnet. In Fig. 278 a sieht man die Ebene in beiden Projektionen von derselben Seite, in Fig. 278 b von verschiedenen Seiten


Fig 279

Ferner kann man eine Ebene durch zwei einander schneidende Geraden a, b geben (Nr. 197), siehe Fig. 279. Diese Darstellung kann man anschaulicher machen, indem man eines der vier Winkelfelder der beiden Geraden a, b willkürlich abgrenzt. Doch muß man dabei für die Übereinstimmung zwischen Grundriß und Aufriß Sorge tragen. Man gelangt so zur Darstellung einer Ebene durch ein Winkelfeld. Dabei zeigen die beiden Projektionen dieselbe Seite der Ebene im Fall a und verschiedene Seiten im Fall b, nämlich je nachdem der Drehsinn des Schenkels a' nach dem Schenkel b' mit dem des Schenkels a'' nach dem Schenkel b'' übereinstimmt oder nicht. Wird z. B. der Grundriß P' eines Punktes der Ebene gegeben, so findet man seinen Aufriß P'', indem man sich durch P eine in der Ebene verlaufende Gerade g gelegt denkt. Ihren Grundriß g' kann man beliebig durch P' legen. Schneidet er a' und b' in X' und Y', so findet man die zugehörigen Aufrisse X'' und Y'' auf a'' und b'' und daher auch den Aufriß g'', auf dem P'' liegen muß.


Fig 280

Insbesondere kann man eine Ebene durch zwei parallele Geraden a, b, also durch einen Ebenenstreifen gegeben sein, siehe Fig. 280. Versieht man a' und a'' in übereinstimmender Weise mit Pfeilen, so zeigt die Ebene in beiden Projektionen

dieselbe Seite, Fall a, wenn b' und b'' auf entsprechenden Seiten von a' und a'' liegen, sonst, Fall b, verschiedene Seiten.

Häufig stellt man eine Ebene begrenzt durch ein Parallelogramm dar. Hierzu ist merken: Zeichnet man im Grundriß und Aufriß je ein Parallelogramm $A'B'C'D'$ und $A''B''C''D''$ so, daß $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$, $D'D''$ Lote zur Achse sind, siehe Fig 281, so ist das dadurch im Grundriß und Aufriß dargestellte Viereck $ABCD$ eben und ebenfalls ein Parallelogramm Denn man erkennt sofort, daß der Schnittpunkt von $A'C'$ mit $B'D'$ und der Schnittpunkt von $A''C''$ und $B''D''$ auf einem Lote zur Achse liegen, also die Geraden AC und BD einander wirklich schneiden In Fig. 281a zeigt das Parallelogramm in beiden Projektionen dieselbe Seite, in Fig. 281 b nicht

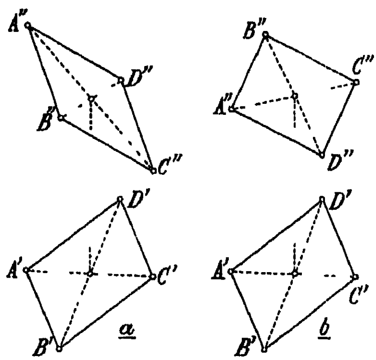


Fig 281

Nur wenn eine Ebene auf der Grundriß- oder Aufrißtafel senkrecht steht, erscheint sie in der betreffenden Projektion bloß als Gerade

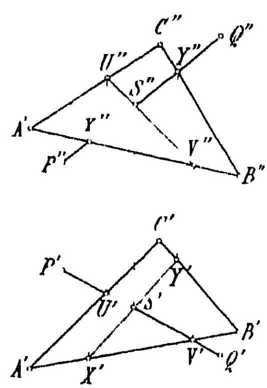


Fig 282

199. Schnitt von Gerade und Ebene. Zur Bestimmung des Schnittpunktes S einer Geraden PQ mit einer Ebene ABC, siehe Fig. 282, bedient man sich wie in Nr 16 einer Hilfsebene durch die Gerade, denn eine derartige Ebene wird die Ebene ABC in einer Geraden schneiden, auf der S liegen muß Die bequemsten Hilfsebenen sind diejenigen, vermoge deren die Gerade PQ auf die eine oder andere Tafel projiziert wird.

Die Ebene, vermoge deren PQ auf die Grundrißtafel projiziert wird, schneidet das Dreieck ABC in einer Strecke UV, deren Grundrißprojektion $U'V'$ auf $P'Q'$ liegt, deren Aufrißprojektion $U''V''$ aber auf einer anderen Geraden als $P''Q''$ liegt, da U der Dreieckseite AC und V der Dreieckseite AB angehört. Der Schnitt S'' von $P''Q''$ mit $U''V''$ ist also der Aufriß des Schnittpunktes S der Geraden PQ mit der Ebene ABC.

Die Ebene, vermoge deren PQ auf die Aufrißtafel projiziert wird, schneidet das Dreieck ABC in einer Strecke XY, deren Aufrißprojektion $X''Y''$ auf $P''Q''$ liegt, deren Grundrißprojektion $X'Y'$ aber auf einer anderen Geraden als $P'Q'$ liegt, da X der Dreieckseite AB und Y der Dreieckseite BC angehört. Der Schnitt S' von $P'Q'$ mit $X'Y'$ ist also der Grundriß des Schnittpunktes S der Geraden PQ mit der Ebene ABC.

Eine Probe der Richtigkeit der Zeichnung besteht darin, daß S' und S'' auf einem Lot zur Achse liegen müssen. Nach Nr. 195 stellt man fest, welcher Teil der Strecke PQ durch das Dreieck ABC verdeckt wird, falls das Dreieck undurchsichtig ist. Im Grundriß kommt man dabei zur Entscheidung, wenn man z. B. die Deckstelle U betrachtet.

Der Punkt U liegt auf AC, mit U' deckt sich die Projektion eines Punktes von PQ. Indem man senkrecht zur Achse zum Aufriß übergeht, findet man, daß U höher als dieser Punkt von PQ gelegen ist, d. h. AC liegt an der Stelle U höher als PQ. Da nun PQ die Dreiecksebene ABC in S durchbohrt, ist im Grundriß das Stück von $P'Q'$, das sich mit $U'S'$ deckt, nicht zu sehen. In entsprechender Weise führt man die Entscheidung im Aufriß herbei, indem man etwa die Deckstelle X'' betrachtet. Man kann aber auch so schließen: Da Fig. 282 die Ebene ABC in beiden Projektionen von derselben Seite zeigt, und da im Grundriß PQ rechts von S sichtbar ist, muß dasselbe im Aufriß gelten.

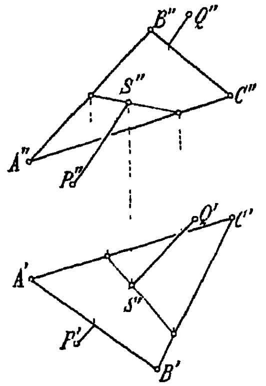


Fig. 283.

In Fig. 283 liegt der Fall vor, wo die Ebene ABC in beiden Projektionen verschiedene Seiten zeigt.

Die Aufgabe, den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene zu bestimmen, ist selbstverständlich späterhin sehr häufig bei anderen Aufgaben der darstellenden Geometrie zu lösen. Man muß sich deshalb mit dem eingeschlagenen Verfahren vollkommen vertraut machen. Es empfiehlt sich zur Übung das Verfahren auch auf den Fall anzuwenden, wo die Ebene statt durch ein Dreieck durch ein Winkelfeld oder durch einen Ebenenstreifen oder durch ein Parallelogramm gegeben ist (Nr. 198). Wird die Ebene durch einen Punkt A und eine nicht durch A gehende Gerade b gegeben, so wähle man auf b zwei Punkte B und C, so daß die Ebene durch das Dreieck ABC dargestellt wird. Man kann aber auch statt dessen durch A die Parallele zu b legen, also die Ebene durch einen Ebenenstreifen darstellen.

200. Schnitt zweier Ebenen. Sind zwei Ebenen durch Dreiecke ABC und PQR gegeben, so kann ihre Schnittgerade sehr wohl außerhalb beider Dreiecke verlaufen. Ist dies nicht der Fall, so haben die Dreiecke eine Strecke XY der Schnittgeraden gemein. Die Endpunkte X und Y dieser Strecke müssen auf den Dreiecksrändern liegen. Daher sind zwei Möglichkeiten vorhanden: Entweder liegen X und Y auf Kanten des einen Dreiecks allein oder X liegt auf einer Kante des einen Dreiecks und Y auf einer Kante des anderen Dreiecks. Im ersten Fall dringt das eine Dreieck mit einer Ecke durch die Ebene des anderen, im zweiten Fall schneiden die beiden Dreiecke einander nur an (Nr. 113). Welcher von beiden Fällen vorliegt, kann man in folgender Weise vor der Ermittlung des Schnittes feststellen.

Die Kanten des einen Dreiecks haben im Grundriß Punkte mit denen des anderen gemein, aber in Wahrheit liegen die Punkte verschieden hoch. Welcher jedesmal höher liegt, also den anderen verdeckt, erkennt man nach Nr. 195, indem man von den Deckstellen auf den Loten zur Achse in die Aufrißprojektion übergeht und feststellt, welcher Punkt hier höher liegt. Entsprechend ermittelt man für den Aufriß, welche Kanten der Dreiecke an den Deckstellen weiter vorn liegen. Denkt man sich

die Dreiecke leer, also nur als aus je drei Stäben zusammengesetzt, so kann man die Ergebnisse dieser Untersuchung dadurch anschaulich machen, daß man jedesmal die verdeckte Kante unterbricht. Dies ist in Fig. 284 bei zwei verschiedenen Annahmen dargestellt.

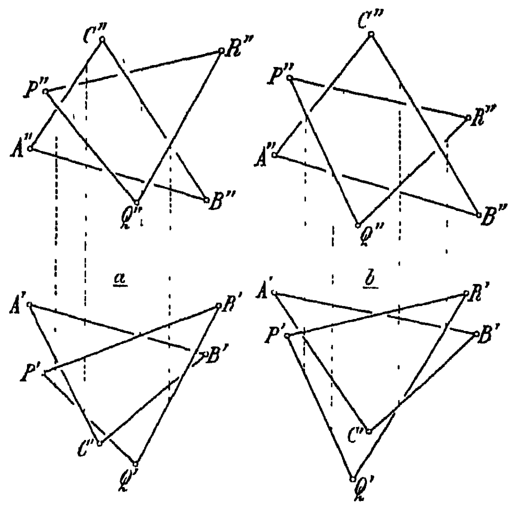


Fig 284

Wenn nun die Dreiecke nicht leer, sondern flächenhaft und undurchsichtig sind, erkennt man im Fall a, daß die Kanten AC und BC durch das Innere des Dreiecks PQR gehen, d. h daß die Endpunkte X und Y der Durchdringungsstrecke auf AC und BC liegen Im Fall b sieht man, daß die Kante AC durch das Innere des Dreiecks PQR und die Kante QR durch das Innere des Dreiecks ABC geht Hier also ist X auf AC und Y auf QR gelegen Fall a ist demnach der des Durchdringens, Fall b der des Anschneidens.

Nunmehr besteht die Lösung der gestellten Aufgabe darin, daß man im Fall a die Schnittpunkte X und Y von AC und BC mit der Ebene PQR und im Fall b den Schnittpunkt X von AC mit der Ebene PQR sowie den Schnittpunkt Y von QR mit der Ebene ABC nach Nr 199 ermittelt. Das Ergebnis ist in Fig 285 dargestellt

Als Probe für die Richtigkeit der Zeichnung dient folgendes Die Gerade XY gehört in ihrer ganzen Ausdehnung beiden Ebenen ABC und PQR an, d. h sie muß alle sechs Dreieckskanten schneiden. Deshalb müssen die sechs Schnittpunkte im Grundriß und die entsprechenden sechs Schnittpunkte im Aufriß auf Loten zur Achse liegen. Diese Probe ist in Fig. 285 an mehreren Stellen angedeutet.

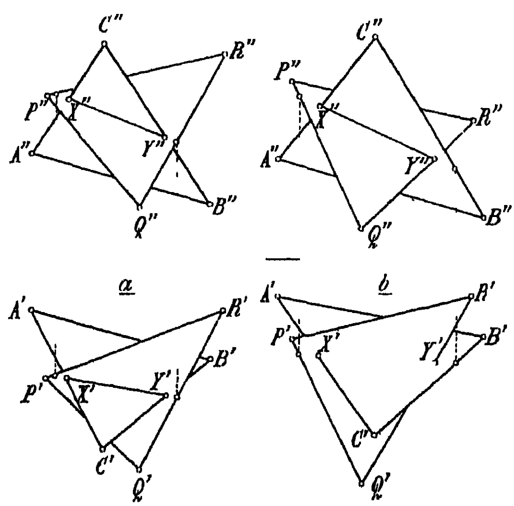


Fig 285.

Der Übergangsfall vom Durchdringen des einen Dreiecks durch das andere zum Anschneiden beider Dreiecke tritt ein, wenn eine Kante des einen Dreiecks eine Kante des anderen schneidet. Dies kann sogar zweimal vorkommen.

Irgendeinen Punkt der Schnittgeraden beider Ebenen kann man auch dadurch bestimmen, daß man die Ebenen mit einer beliebigen zur Grundrißtafel oder Aufrißtafel senkrechten Ebene schneidet. Dies Verfahren ist in Fig. 286 zur Herstellung des Schnittes zweier ebener Winkelfelder (a, b) und (p, q) benutzt worden. Hier ist in der Grundrißtafel eine Gerade g_1 und in der Aufrißtafel eine Gerade g_2 willkürlich gezogen worden. Einmal dient als Schnittebene die längs g_1 auf der Grundrißtafel senkrecht stehende Ebene, dann die längs g_2 auf der Aufrißtafel senkrecht stehende Ebene. Die Schnitte der ersten Ebene mit den Winkelfeldern decken sich im Grundriß mit g_1, aber nicht im Aufriß, so daß sie hier durch ihren Schnitt

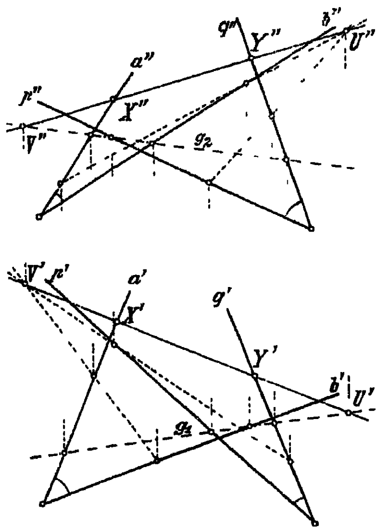


Fig. 286

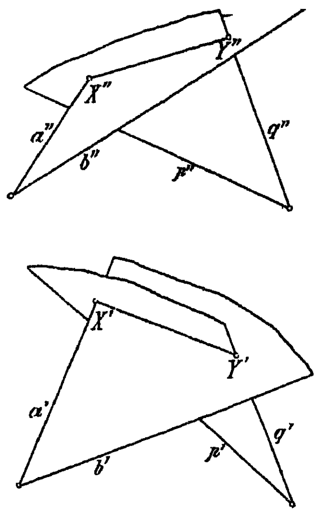


Fig. 287

die Aufrißprojektion U'' eines gemeinsamen Punktes der Winkelfeldebenen liefern. Der zugehörige Grundriß U' liegt auf g_1. Entsprechend liefert die zweite Hilfsebene die Grundrißprojektion V' eines gemeinsamen Punktes der Winkelfeldebenen, und sein Aufriß V'' liegt auf g_2. Demnach sind $U'V'$ und $U''V''$ die Projektionen der Schnittgerade der beiden Ebenen. Von dieser Geraden kommt aber nur dasjenige Stück XY in Betracht, das sowohl innerhalb des Winkels $(a\,b)$ als auch innerhalb des Winkels $(p\,q)$ liegt, wenn man annimmt, daß die Ebenen durch die Winkelschenkel begrenzt seien. Indem man ferner die Sichtbarkeit nach Nr. 195 feststellt, gelangt man zu dem Ergebnis in Fig. 287.

201. Hauptlinien. Eine Linie, sei sie gerade oder krumm, heißt eine Hauptlinie, wenn sie in einer Ebene liegt, die zu einer der beiden Tafeln parallel ist. Je nachdem sie in einer zur Grundrißtafel oder Aufrißtafel parallelen Ebene liegt, wird sie eine Hauptlinie erster oder zweiter Art genannt.

Die Aufrißprojektion einer Hauptlinie erster Art ist eine zur Projektionsachse parallele Gerade oder nur ein Punkt. Die Hauptlinien erster Art pflegen wir mit h zu bezeichnen, so daß also h'' stets zur Achse parallel oder nur ein Punkt ist Hat man eine Hauptlinie erster Art zu zeichnen, so wird man deshalb meistens zuerst ihre Aufrißprojektion h'' parallel zur Achse ziehen.

Die Grundrißprojektion einer Hauptlinie zweiter Art ist eine zur Projektionsachse parallele Gerade oder nur ein Punkt. Die Hauptlinien zweiter Art pflegen wir mit k zu bezeichnen, so daß also k' stets zur Achse parallel oder nur ein Punkt ist. Hat man eine Hauptlinie zweiter Art zu zeichnen, so wird man deshalb meistens zuerst ihre Grundrißprojektion k' parallel zur Achse ziehen

Die Hauptlinien erster Art sind uns schon aus dem 1. Kapitel bekannt, es sind dies die Höhenlinien (Nr. 9). Leider gibt es fur den Abstand von der Aufrißtafel keinen ebenso kurzen und bezeichnenden Namen, wie es der Name Höhe für den Abstand von der Grundrißtafel ist, daher auch keinen eigenen bezeichnenden Namen fur die Hauptlinien zweiter Art

Nur die zur Projektionsachse parallelen Geraden sind zugleich Hauptlinien der ersten und zweiten Art

Wir betrachten nun die Hauptlinien einer Ebene Ist die Ebene zur

Grundrißtafel parallel, so ist jede in ihr gelegene gerade oder krumme Linie eine Hauptlinie erster Art.

Aufrißtafel parallel, so ist jede in ihr gelegene gerade oder krumme Linie eine Hauptlinie zweiter Art

Wenn die Ebene weder zur Grundrißtafel noch zur Aufrißtafel parallel ist, sind ihre Hauptlinien

erster Art lauter parallele Geraden h. Zu ihnen gehort insbesondere die Schnittgerade s_1 der Ebene mit der Grundrißtafel, die Grundriß-Spurgerade der Ebene. Diese Gerade fallt mit ihrem eigenen Grundriß s_1' zusammen, und ihr Aufriß s_1'' liegt auf der Achse.

zweiter Art lauter parallele Geraden k. Zu ihnen gehört insbesondere die Schnittgerade s_2 der Ebene mit der Aufrißtafel, die Aufriß-Spurgerade der Ebene Diese Gerade fallt mit ihrem eigenen Aufriß s_2'' zusammen, und ihr Grundriß s_2' liegt auf der Achse.

Die beiden Spurgeraden s_1 und s_2 der Ebene schneiden sich auf der Achse, da der Schnittpunkt der Ebene mit der Achse beiden Tafeln angehört. Da die Hauptlinien erster Art auch Hohenlinien heißen, kann man die Grundriß-Spurgerade s_1 die Hohenlinie von der Höhe Null nennen

Wird die Ebene auf eine der verschieden in Nr. 198 angegebenen Arten gegeben, so ist es leicht, ihre Hauptlinien in beiden Projektionen zu zeichnen Man zeichnet von einer Hauptlinie

erster Art h zunachst die Aufrißprojektion h'' beliebig parallel zur Achse und ermittelt daraus und aus den uber die Ebene gemachten Angaben den zugehörigen Grundriß h', siehe Fig. 288.

zweiter Art k zunächst ihre Grundrißprojektion k' beliebig parallel zur Achse und ermittelt daraus und aus den über die Ebene gemachten Angaben den zugehörigen Aufriß k'', siehe Fig. 288.

Wünscht man nur die Richtungen der Hauptlinien zu bestimmen, so wird man die am bequemsten zu zeichnenden Hauptlinien aussuchen.

Das ist im Fall der Fig. 288 die Hauptlinie h durch die Ecke C und die Hauptlinie k durch die Ecke A des Dreiecks ABC, siehe Fig. 289.

Nachdem man je eine Hauptlinie h und k von jeder Art ermittelt hat, bedarf man zur Bestimmung der Spurgeraden s_1 und s_2 der Ebene nur noch je eines Punktes von s_1 oder s_2, da s_1 zu h und s_2 zu k parallel ist. Man bestimmt also z. B. noch die Spurpunkte S_1 und S_2 einer Kante AB des Dreiecks ABC, siehe Fig. 290.

Selbst wenn die Projektionen dreier Punkte A, B, C samtlich erreichbar sind, kann es vorkommen, daß die eine oder andere Spurgerade oder beide Spurgeraden der Ebene ABC unerreichbar sind Deshalb soll man die Spurgeraden nicht verwenden, wenn man stets ausführbare Konstruktionen haben will Sobald dagegen von nur einem Punkte einer Ebene feststeht, daß seine Projektionen erreichbar sind, gibt es auch ein Paar erreichbarer Hauptlinien, namlich die durch diesen Punkt

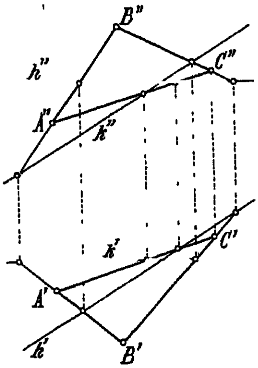


Fig 288

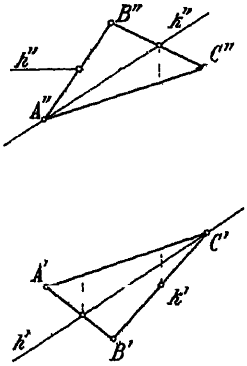


Fig 289

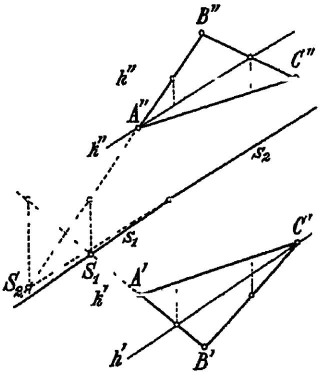


Fig 290

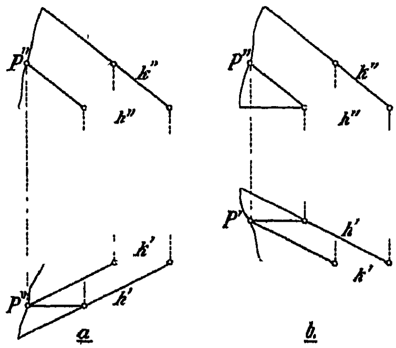


Fig 291

Zur Darstellung einer Ebene durch ein Winkelfeld (Nr. 198) gehört insbesondere die durch ein Winkelfeld, dessen Schenkel Hauptlinien sind, siehe Fig. 291 a oder b, je nachdem die Ebene in beiden Projektionen dieselbe Seite oder verschiedene Seiten zeigt. Um zu einem willkürlich angenommenen Grundriß P' (oder Aufriß P'') eines Punktes P der Ebene den Aufriß P'' (oder Grundriß P') zu ermitteln, wird man hier insbesondere die durch P gehenden Hauptlinien benutzen, wie es Fig. 291 zeigt. Die Winkelschenkel und die Hauptlinien durch P begrenzen zusammen ein Parallelogramm Man gelangt also zur Darstellung einer Ebene durch ein Parallelogramm, von dem zwei

Kanten zur Grundrißtafel und zwei zur Aufrißtafel parallel sind. Den im Grundriß zur Projektionsachse parallelen Kanten entsprechen im Aufriß nicht die zur Achse parallelen Kanten.

Ihrer Wichtigkeit halber kommen wir noch einmal auf die Aufgabe zurück, den Schnitt zweier Ebenen in dem Fall zu bestimmen, wo jede Ebene durch ein Paar h_1, k_1 bzw. h_2, k_2 von Hauptlinien gegeben ist, siehe Fig. 292 Man legt hier entweder durch die Höhenlinien h_1 und h_2 die zur Grundrißtafel parallelen Hilfsebenen oder durch die Hauptlinien k_1 und k_2 die zur Aufrißtafel parallelen Hilfsebenen. Die Höhenebene durch h_1 z. B. schneidet die zweite gegebene Ebene in einer zu h_2 parallelen Höhenlinie, deren Schnittpunkt mit k_2 bekannt ist, so daß ihr Grundriß gezeichnet werden kann. Man bekommt insgesamt vier Punkte der gesuchten Schnittgeraden Zur Erzielung größerer Anschaulichkeit sind die Ebenen in Fig. 292 mit Schraffen versehen worden, und zwar mit denjenigen, die entstehen, wenn man beide Ebenen mit einer Schicht von Ebenen parallel zur Grundrißtafel und mit einer Schicht von Ebenen parallel zur Aufrißtafel schneidet Statt durch h_1 oder h_2 kann man die Hilfsebenen parallel zur Grundrißtafel in anderer Höhe annehmen Entsprechendes gilt von den zur Aufrißtafel parallelen Hilfsebenen Dies wird man tun, wenn Punkte sonst unerreichbar sind.

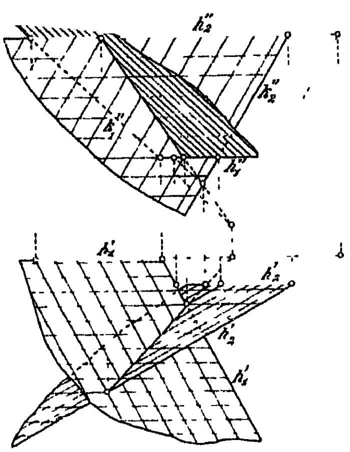


Fig 292

Beide Arten von Hauptlinien einer Ebene fallen in eine einzige Schar von parallelen Geraden zusammen, d h sie haben einerlei Richtung, wenn die Ebene zur Projektionsachse parallel ist Sie unterscheiden sich in ihren Richtungen nur wenig, wenn die Ebene beinahe zur Achse parallel ist In diesem Fall ist die Festlegung der Ebene durch ein Paar Hauptlinien nicht scharf genug. Wir kommen noch einmal darauf zurück (in Nr. 211) Vorläufig vermeiden wir derartige Ebenen Wird eine Ebene z B durch ein Dreieck ABC gegeben, so fallen die durch A gehenden beiden Hauptlinien beinahe zusammen, wenn die Parallelen zur Achse durch A' und A'' die Strecken $B'C'$ und $B''C''$ ungefähr in demselben Verhältnis teilen Dies vermeidet man leicht so: Wenn man die Grundrißprojektion $A'B'C'$ irgendwie angenommen hat, wird etwa A' der Achse am nächsten und B' von ihr am fernsten sein. Man sorge dafür, daß nicht auch im Aufriß $A''B''C''$ zugleich A'' der Achse am nächsten und B'' von ihr am fernsten wird oder umgekehrt A'' ihr am nächsten und B'' von ihr am fernsten liegt.

Anmerkung: Die Bauwerke des Altertums und Mittelalters bezeugen, daß ihre Schöpfer das Projektionsverfahren gekannt haben. Es wird in den Bauhütten des Mittelalters, die jedoch ihre Regeln als Zunftgeheimnisse hüteten, bis zu einem gewissen Grade handwerksmäßig ausgebildet worden sein. Was uns schriftlich aus dem Gebiete der darstellenden Geometrie bis gegen das Ende des achtzehnten Jahrhunderts überliefert worden ist, betrifft im wesentlichen drei Gebiete, die Perspektive, den Steinschnitt und die Gnomonik Die Perspektive wird uns erst im zweiten Bande beschäftigen. Sie lehrt

das Herstellen des Bildes fur den Fall, wo alle Sehstrahlen oder projizierenden Strahlen von einem im Endlichen gelegenen Punkt ausgehen, betrifft also nicht die senkrechte Projektion. Der Steinschnitt oder die Stereotomie ermittelt die Formen der Steine, aus denen die Bauwerke, namentlich Gewolbe und andere schwierigere Teile, zusammenzusetzen sind Die Gnomonik endlich ist die Lehre von der Herstellung der Sonnenuhren (Nr 40). In der Entwicklung der Perspektive, des Steinschnittes und der Gnomonik trat das Grund- und Aufrißverfahren gelegentlich auf, aber nicht als Lehre fur sich Auch beschrankte man sich im wesentlichen auf einen durch senkrechte Projektion gewonnenen Grundriß, zu dem man dann geeignete und meistens lotrechte Querschnitte, also nicht gerade eigentliche Aufrisse hinzufugte. Am selbstandigsten wurde das Verfahren der Projektion auf dem Gebiete des Steinschnittes angewandt. Die Lehrer des Steinschnittes sind daher als die Vorlaufer des Schopfers der Lehre von der senkrechten Projektion im Grund- und Aufriß zu bezeichnen. Insbesondere ist Amédée François Frezier (geb 1682 in Chambéry, franz Genieoffizier und Forschungsreisender, gest 1773 in Brest) zu nennen mit seinem zweibandigen Werk· „Élémens de stéréotomie à l'usage de l'architecture pour la coupe des pierres", Paris 1760.

Fur die Geschichte der darstellenden Geometrie ist die 1748 zu Mézières in den Ardennen begrundete Kriegsschule von besonderer Bedeutung Mit ihr war eine auch Nichtadeligen zugängliche Praktikeranstalt verbunden, in die 1764 Gaspard Monge (Nr. 191) eintrat, der bald selbst Lehrer der Kriegsschule wurde Man behandelte in Mézières insbesondere die wissenschaftliche Seite der Aufgabe des Defilements, wobei es sich darum handelte, ein Festungswerk so anzulegen, daß es von außen nicht eingesehen und auch nicht seitwarts langs seiner Linien durch das feindliche Geschutz bestrichen werden konnte Monge, dessen Streben immer danach ging, das einzelne unter hoheren Gesichtspunkten zusammenzufassen, benutzte die Beziehung der Aufgabe des Defilements zur Schattenkonstruktion, die sich ergibt, wenn man die Geschoßbahnen durch Lichtstrahlen ersetzt Er bemerkte weiter, daß uberhaupt die verschiedenen zeichnerischen Verfahren, die man im Festungsbau, im Straßen- und Kanalbau, beim Steinschnitt usw anwandte und die man bisher immer durchaus voneinander getrennt hatte, auf eine gemeinsame Grundlage gebracht werden konnen, und schuf so ein Lehrgebaude der deskriptiven oder beschreibenden Geometrie, wie er sie nannte Indem er alles, was im Raum ist, durch senkrechte Projeikton auf eine bestimmte wagerechte und eine bestimmte lotrechte Tafel bezog und dann die Tafeln in eine Doppelebene umlegte, gewann er die Grundlage seines Systems Zwar durfte er die Zoglinge der Kriegsschule darin unterrichten, war aber verpflichtet, sein Verfahren als Staatsgeheimnis nach außen hin streng zu huten

Wahrend der Revolution wurde die Kriegsschule zu Mézières wie alle anderen aufgehoben. Im Jahre 1794 beschloß man daher als Ersatz die Errichtung einer École normale in Paris, die jedoch nur bis zum April des Jahres 1795 bestand, indem sie ein Opfer politischer Verdachtigungen wurde. Aber Monge war doch die Gelegenheit geboten, an der École normale uber die darstellende Geometrie zu unterrichten, und er konnte endlich seine Lehre in dem Journal des écoles normales, 1.—4 Bd , Paris 1795, veroffentlichen Der Titel der Schrift lautet. „Leçons de géométrie descriptive, données à l'école normale, publiées d'abord en feuilles, d'après les sténographes" Schon 1794 wurde der neue Plan der Errichtung einer École centrale des travaux publics in Paris gefaßt, die 1795 ins Leben trat, spater den Namen École polytechnique erhielt und noch heute besteht Auf den Vorschlag von Monge hatte man dabei die Anstalt zu Mézières in mancher Hinsicht zum Muster genommen, und außer Monge wirkte eine Anzahl ehemaliger Lehrer aus Mézières an ihr, namentlich Jean Nicole Pierre Hachette (Nr. 77). Es ist ein Verdienst von Monge, daß die darstellende Geometrie zu einem grundlegenden Fach in der technischen Ausbildung wurde Das Mongesche Werk erschien in Buchform unter dem Titel „Géométrie descriptive, leçons donnèes aux écoles normales, l'an III de la République", Paris 1798/99 (spatere Auflagen 1800, 1811, 1820, 1837 und 1847, deutsche Übersetzung durch Robert Haußner. „Darstellende Geometrie" in Ostwalds Klassikern Nr 117, Leipzig 1900) Stark durch Monge beeinflußt ist das Werk seines Mitlehrers und Freundes Hachette „Traité de géométrie descriptive comprenant les applications de cette géométrie aux ombres, à la perspective et à la stéréotomie", Paris 1822, 2. Aufl. 1828 Das Vorwort ist wegen der geschichtlichen Darstellung lesenswert, auch die angehangte Note VII (2 Aufl. S. 296/297) Ein anderes Hauptwerk von Monge muß hier wenigstens genannt werden, seine „Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie", Paris l'an III (1795), 2. Aufl l'an IX (1801), dann als „Application de l'analyse à la géométrie, à l'usage de l'école impériale polytechnique", Paris 1807, 4 Aufl. 1809, 5 Aufl.. „Application de l'analyse à la géométrie", besorgt und mit vielen Anhangen versehen von Josèphe Liouville (geb. 1809 in

St Omer, Professor der Mathematik und Mechanik an der Sorbonne, gest. 1882 in Paris) Paris 1850. Obgleich dies Werk analytisch ist, hat es doch auch für die darstellende Geometrie großen Wert, weil darin viele wichtige Flächenfamilien von einem höheren Standpunkte aus zum ersten Male einheitlich untersucht wurden. Wir kommen auf einige dieser Flächenfamilien im zweiten Bande zurück

Zur Lebensgeschichte von Monge siehe den „Essai historique sur les services et les travaux scientifiques de Gaspard Monge“, Paris 1819, von François Pierre Charles (Baron de) Dupin (geb 1784 zu Varzy im Dép. Nièvre, Marineingenieur, später Professor am Conservatoire des arts et métiers in Paris, Senator und Oberinspektor des Seegeniewesens, gest. 1873 in Paris)

In demselben Jahr, in dem Monge zum erstenmal seine darstellende Geometrie veröffentlichen durfte, erschienen die „Essais de géométrie sur les plans et les surfaces courbes (ou élémens de géométrie descriptive)“, Paris 1795, von Sylvestre François Lacroix (geb. 1765 in Paris, seit 1799 Professor an der Ecole polytechnique, dann an der Universität und am Collège de France, gest 1843 in Paris) Dies kleine Buch entwickelte in überraschender Übereinstimmung dieselben Grundlagen der darstellenden Geometrie Lacroix war in Mézières gewesen, er hatte allerdings nur vorübergehend zu den Schülern von Monge gehört, ferner hatte er in Zeichnungen Einsicht nehmen können, die unter Monges Leitung in Mézières angefertigt worden waren Aber er hat sich gegen den Vorwurf gewehrt, daß er nicht Selbstersonnenes veröffentlicht habe, und man darf annehmen, daß er, allerdings angeregt durch ein unvollkommenes Bekanntwerden mit dem Mongeschen Verfahren, die Lehre von sich aus selbständig wiedergefunden hat Von Lacroix rührt, nebenbei gesagt, der Name der projizierenden Ebenen (Nr 8) her (a a O S 6)

Die neueren Lehrbücher der darstellenden Geometrie fußen alle auf dem Werk von Monge, soweit sie sich nicht eingehender mit der Perspektive beschäftigen, die Monge nur nebenbei berücksichtigte Allerdings ist die weitere Entwicklung der darstellenden Geometrie über Monge hinaus auf das stärkste von seiten der sogenannten neueren Geometrie oder Geometrie der Lage (auch projektive Geometrie genannt) beeinflußt worden Darauf ist gelegentlich zurückzukommen Monge und seine Schüler bevorzugten zur Lösung der Aufgaben die Spurgeraden der Ebenen Da diese aber oft unerreichbar sind, hat man sich im Laufe des neunzehnten Jahrhunderts allmählich davon befreit Man sah ein, daß die Tafeln parallel mit sich verschoben werden dürfen (Nr 12), es also nicht auf die Lage der Projektionsachse, sondern nur auf ihre Richtung ankommt In dieser Hinsicht ist namentlich das Tafelwerk „Notes et croquis de géométrie descriptive“, Paris 1847, von Bardin zu nennen, von deutschen Werken das „Lehrbuch der darstellenden Geometrie“, Nürnberg 1851, 2 Aufl in 3 Bänden 1871/74, von Friedrich August Klingenfeld (Professor der darstellenden Geometrie in Nürnberg, dann am Münchener Polytechnikum, gest 1880 in München), siehe insbesondere die Vorrede zur ersten Auflage

Man nennt Monge zuweilen schlechtweg den Begründer der darstellenden Geometrie als Wissenschaft (siehe z B das in Nr 2 erwähnte Buch von F J Obenrauch) Dies trifft aber nur dann zu, wenn man von der Perspektive absieht, die ein ganz wesentlicher Bestandteil der darstellenden Geometrie ist und schon lange vor Monge von anderen wissenschaftlich begründet worden war Darauf kommen wir im zweiten Bande zurück

Es darf nicht verschwiegen werden, daß das methodische Verfahren von Monge wie alle Methoden Gefahr läuft, zu erstarren: Das Einzwängen der Konstruktion in ein bestimmtes Tafelpaar, von dem namentlich die Aufrißtafel oft keine dazu berechtigenden ausgezeichneten Eigenschaften aufweist, ist nicht unbedingt erforderlich Im ersten Kapitel haben wir ja gesehen, wie viele Aufgaben der darstellenden Geometrie durch senkrechte Projektion auf eine einzige Tafel gelöst werden können. Auch wird durch das Mongesche Verfahren die allgemeine, schiefe Parallelprojektion (siehe das zweite Kapitel) zu leicht in den Hintergrund gedrängt.

202. Kennzeichen für das Senkrechtstehen einer Geraden auf einer Ebene. In Nr. 18 wurde gezeigt, daß alle Aufgaben über das Senkrechtstehen auf eine der beiden Aufgaben zurückzuführen sind, entweder die zu einer gegebenen Richtung senkrechte Stellung oder die zu einer gegebenen Stellung senkrechte Richtung zu bestimmen. Diese beiden Aufgaben lassen sich nun leicht mit Hilfe der Hauptlinien lösen.

Die Richtung einer Geraden g ist bekannt, sobald die Richtungen ihrer beiden Projektionen g', g'' vorliegen, wenn wir von denjenigen Geraden absehen, die mit der Projektionsachse rechte Winkel bilden (Nr. 194). Die Stellung einer Ebene E ist bekannt, sobald die Richtung ihrer Hauptlinien erster Art h im Grundriß und die Richtung ihrer Hauptlinien zweiter Art k im Aufriß, also die Richtungen von h' und k'' vorliegen. Denn h'' und k' sind ja stets zur Projektionsachse parallel. Hierbei sehen wir von denjenigen Ebenen ab, die zur Achse parallel sind (Nr. 201). Wenn nun die Gerade g zur Ebene E senkrecht ist, bildet g mit allen Geraden der Ebene E rechte Winkel, insbesondere mit den Hauptlinien h und k. Da ferner h zur Grundrißtafel und k zur Aufrißtafel parallel ist, folgt aus dem Satz über die senkrechte Projektion eines rechten Winkels mit einem zur Tafel parallelen Schenkel (Nr. 18): Die Grundrißprojektion g' ist zur Grundrißprojektion h' und die Aufrißprojektion g'' zur Aufrißprojektion k'' senkrecht. Demnach gilt der wichtige Satz:

Eine die Projektionsachse nicht senkrecht kreuzende Gerade steht auf einer nicht zur Achse parallelen Ebene dann, aber auch nur dann senkrecht, wenn ihr Grundriß zu den Grundrissen der Hauptlinien erster Art sowie ihr Aufriß zu den Aufrissen der Hauptlinien zweiter Art der Ebene senkrecht ist.

Hieraus erhellt die Wichtigkeit der Hauptlinien: Sobald zu einer Ebene senkrechte Geraden vorkommen, bedarf man nur der Hauptlinien h und k der Ebene, um alle jene Geraden im Grundriß und Aufriß darzustellen, indem man sie im Grundriß senkrecht zu h' und im Aufriß senkrecht zu k'' zieht

203. Lot von einem Punkt auf eine Ebene oder Gerade. Ist eine Ebene durch ein Dreieck ABC gegeben und soll von einem gegebenen Punkt P das Lot l auf die Ebene gefällt werden, so ermittelt man zunächst nach Fig. 289 von Nr. 201 ein Paar Hauptlinien h und k der Ebene, siehe Fig 293, und zieht l' durch P' senkrecht zu h' sowie l'' durch P'' senkrecht zu k''. Der Fußpunkt Q des Lotes ist der Schnittpunkt der Geraden l mit der Ebene ABC, er wird nach Nr. 199 bestimmt. Schließlich stellt man, wenn das Dreieck ABC undurchsichtig ist, den unsichtbaren Teil des Lotes l nach Nr. 195 fest. Es kann übrigens sehr wohl vorkommen, daß das Lot l die Ebene ABC in einem Punkte Q trifft, der außerhalb des Dreiecks ABC liegt, so daß dann das Lot an dem Dreieck vorbeigeht.

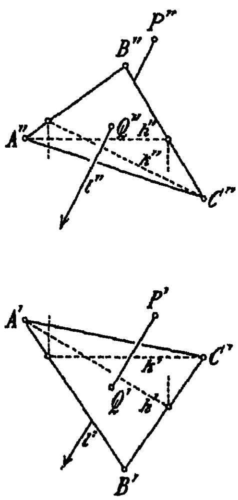


Fig 293

In Fig. 294 ist dieselbe Aufgabe für den Fall gelöst, wo die Ebene durch ein Winkelfeld (a, b) gegeben ist. Auch hier hat man zuerst irgendein Paar Hauptlinien h und k der Ebene zu ermitteln; nach Nr. 201 zeichnet man zu diesem Zweck zunachst h'' und k' beliebig parallel zur Achse. Aus den Schnittpunkten von h'' mit a'' und b'' und den Schnittpunkten von k' mit a'

und b' findet man dann die Projektionen h' und k'', und das Lot l liegt wieder so, daß $l' \perp h'$ und $l'' \perp k''$ ist. Der Fußpunkt Q des Lotes wird wieder nach Nr. 199 gefunden.

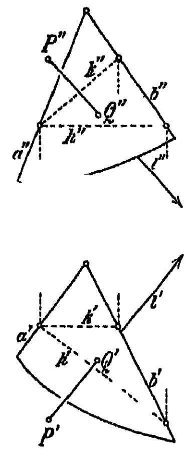


Fig 294

Die Aufgabe, in einem Punkt Q einer Ebene ABC das Lot l auf die Ebene zu errichten, ist ebenso einfach zu lösen. Man muß nur beachten, daß bloß eine der beiden Projektionen von Q beliebig gewählt werden darf Da man der Hauptlinien zur Bestimmung des Lotes l bedarf, wird man die andere Projektion von Q dadurch ermitteln, daß man als Hilfsgerade durch Q in der Ebene ABC eine Hauptlinie durch Q benutzt. Ist also z. B. Q' gegeben, so zeichnet man k' parallel zur Achse durch Q' und sucht den zugehörigen Aufriß k'', indem man die Schnittpunkte von k mit den Dreieckskanten benutzt. Alles weitere ergibt sich leicht.

Soll von einem Punkt P das Lot PQ auf eine Gerade g gefallt werden, so bestimmt man wie in Nr. 19 zunachst die Ebene durch P, die zu g senkrecht ist Die durch P gehenden Hauptlinien h und k dieser Ebene liegen nach Nr. 202 so, daß $h' \perp g'$ und $k'' \perp g''$ ist Da ferner h'' und k' zur Projektionsachse parallel sind, kann man die Projektionen beider Hauptlinien zeichnen, siehe Fig. 295 Dann ist die zu g senkrechte Ebene durch P vermittels des Winkelfeldes der Hauptlinien h und k dargestellt, und nun ist noch der Schnittpunkt Q der Ebene mit g nach Nr. 199 zu bestimmen. Das gesuchte Lot ist PQ. In Fig 295 ist der besseren Anschaulichkeit zuliebe angenommen worden, daß die zu g senkrechte Ebene durch P ein undurchsichtiges Winkelfeld habe, und die Sichtbarkeit nach Nr. 195 festgestellt worden.

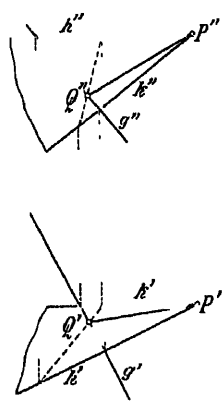


Fig 295

204. Wahre Länge einer Strecke. Eine Strecke AB erscheint im Grundriß und Aufriß stets verkurzt, es sei denn, daß sie zu einer der Tafeln parallel sei. Da dies im allgemeinen nicht der Fall ist, bringt man sie, um ihre wahre Lange zu bestimmen, durch eine Drehung (Nr. 13) in eine solche Lage. Die Drehachse selbst muß zu diesem Zwecke parallel zu einer der Tafeln gewählt werden. So kann z. B diejenige Höhenlinie h als Drehachse dienen, die von B ausgeht und in der Ebene liegt, durch die AB auf die Grundrißtafel projiziert wird, die also $A'A$ in einem Punkte C trifft, dessen Grundriß C' mit A' zusammenfallt, während sein Aufriß C'' so hoch

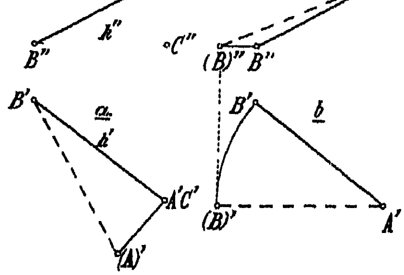


Fig. 296.

wie B'' liegt, siehe Fig 296 a. Man kann aber auch als Drehachse den A auf die Grundrißtafel projizierenden Strahl $A'A$ benutzen, siehe Fig. 296 b. Im ersten Fall dreht man die Ebene ABC, d. h. die AB auf die Grundrißtafel projizierende Ebene so weit, bis sie zur Grundrißtafel parallel liegt, im zweiten dreht man dieselbe Ebene so weit, bis sie zur Aufrißtafel parallel liegt Im ersten Fall findet sich die Grundrißprojektion $(A)'$ des Punktes A in der neuen Lage, indem man auf $B'C'$ in C' das Lot $C'(A)' = C''A''$ errichtet, so daß $B'(A)'$ die gesuchte wahre Länge ist. Im zweiten Fall beschreibt B einen Kreis, dessen Ebene zur Grundrißtafel parallel ist, so daß B' den Kreis um A' und B'' eine Parallele zur Projektionsachse beschreibt. Da die Strecke AB schließlich zur Aufrißtafel parallel werden soll, ist der Grundriß $(B)'$ der Endlage (B) von B auf der Parallelen zur Projektionsachse durch A' gelegen. Daraus findet man die zugehorige Aufrißprojektion $(B)''$, und nun ist die gesuchte wahre Lange gleich $(B)''A''$.

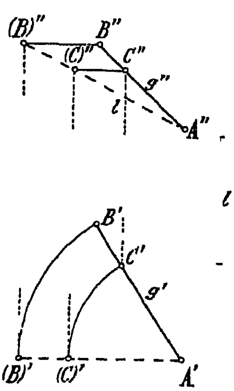


Fig 297

Das zweite Verfahren, das in Fig. 296 b, ist beim Arbeiten mit der Reißschiene bequemer als das erste Deshalb ziehen wir es vor

Die Aufgabe, eine Strecke von gegebener Lange l von einem Punkte A aus auf einer Gerade g aufzutragen, die durch ihre Projektionen gegeben ist, löst man, indem man g zunachst um das Lot $A'A$ so weit dreht, bis g zur Aufrißtafel parallel wird Man nimmt namlich auf g einen Punkt B beliebig an und bestimmt seine Endlage (B) wie in Fig. 296 b. Dann ist $A(B)$ zur Aufrißtafel parallel, also im Aufriß in wahrer Lange zu sehen. Folglich tragt man die gegebene Strecke l von A'' aus auf $A''(B)''$ bis $(C)''$ auf, siehe Fig 297, und ubt dann die Drehung rückwarts aus Dadurch bekommt man den Grundriß C' und Aufriß C'' des gesuchten Endpunktes C der Strecke $AC = l$ auf g. Eine Probe der Richtigkeit besteht darin, daß C' und C'' auf einem Lot zur Projektionsachse liegen müssen.

205. Ebene Figuren von gesuchter oder gegebener Gestalt. Die hierher gehörigen Aufgaben löst man wie in Nr. 14, indem man Drehungen um zur Grundrißtafel parallele Geraden, also um Höhenlinien benutzt, wodurch man die Ebene einer ebenen Figur in eine zur Grundrißtafel parallele Lage bringen kann, so daß dann der Grundriß ihre wahre Gestalt zeigt.

Um also die wahre Gestalt und Größe eines durch seine Projektionen gegebenen Dreiecks ABC zu bestimmen, zieht man etwa die Hohenlinie h durch A und nimmt sie zur Drehachse, siehe Fig 298 Die Radien der Drehkreise, die B und C um die Mittelpunkte M_b und M_c beschreiben, sind wie in Nr. 14 die Hypotenusen der rechtwinkligen Dreiecke, von denen die einen Katheten die aus dem Grundriß zu entnehmenden seitlichen Abstande der Punkte B und C von der Drehachse h, also $B'M_b'$ und $C'M_c'$, sind, wahrend die anderen Katheten die Höhenunterschiede von B und C gegenüber der Drehachse h sind. Diese Höhenunterschiede entnimmt man aus dem Aufriß als die Hohenunterschiede

von B'' und C'' gegenüber h'' Die rechtwinkligen Dreiecke sind im Aufriß konstruiert. Da der Punkt B tiefer und der Punkt C höher als h liegt, kommen B' und C' nach vollendeter Drehung auf verschiedene Seiten von h', und die Gerade $(B)'(C)'$ schneidet h' in demselben Punkt wie die Gerade $B'C'$

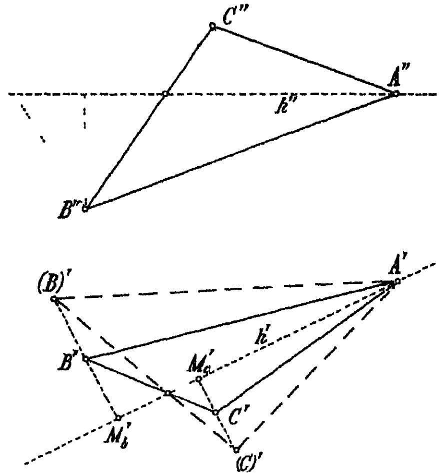


Fig 298

Man kann die Aufgabe auch dadurch lösen, daß man die Ebene ABC durch Drehung um eine Hauptlinie zweiter Art k in eine zur Aufrißtafel parallele Lage bringt, indem man wie vorher verfahrt, aber Grundriß und Aufriß vertauscht, siehe Fig. 299.

Die umgekehrte Aufgabe, eine gegebene ebene Figur in eine allgemeine Lage zu den Tafeln zu bringen und in beiden Projektionen darzustellen, laßt sich wie in Fig 10 von Nr 14 lösen, denn dort ergaben sich außer den Grundrissen aller Punkte auch ihre Höhen, so daß auch die Aufrisse aller Punkte gezeichnet werden konnen

Wir wollen aber noch ein anderes Verfahren besprechen, indem wir uns die Ebene, in der die Figur von gegebener Form liegen soll, als Winkelfeld eines Paares von Hauptlinien h, k geben (Nr 201) Der Scheitel des Winkelfeldes heiße A, siehe Fig 300 Zunachst bringen wir die Ebene durch Drehung um h in eine zur Grundrißtafel parallele Lage. Dabei geht k in eine Gerade (k) uber, deren Aufriß mit h'' zusammenfallt. Ihr Grundriß (k) ist bekannt, sobald der eines Punktes B von k nach der Drehung ermittelt ist Nun dreht sich ein beliebig auf k angenommener Punkt B um einen Punkt M_b von h, dessen Grundriß der Fußpunkt des Lotes von B' auf h' ist, so daß $(B)'$ auf dies Lot kommt. Man könnte den Radius des Drehkreises ermitteln und von M_b' aus bis $(B)'$ abtragen, aber es gibt ein bequemeres Verfahren. Die Gerade AB

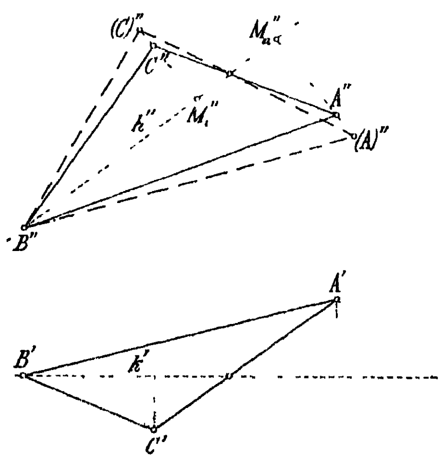


Fig 299

oder k ist zur Aufrißtafel parallel, so daß $A''B''$ die wahre Lange von AB vorstellt. Nach der Drehung ist sie zur Grundrißtafel parallel, d. h. $(B)'$ muß so liegen, daß $A'(B)' = AB = A''B''$ ist. Demnach ergibt sich $(B)'$ als Schnittpunkt des Kreises um A' mit dem Radius $A''B''$ und des von B' auf h' gefällten Lotes. Nunmehr ist das Winkelfeld $(h\,k)$ in der Umlegung dargestellt, weil die umgelegte Gerade (k) jetzt die Gerade $A(B)$ ist, während h in Ruhe geblieben ist. Jetzt zeichnen wir in

die umgelegte Ebene die gegebene Figur im Grundriß in wahrer Gestalt ein; wir wählen wie in Fig. 10 von Nr. 14 etwa ein regelmäßiges Sechseck. Die noch zu erledigende Aufgabe besteht darin, die Drehung rückwärts auszuführen. Zur Ermittlung der beiden Projektionen des Sechsecks kann man dabei zwei Verfahren anwenden, das Punkt- und das Geradenverfahren.

Das Punktverfahren besteht darin, daß man die einzelnen Punkte der Figur zurückdreht. Wir erlautern es am Mittelpunkt (M) des Sechsecks. Die Gerade $(B)(M)$ schneidet h in einem Punkt N, der bei der Drehung in Ruhe bleibt, so daß man Grundriß und Aufriß der Geraden BM nach der Zurückdrehung kennt. Der von (M) beschriebene Drehkreis erscheint im Grundriß als das Lot von $(M)'$ auf h'; der Schnittpunkt dieses Lotes mit $N'B'$ ist demnach M', und da M'' auf $N''B''$ liegt, ist also auch M'' bekannt. Man kann aber zur Bestimmung von M' und M'' auch die durch die Sechsecksmitte gehenden Hauptlinien der Ebene benutzen. Sie werden zuerst in der Umlegung parallel zu h' und $(k)'$ gezeichnet. Die eine schneidet $(k)'$ in $(V)'$, die andere h' in U'. Der Punkt U, dessen Aufriß man sofort findet, bleibt in Ruhe. Der Aufriß V'' von V nach der Zurückdrehung liegt auf k'' so, daß $A''V'' = A'(V)'$ ist, und der Grundriß V' ist der Schnittpunkt von k' mit dem Lot von $(V)'$ auf h'.

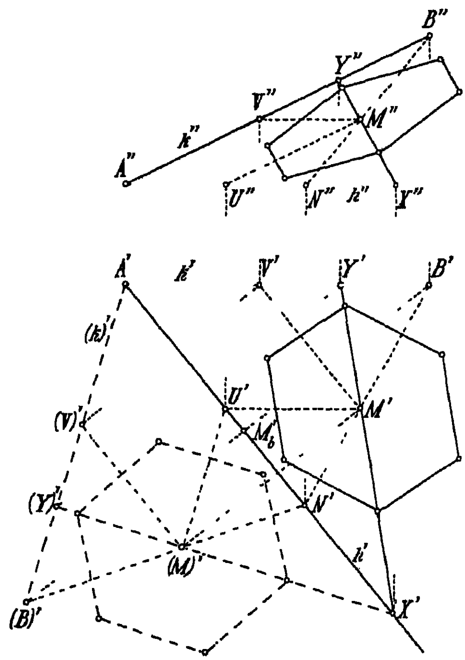


Fig. 300.

Indem man nun durch U', V' und U'', V'' die Projektionen der Hauptlinien des Punktes M zieht, findet man durch ihre Schnitte sowohl M' als auch M''. Ebenso kann man alle Ecken des Sechsecks nach der Zurückdrehung bestimmen.

Das Geradenverfahren, das vorzuziehen ist, besteht darin, daß man Geraden der Figur zurückdreht, z. B. die Diagonalen des Sechsecks. Dies ist in Fig. 300 an einer Diagonalen gezeigt. Sie schneidet in der Umlegung h' in X' und $(k)'$ in $(Y)'$. Wie vorhin U und V werden jetzt X und Y in beiden Projektionen ermittelt, indem wieder zu beachten ist, daß $A''Y'' = A'(Y)'$ sein muß.

Wir knüpfen hier noch eine einfache, aber nützliche Bemerkung an: In Nr. 198 wurde erwähnt, wie man die beiden Projektionen eines ebenen Vierecks von beliebiger Gestalt zu zeichnen hat. Will man die Projektionen irgendeines ebenen Vielecks von beliebiger Gestalt haben, so ist es am besten, sich der Hauptlinien der Ebene zu bedienen: Wir geben also die Ebene wie soeben durch ein Winkelfeld zweier Hauptlinien h, k, siehe Fig. 301, und zeichnen die Grundriß-

projektion des Vielecks nach Belieben. Dann können wir die Grundrisse der durch die Ecken des Vielecks gehenden Hauptlinien der Ebene als Parallelen zu h' und k' einzeichnen. Ihre Schnittpunkte mit k' bzw. h' liefern durch Lote auf die Projektionsachse die zugehörigen Aufrisse, so daß die Aufrißprojektionen der Hauptlinien gezogen werden können, wodurch sich als ihre Schnittpunkte die Aufrisse der Ecken des Vielecks ergeben. Eine Probe der Richtigkeit besteht darin, daß diese Aufrisse mit den zugehörigen Grundrissen auf Loten zur Achse liegen müssen.

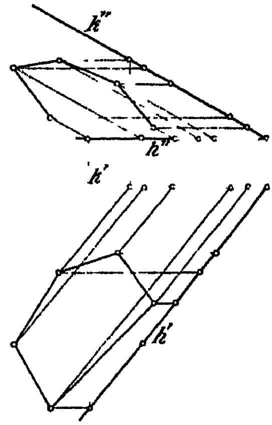


Fig 301

206. Rückblick und Übungen. Auf der Ebene des Zeichenbrettes vermag man mit Hilfe des Bleistiftes, des Lineals oder der Zeichendreiecke und des Zirkels diejenigen Aufgaben zu lösen, die man als d i e G r u n d a u f g a b e n i n d e r G e o m e t r i e d e r E b e n e bezeichnen kann. Das sind die Aufgaben des Verbindens von Punkten zu Geraden und des Schneidens von Geraden in Punkten. Hierzu gehört insbesondere die Aufgabe des Parallelenziehens. Ferner gehören hierher die Aufgaben des Lotefällens und Loterrichtens und schließlich die des Abtragens von Strecken von gegebener Länge.

Ganz entsprechend redet man von G r u n d a u f g a b e n i n d e r G e o m e t r i e d e s R a u m e s. Das sind die Aufgaben des Verbindens von Punkten und Geraden zu Geraden und Ebenen und des Schneidens von Geraden und Ebenen in Punkten und Geraden. Hierzu gehört wieder insbesondere die Aufgabe des Parallelenziehens. Ferner gehören hierher die Aufgaben, die sich auf das Senkrechtstehen von Geraden und Ebenen beziehen, und schließlich die des Abtragens von Strecken von gegebener Länge. Tatsächlich kann man nun diese Aufgaben im Raume nur in Gedanken lösen, da wir nicht wie in der Ebene im Raume zeichnen können. Aber man kann, wie in diesem Paragraphen gezeigt worden ist, die Lösungen der Grundaufgaben in ihren Grund- und Aufrissen angeben. Deshalb können wir sagen, d a ß w i r n u n m e h r i m s t a n d e s i n d, d i e G r u n d a u f g a b e n d e r G e o m e t r i e d e s R a u m e s m i t H i l f e d e r d a r s t e l l e n d e n G e o m e t r i e z u e r l e d i g e n.

In den folgenden Übungsbeispielen wird, wenn von gegebenen Punkten, Geraden oder Ebenen die Rede ist, immer gemeint, daß diese Punkte, Geraden und Ebenen durch ihre beiden Projektionen auf die Grundriß- und Aufrißtafel gegeben seien.

1) Gegeben eine Gerade und eine Ebene. Wie stellt man fest, ob die Gerade zur Ebene parallel ist? Man ziehe durch einen Punkt der Ebene die Parallele zur Geraden und untersuche, ob sie der Ebene angehört (Nr. 198).

2) Zwei Ebenen sind durch Dreiecke gegeben. Wie stellt man fest, ob sie dieselbe Stellung haben?

3) Den Schnittpunkt einer gegebenen Geraden mit einer durch ein Winkelfeld gegebenen Ebene zu bestimmen (Nr. 199).

4) Die Spurgeraden einer durch ein Winkelfeld gegebenen Ebene zu bestimmen.

5) Eine Ebene sei durch ihre Spurgeraden gegeben. Wann zeigt sie in beiden Projektionen dieselbe Seite? Wie findet man mittels Hauptlinien zum Grundriß oder Aufriß eines Punktes der Ebene den Aufriß oder Grundriß des Punktes?

6) Bestimmung des Schnittpunktes einer gegebenen Geraden mit einer durch ihre Spurgeraden gegebenen Ebene.

7) Bestimmung der Schnittgeraden zweier durch ihre Spurgeraden gegebenen Ebenen.

8) Von einem gegebenen Punkt das Lot auf eine durch ihre Spurgeraden gegebene Ebene zu fallen, den Fußpunkt und die Länge des Lotes zu bestimmen (Nr. 202).

9) Den Abstand zwischen zwei gegebenen parallelen Geraden zu bestimmen. Entweder schneidet man die Geraden mit einer zu ihnen senkrechten Ebene (Nr. 202), oder man dreht die Ebene beider Geraden um eine Höhenlinie, so daß sie zur Grundrißtafel parallel wird (Nr. 205)

10) Welchen Winkel bilden die gegebenen Spurgeraden einer Ebene miteinander?

§ 2. Seitenrisse.

207. Neue Aufrißtafel. Daß wir uns die Grundrißtafel gern wagerecht vorstellen, hat seine Ursache einmal darin, daß die darzustellenden Gegenstände, wie z. B. Bauwerke oder Maschinen, meistens eine wagerechte Grundebene haben, und zweitens darin, daß uns der Begriff der wagerechten Ebene durch alltägliche Erfahrung wohlvertraut ist. Dagegen zeichnet sich eigentlich keine unter allen lotrechten Ebenen durch ihre Stellung besonders aus, höchstens etwa die Nord-Süd-Ebene, und auch diese nur, wenn die Himmelsrichtungen eine Rolle spielen. Deshalb hat die Auswahl einer bestimmten Aufrißtafel etwas Willkürliches. Häufig ersetzt man diese Tafel durch eine andere lotrechte Ebene, um dadurch eine Aufgabe zu vereinfachen.

Solch eine neue Aufrißtafel wird eine Seitenrißtafel genannt, weil die auf ihr herzustellende senkrechte Projektion eines Gegenstandes einen seitlichen Anblick von ihm gibt. Man wird die neue Tafel so stellen, daß sie den im Hauptquadranten (Nr. 194) befindlichen Gegenstand nicht zerschneidet, und wird dann unter ihrer Vorderseite diejenige verstehen, die nach dem Gegenstand hin gerichtet ist. Dadurch ergibt sich die Regel für die Sichtbarkeit der Projektion auf die Seitenrißtafel, des sogenannten Seitenrisses, wie in Nr. 195. Weil man aber den Seitenriß nur als gelegentliches Hilfsmittel anwendet, gibt man sich meistens nicht unnütz mit der Feststellung seiner sichtbaren Teile ab.

Die Seitenrißtafel ist durch die Angabe ihrer Grundriß-Spurgeraden s_1 bestimmt. Ihre Aufriß-Spurgerade s_2 steht im Schnittpunkt von s_1 mit der alten Projektionsachse auf dieser Achse senkrecht. Sie wird aber beim Entwerfen des Seitenrisses nicht gebraucht. Die Spurgerade s_1 kann man die neue Projektionsachse nennen. Die Seitenrißtafel steht in derselben Beziehung zur Grundrißtafel wie die Aufrißtafel, man legt sie daher um s_1 in die Grundrißtafel um, und zwar zweckmäßig so, daß der in ihr enthaltene Seitenriß eines im Hauptquadranten befind-

lichen Gegenstandes nicht auf die Grundrißzeichnung fällt, sondern jenseits der neuen Achse s_1 zu liegen kommt. Die Höhe der Seitenrißprojektion P''' eines Punktes P über der Seitenrißachse s_1 ist gleich der Höhe des Punktes P über der Grundrißtafel, also gleich der Höhe des Aufrisses P'' über der ursprünglichen Projektionsachse, so daß man den Seitenriß P''' sofort aus dem gegebenen Grundriß P' und Aufriß P'' ermitteln kann. In Fig. 302 ist auf diese Art der Seitenriß $P'''Q'''R'''$ eines Dreiecks PQR aus dem Grund- und Aufriß des Dreiecks abgeleitet worden. Die Seitenrisse machen wir durch den dreifachen Akzent kenntlich. Alles im ersten Paragraphen über den Grund- und Aufriß Gesagte gilt entsprechend auch für den Grund- und Seitenriß. Man findet z. B. den Seitenriß-Spurpunkt S_3 der Geraden PQ als denjenigen Punkt von $P'''Q'''$, dessen Grundriß auf der neuen Achse s_1 liegt (Nr 194).

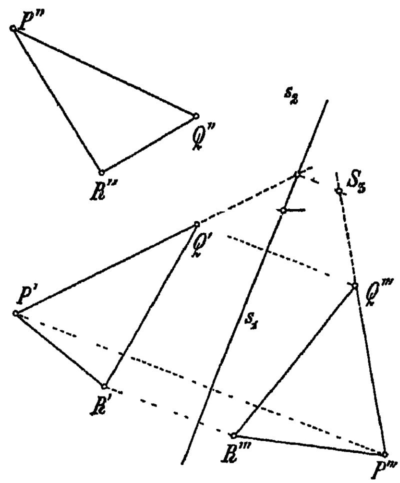


Fig 302

Hauptlinien in bezug auf die Seitenrißtafel heißen (nach Nr 201) diejenigen Linien, die zur Seitenrißtafel parallel sind. Ist eine Gerade g durch ihren Grundriß g' und Aufriß g'' gegeben, so kann man die Seitenrißtafel so annehmen, daß die Gerade g eine derartige Hauptlinie wird, nämlich indem man die neue Tafel oder Achse parallel zu g' wählt.

208. Nochmals das Lot von einem Punkt auf eine Gerade. Von dem soeben Gesagten machen wir eine Anwendung, indem wir die Aufgabe, von einem gegebenen Punkt P das Lot PQ auf eine gegebene Gerade g zu fällen, auf andere Weise als in Nr 203, Fig. 295, lösen. Wir wählen die neue Projektionsachse parallel zum Grundriß g' von g und bestimmen die Seitenrisse P''' und g''' von P und g, den von g dadurch, daß wir die Seitenrisse A''', B''' zweier Punkte A, B von g ermitteln, siehe Fig. 303. Die gesuchte Gerade PQ bildet mit g einen rechten Winkel, von dem ein Schenkel, nämlich g, zur Seitenrißtafel parallel ist, so daß der Seitenriß dieses rechten Winkels nach Nr. 18 ebenfalls ein rechter Winkel sein muß. Mithin ist $P'''Q''' \perp g'''$. Nachdem man dadurch Q''' gefunden hat, bestimmt man daraus rückwärts Q' und Q'' auf g' und g''. Der Aufriß Q'' muß so hoch über der alten Projektionsachse liegen wie der Seitenriß Q'''

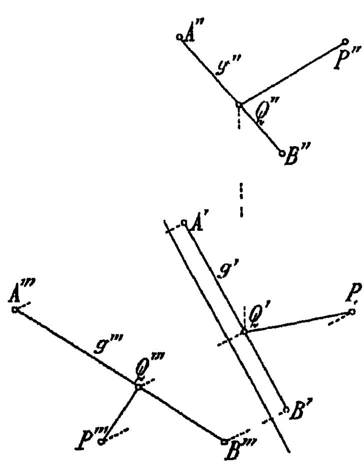


Fig 303

über der neuen; diese Bemerkung wird zuweilen die Ermittlung von Q'' verschärfen.

209. Kreuzriß. Insbesondere kann man die Seitenrißtafel senkrecht zu beiden ursprünglichen Tafeln, also senkrecht zur Projektionsachse annehmen. Dann nennt man sie eine Kreuzrißtafel, die senkrechte Projektion eines Gegenstandes auf sie den Kreuzriß des Gegenstandes. Der Kreuzriß zeigt den Anblick des Gegenstandes aus der Richtung der alten Projektionsachse her, d. h. aus derjenigen Richtung, die sowohl zur Richtung, aus der man den Grundriß betrachtet, als auch zur Richtung, aus der man den Aufriß betrachtet, senkrecht ist. Die Kreuzrißtafel kann man sowohl hinsichtlich der Grundrißtafel als neue Aufrißtafel auffassen als auch hinsichtlich der Aufrißtafel als neue Grundrißtafel. Nur ist im zweiten Falle diese neue

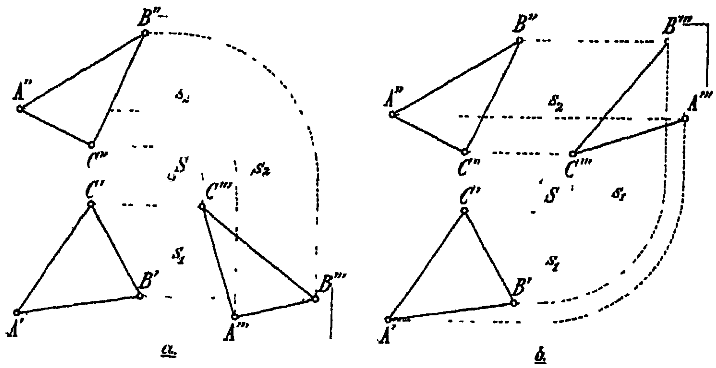


Fig 304

Grundrißtafel nicht wagerecht, wie wir sie sonst anzunehmen gewöhnt sind. Wegen dieser doppelten Beziehung der Kreuzrißtafel sind zwei verschiedene Arten ihrer Umlegung gleichberechtigt: Entweder kann

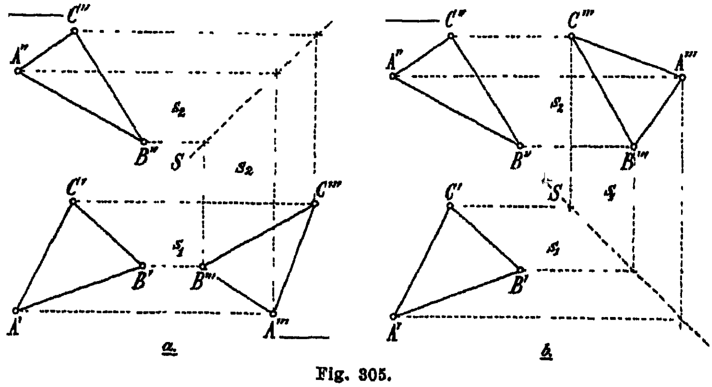


Fig. 305.

man sie wie in Nr. 207 um ihre Grundriß-Spurgerade s_1 in die Grundrißtafel umlegen oder aber um ihre Aufriß-Spurgerade s_2 in die Aufrißtafel. Beide Arten sind in Fig. 304 a und b an dem Beispiel eines Dreiecks ABC gezeigt. Beim Übertragen in die neue Tafel hat man Kreise

um den Punkt S zu ziehen, in dem die Kreuzrißtafel die alte Projektionsachse schneidet. Bequemer ist es wenn man mit der Reißschiene arbeitet, die Hilfsgerade durch S unter 45° zu benutzen, wie es Fig. 305a und b zeigt. Allerdings sind die rechtwinkligen Schnitte der Kreise mit s_1 und s_2 genauer als die Schnitte mit dieser Hilfsgeraden.

Im allgemeinen bevorzugt man die Umlegung der Kreuzrißtafel um s_2 in die Aufrißtafel. Hierbei tritt die Schnittgerade s_1 der Kreuzrißtafel mit der Grundrißtafel zweimal auf, dazwischen liegt eine Lücke in Form eines rechten Winkels. Man muß aber im Auge behalten, daß der Kreuzriß auch in dieser Umlegung in derselben Beziehung zum Grundriß steht wie der Aufriß, nur ist dies sprachlich und zeichnerisch nicht so bequem wie früher. Hieß es z. B. früher, daß der Grundriß A' und Aufriß A'' eines Punktes P auf einem Lot zur Achse liegen, so heißt es in bezug auf den Grundriß A' und Kreuzriß A''' so· Die Punkte A' und A''' liegen derart, daß die Lote von ihnen auf die Spurgerade s_1 in der alten und neuen Lage Fußpunkte haben, die einen Viertelkreis um S begrenzen.

210. Hauptlinien dritter Art. Als Hauptlinien dritter Art bezeichnen wir solche Linien, die zur Kreuzrißtafel parallel sind Während wir die Hauptlinien erster und zweiter Art mit h und k bezeichneten (Nr. 201), werden wir bei denen von der dritten Art das Zeichen j benutzen

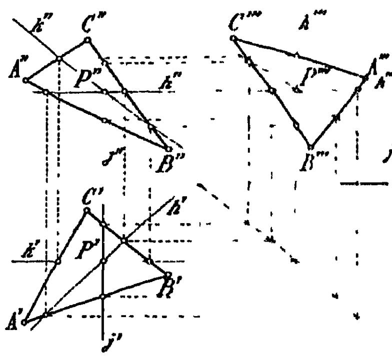


Fig 306

Liegt eine durch ein Dreieck ABC gegebene Ebene vor, so enthalt sie von jeder der drei Arten von Hauptlinien h, k, j je unendlich viele parallele Geraden Die Hauptlinien erster Art h haben zur Grundrißtafel parallele Aufrisse h'' und Kreuzrisse h''', die Hauptlinien zweiter Art k zur Aufrißtafel parallele Grundrisse k' und Kreuzrisse k''', die Hauptlinien dritter Art j zur Kreuzrißtafel parallele Grundrisse j' und Aufrisse j''. In Fig. 306 sind diese Geraden h, k, j durch einen Punkt P der Ebene ABC in allen drei Projektionen dargestellt.

Aus Nr 202 folgt sofort: Ist eine Gerade g zu einer Ebene senkrecht, so ist g' zu den Grundrissen h' der Hauptlinien erster Art, g'' zu den Aufrissen k'' der Hauptlinien zweiter Art und g''' zu den Kreuzrissen j''' der Hauptlinien dritter Art der Ebene senkrecht. Hiernach läßt sich die schon in Nr. 203 gelöste Aufgabe, von einem Punkt P aus das Lot auf eine Ebene ABC zu fällen und seinen Fußpunkt zu bestimmen, in allen drei Projektionen leicht erledigen, siehe Fig. 307. Der Fußpunkt kann dabei als Schnittpunkt des Lotes mit der Ebene ABC in jeder

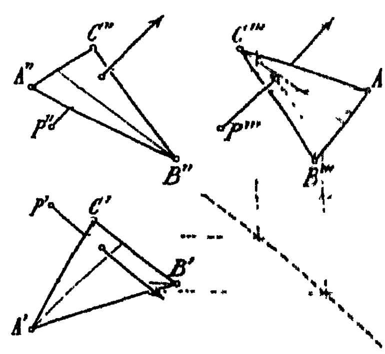


Fig. 307.

der drei Projektionen doppelt bestimmt werden. Denn das allgemeine in Nr. 199 angegebene Schnittverfahren läßt sich auch auf den Kreuzriß anwenden. Man legt durch das Lot die zur Kreuzrißtafel senkrechte Ebene. Sie schneidet das Dreieck ABC in einer Geraden, die mit den Kanten des Dreiecks Punkte gemein hat, deren Grundrisse bzw. Aufrisse je eine Gerade liefern, auf der der gesuchte Schnittpunkt in der Grundriß- bzw. Aufrißprojektion liegt. Die Sichtbarkeit im Kreuzriß ist in Fig. 307 unter der Annahme, daß das Dreieck ABC undurchsichtig sei, nach Nr. 195 festgestellt worden. Der Kreuzriß wird dabei von links her betrachtet.

Auch krumme Linien bezeichnen wir als Hauptlinien, nämlich dann, wenn sie in einer Ebene liegen, die zur Grundrißtafel oder zur Aufrißtafel oder zur Kreuzrißtafel parallel ist. Derartige Linien spielen z. B. eine wichtige Rolle bei der Darstellung der Kugel. Hier sind sie Kreise auf der Kugel. Die Kugel hat in jeder der drei Tafeln einen Umriß u', v'', w''' (Nr. 89). Das sind kongruente Kreise, siehe Fig. 308, aber sie gehören nicht zueinander, d. h. z. B. der Aufriß von u' ist nicht v''. Vielmehr sind die drei Umrisse Projektionen dreier verschiedener Großkreise u, v, w der Kugel, und zwar derjenigen, die in den Ebenen liegen, die man durch die Kugelmitte M parallel zu den Tafeln legen kann. Diese Großkreise sind also Hauptlinien erster, zweiter und dritter Art. Sie zerlegen die Kugel in Oktanten, diese Oktanten sind in Fig. 308 mit *1* bis *8* bezeichnet. Ist die Kugel undurchsichtig, so sieht man im Grundriß nur die vier oberen Oktanten *1*, *2*, *3*, *4*, im Aufriß nur die vier vorderen Oktanten *1*, *2*, *5*, *6* und im Kreuzriß nur die vier linken Oktanten *1*, *4*, *5*, *8*. Überall sichtbar ist nur der Oktant *1*. Wird eine der drei Projektionen eines Kugelpunktes P beliebig in einem der Oktanten gewählt, z. B. P' im ersten Oktanten, so findet man P'' und P''', indem man durch P die zu den Tafeln parallelen Ebenen legt. Diese Ebenen schneiden die Kugel in drei Kreisen, der erste erscheint im Grundriß als Kreis, die beiden anderen als Sehnen des Umrisses, und die halben Längen dieser Sehnen sind gleich ihren Radien. Es ist daher leicht, alle drei Kreise auch in den beiden anderen Projektionen zu zeichnen, siehe Fig. 309, und dadurch P'' und P''' zu ermitteln. Man sieht, daß sowohl P'' als auch P''' auf mehrfache Art bestimmt wird, und braucht also eigentlich nur einen der drei Kreise zu verwenden. Die drei Tangenten, die dem Punkte P als Punkt der drei Kreise zukommen, können wir h, k, j nennen, da sie Hauptlinien erster, zweiter und

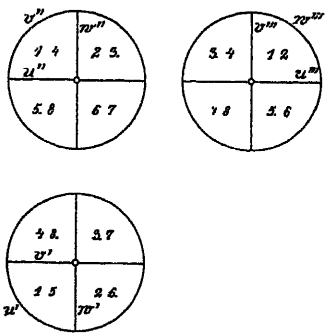


Fig. 308

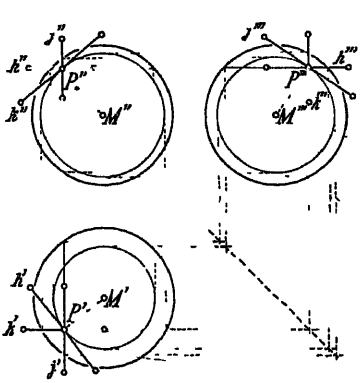


Fig. 309

dritter Art sind. Da man sie sofort zeichnen kann, ist die Aufgabe gelöst worden, an die Kugel eine Tangentialebene zu legen, denn alle drei Geraden gehören der Tangentialebene des Punktes P an. In Fig. 309 sind auf allen drei Geraden von P aus nach beiden Seiten in Wahrheit gleiche Strecken abgetragen und die Tangenten dementsprechend abgegrenzt worden. Das Auftragen hat immer in derjenigen Tafel zu geschehen, die zu der betreffenden Geraden parallel ist, da die Gerade nur dort in wahrer Länge erscheint.

211. Kreuzriß für ungünstig gelegene Geraden und Ebenen. Unter den Geraden spielen diejenigen, die die Projektionsachse senkrecht kreuzen, und unter den Ebenen diejenigen, die zur Achse parallel sind, eine Ausnahmerolle. Denn die Lage einer die Achse senkrecht kreuzenden Geraden g wird durch Angabe ihrer Projektionen g' und g'' nicht eindeutig bestimmt, weil g' und g'' zur Achse senkrecht sind (Nr 194), und auf einer Ebene, die zur Achse parallel liegt, fallen beide Arten von Hauptlinien h und k in eine einzige Schar zusammen, so daß man die Ebene nicht durch das Winkelfeld zweier verschiedener Hauptlinien h, k darstellen kann (Nr 201). Deshalb entziehen sich auch diejenigen Geraden, die beinahe zur Achse senkrecht sind, und diejenigen Ebenen, die beinahe zur Achse parallel sind, den früher vorgetragenen Konstruktionen, und es wurde bemerkt, daß wir sie vorläufig vermeiden wollten. Die Schwierigkeit können wir aber jetzt beseitigen. Da nämlich die Kreuzrißtafel mit der Grundrißtafel eine neue Achse bildet und ebenso mit der Aufrißtafel und da alle diese Achsen aufeinander senkrecht stehen, kann eine Gerade, die nahezu senkrecht zur alten Achse ist, nicht auch zu beiden neuen Achsen nahezu senkrecht sein. Ebensowenig kann eine Ebene, die nahezu parallel zur alten Achse ist, nicht auch zu beiden neuen Achsen nahezu parallel sein. Durch Benutzung des Grundrisses und Kreuzrisses oder des Aufrisses und Kreuzrisses an Stelle des Grundrisses und Aufrisses wird also in jedem Fall die Schwierigkeit beseitigt.

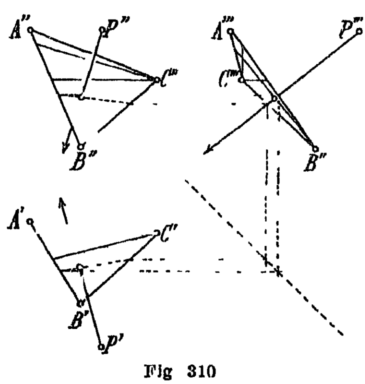


Fig 310

In Fig 310 ist z B eine beinahe zur Achse parallele Ebene durch ein Dreieck ABC in den beiden Projektionen $A'B'C'$ und $A''B''C''$ gegeben. Die Aufgabe, von einem Punkte P aus das Lot auf die Ebene zu fallen und seinen Fußpunkt zu bestimmen (Nr. 203, 210), wird hier mit völliger Schärfe dadurch gelöst, daß man den Kreuzriß benutzt.

212. Ersetzen des Seitenrisses durch Drehen des Gegenstandes. Des Kreuzrisses bedient man sich, wenn man entweder die in der letzten Nummer besprochene Schwierigkeit heben will oder wenn man einen Anblick des darzustellenden Gegenstandes aus der Richtung der alten Projektionsachse her gewinnen will. Dieser Wunsch liegt öfters bei Bauwerken oder Maschinen vor, da sie meistens drei ausgezeichnete

Ebenenstellungen aufweisen, von denen man zwei für den Grundriß und Aufriß verwendet. Die auf den Seiten gelegenen Teile des Gegenstandes sind dann im Grundriß und Aufriß schlecht zu sehen; erst der Kreuzriß gibt sie deutlich wieder. Eines allgemeinen Seitenrisses bedient man sich, um mit seiner Hilfe eine gestellte Aufgabe zu vereinfachen. Man gibt nämlich der Seitenrißtafel eine Stellung, die bei dem betreffenden Gebilde besonders ausgezeichnet ist. Die Einführung eines Seitenrisses besteht eigentlich darin, daß man die in einem gegebenen Fall nicht günstig stehende Aufrißtafel um eine Senkrechte zur Grundrißtafel in eine neue Lage dreht, namlich um die Gerade s_2 in Fig. 302 von Nr 207 Den gewünschten Vorteil kann man aber auch dadurch erzielen, daß man das darzustellende Gebilde um eine zur Grundrißtafel senkrechte Gerade dreht und die Aufrißtafel an der alten Stelle laßt

Als erstes Beispiel hierzu losen wir die Aufgabe, die Durchbohrung der Kugel mit einer Geraden g zu bestimmen. In Nr. 89 wurde durch g die zur Grundrißtafel senkrechte Hilfsebene gelegt und um ihre Spurgerade in die Grundrißtafel umgelegt. Im Grunde genommen bedeutet dies, daß diese Hilfsebene als neue Aufrißtafel benutzt wurde. (Nur zeichneten wir damals darin bloß die Gerade und den Schnittkreis, nicht auch den Umriß der Kugel bei der Projektion auf diese Ebene.) Jetzt verfahren wir so Wir denken uns die Kugel und die Gerade g starr verbunden und drehen beide um den zur Grundrißtafel senkrechten Durchmesser der Kugel so weit, bis die Gerade g zur Aufrißtafel parallel wird, d h. bis g' in der neuen Lage $(g)'$ zur Projektionsachse parallel wird, siehe Fig. 311. Der Drehwinkel α wird durch das Lot von der Projektion M' der Kugelmitte M auf g' und durch die Senkrechte zur Projektionsachse durch M' bestimmt. Die Grundrisse A' und B' zweier Punkte A und B der Geraden beschreiben Kreise um M' mit diesem Zentriwinkel α. Die zugehörigen Aufrisse A'' und B'' beschreiben Parallelen zur Projektionsachse, so daß man die neue Aufrißprojektion $(g)''$ von g finden kann. Die Kugel dreht sich in sich selbst, behält also die alten Umrisse in beiden Projektionen. Nach vollzogener Drehung ist die durch (g) gelegte zur Grundrißtafel senkrechte Hilfsebene zur Aufrißtafel parallel, so daß sie die Kugel in einem Kreis schneidet, dessen Grundriß die auf $(g)'$ gelegene Sehne des Umrisses der Kugel ist. Die Hälfte dieser Sehne ist der Kreisradius, und im Aufriß erscheint der Kreis als Kreis mit der Mitte M''. Dieser Kreis gibt durch seine Schnittpunkte $(X)''$ und $(Y)''$ die Aufrisse der Schnittpunkte (X) und (Y) von (g) mit der Kugel. Daraus leitet man ihre Grundrisse $(X)'$ und $(Y)'$ ab. Indem man schließlich die Drehung rückwärts ausübt, bekommt man die Projektionen der Punkte X und Y, in denen die Gerade g die Kugel schneidet.

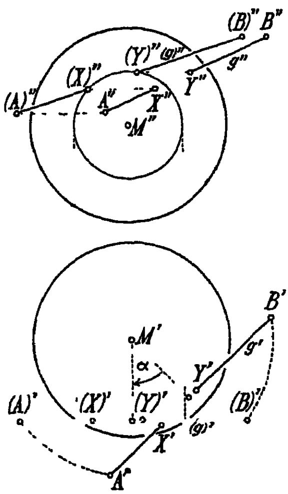


Fig 311

Als zweites Beispiel diene die Aufgabe. Im Innern einer Kugel ist ein Punkt K gegeben. Gesucht der Radius ϱ desjenigen

Kugelkreises, der K zur Mitte hat, dessen Achse (Nr. 88) also die Gerade von der Kugelmitte M nach K ist. Die Kugel und der mit ihrem Innern starr verbunden gedachte Punkt K werde wieder um ihren zur Grundrißtafel senkrechten Durchmesser gedreht, und zwar jetzt so weit, bis der gegebene Punkt K in eine Lage (K) gelangt, in der er ebenso weit von der Aufrißtafel entfernt ist wie M, siehe Fig. 312. Da dann $M(K)$ zur Aufrißtafel parallel ist, erscheint einer der Durchmesser des Kugelkreises um (K) auch in der Aufrißprojektion senkrecht zu $M''(K)''$ (nach Nr. 18), also als die zu $M''(K)''$ senkrechte Sehne des Umrisses der Kugel im Aufriß. Die Hälfte dieser Sehne ist somit der gesuchte Radius ϱ.

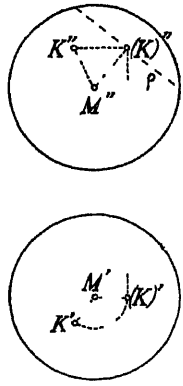


Fig 312

Diese Beispiele zeigen, daß man die Einführung einer neuen Seitenrißtafel immer durch eine Drehung des Gegenstandes um eine zur Grundrißtafel senkrechte Gerade ersetzen kann. Das Drehen des Gegenstandes empfiehlt sich insbesondere dann, wenn Gebilde vorkommen, die durch die Drehung in sich übergeführt werden wie die Kugel in den beiden Beispielen. Es hat dagegen den Nachteil, daß die Zeichnung im Grundriß und Aufriß zuweilen dadurch zu sehr überladen wird. Dies wird vermieden, wenn man eine Seitenrißtafel anwendet.

213. Neue Grundrißtafel. Ebenso wie in Nr. 207 eine neue Aufrißtafel eingeführt wurde, kann man auch die Grundrißtafel durch eine andere, zur Aufrißtafel senkrechte Ebene ersetzen. Diese Ebene wird durch Angabe ihrer beliebig zu ziehenden Aufriß-Spurgeraden s_2 bestimmt. Man wird sie um s_2 in die Aufrißtafel umlegen, um wieder in einer Doppelebene zu zeichnen. Nennen wir wieder P''' die senkrechte Projektion eines Punktes P auf diese neue Tafel, so erhellt, daß P''' einerseits auf dem Lot von P'' auf s_2 liegt und andererseits von s_2 denselben Abstand haben muß wie der Grundriß P' von der alten Projektionsachse, siehe Fig. 313, wo ein Dreieck PQR in der neuen Projektion gezeichnet ist.

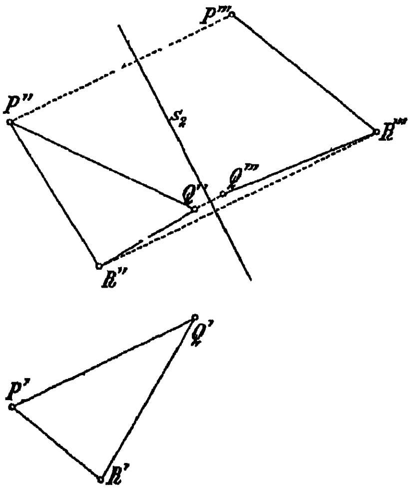


Fig. 313.

Die Kreuzrißtafel gehört sowohl zu den in Nr. 207 besprochenen neuen Aufrißtafeln als auch zu den neuen Grundrißtafeln (Nr. 209).

Allgemein geredet wendet man neue Grundrißtafeln seltener als neue Aufrißtafeln an, und zwar deshalb, weil die Grundrißtafel häufig als wagerechte Ebene schon von vornherein eine besonders günstige Lage zu dem darzustellenden Gebilde hat. In bezug auf neue Grundrißtafeln gilt dasselbe wie in Nr. 212 in bezug auf neue Aufrißtafeln: Sie sind an

sich entbehrlich, weil sie immer durch Drehen des Gegenstandes um eine zur Aufrißtafel senkrechte Gerade ersetzt werden können.

214. Zwei neue Tafeln nacheinander. Es gibt Aufgaben, die sich durch wiederholte Einführung neuer Tafeln lösen lassen. Man kann z. B. dadurch, daß man nacheinander eine neue Aufriß- und eine neue Grundrißtafel einführt, erreichen, daß eine zunächst beliebig gelegene Gerade zur letzten Tafel senkrecht wird, und dadurch wird zuweilen die Lösung einer diese Gerade betreffenden Aufgabe bedeutend vereinfacht.

Als Beispiel bestimmen wir diejenige Gerade, die zwei gegebene windschiefe Geraden a und b senkrecht schneidet, auf der also der kürzeste Abstand XY zwischen den beiden Geraden a und b liegt. Die neue Grundrißtafel wird parallel zu a angenommen, also die neue Projektionsachse s parallel zu a', siehe Fig. 314

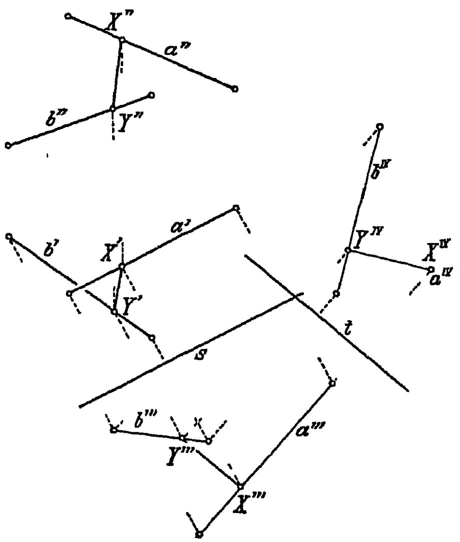


Fig. 314

Man bestimmt die Projektionen a''' und b''' der Geraden auf die neue Tafel, indem man auf jeder zwei Punkte auswählt und ihre Projektionen ermittelt. Weiterhin wird nun auf die neue Aufrißtafel eine vierte Tafel senkrecht aufgesetzt, und zwar längs einer Achse t, die zu a''' senkrecht ist. Da die Gerade a zur dritten Tafel parallel ist, steht die vierte auf a senkrecht, d. h. a erscheint in ihr bloß als Punkt a^{IV}, dessen Entfernung von t gleich der Entfernung von a' bis s ist. Dagegen erscheint die Gerade b in der neuen Projektion als Strecke b^{IV}. Das gesuchte Lot XY ist als Senkrechte zu a parallel zur vierten Tafel; da es a schneiden und mit b einen rechten Winkel bilden soll, erscheint es nach Nr. 18 auf der vierten Tafel als das vom Punkt a^{IV} auf die Gerade b^{IV} gefällte Lot $X^{IV}Y^{IV}$. Der Punkt X^{IV} fällt mit a^{IV} zusammen. Durch Zurückgehen in die dritte Tafel bekommt man zunächst Y''', und weil a zur dritten Tafel parallel ist, muß $X'''Y''' \perp a'''$ sein, so daß sich auch X''' ergibt. Durch weiteres Zurückgehen bekommt man auch X' und Y' auf a' und b' und X'' und Y'' auf a'' und b''. Dabei sind mehrere Proben möglich: So z. B. hat Y' von s denselben Abstand wie Y^{IV} von t und X'' von der alten Achse denselben Abstand wie X''' von s. Weil das Lot XY zu der zuletzt benutzten Tafel parallel liegt, ist $X^{IV}Y^{IV}$ seine wahre Länge.

215. Über die Benutzung neuer Tafeln überhaupt. Wenn man mehrere neue Tafeln nacheinander einführt, stellt sich der Übelstand heraus, daß die Genauigkeit der Zeichnung ziemlich stark leidet. Denn die

Zeichnung wird weitläufiger, und indem sie das Gebiet des ursprünglich Gegebenen mehr und mehr verläßt, wachsen die unvermeidlichen Zeichenfehler. Es würde dagegen nichts helfen, wenn man etwa die Tafel so umlegte, daß die neuen Projektionen über den alten zu liegen kämen. Denn obgleich dann der Umfang der Zeichnung nicht so stark wachsen würde, bliebe doch der Übelstand bestehen, daß man jede neue Projektion aus den vorhergehenden durch Loteziehen und Übertragen von Maßen ableitete, worin Schritt für Schritt Quellen für sich häufende Genauigkeitsfehler liegen.

Ein anderer Übelstand, der sich bei der Benutzung mehrerer neuer Tafeln nacheinander ergibt, wie in der Aufgabe der letzten Nummer, liegt darin, daß die Folge der Projektionen leicht verwirrend wirkt.

In beiden Hinsichten ist an der Benutzung einer einzigen neuen Tafel weniger auszusetzen. Statt ihrer kann man nach Nr. 212 eine Drehung des Gegenstandes selbst vornehmen. Die Zeichnung wird in diesem Fall weniger weitläufig als bei der Anwendung der neuen Tafel, so daß auch die Zeichenfehler geringer werden. Dagegen haftet der Drehung wie gesagt oft der Nachteil an, daß die Zeichnung zu sehr überladen wird. Immerhin ist im allgemeinen zu sagen: Die Lösung einer Aufgabe der darstellenden Geometrie befriedigt in methodischer Hinsicht um so mehr, je weniger Hilfstafeln verwendet werden, auch wird sie zeichnerisch in diesem Fall um so genauer.

Anmerkung. Da ein Punkt im Raum durch seinen Grundriß und Aufriß vollkommen bestimmt ist, folgt schon hieraus, daß jede neue Tafel entbehrt werden kann. Ein besonderer Freund der Verwendung neuer Tafeln war Théodore Olivier (Nr. 77). Seine Hauptwerke sind außer dem in Nr. 77 genannten „Cours de géométrie descriptive", 3 Teile, Paris 1843—47, „Développements de géométrie descriptive", Paris 1843, und „Applications de la géométrie descriptive", Paris 1847. Er empfahl Veranschaulichungsmittel für den darstellenden Unterricht wie umlegbare Tafeln, Stäbe zur Versinnlichung der Geraden, insbesondere der Projizierenden, und hat eine Reihe nützlicher Modelle angegeben.

216. Übungen. 1) Darstellung eines auf der Grundrißtafel stehenden Kreiskegels in Grundriß, Aufriß und Kreuzriß, Bestimmung der drei Projektionen eines Punktes des Kegels und der drei durch ihn gehenden Hauptlinien seiner Tangentialebene (Nr. 209, 210).

2) Man bestimme das Lot von einem Punkte P auf eine gegebene Gerade, indem man die mit dem Punkte P starr verbunden gedachte Gerade um $P'P$ so weit dreht, bis sie zur Aufrißtafel parallel wird (Nr. 212).

3) Bestimmung derjenigen Punkte, in denen die durch eine gegebene Gerade g gehenden Tangentialebenen einer Kugel diese Kugel berühren. Zunächst benutze man eine zu g parallele neue Aufrißtafel, dann errichte man auf sie eine neue zu g senkrechte Grundrißtafel (Nr. 214). Da die Tangentialebenen als Ebenen durch g auf dieser neuen Tafel senkrecht stehen, sind ihre Projektionen auf diese Tafel Tangenten an den Kugelumriß. (Andere Art der Lösung in Nr. 232.)

4) Einen auf der Grundrißtafel stehenden Würfel führe man durch Drehung um eine zur Aufrißtafel senkrechte Gerade in eine allgemeinere Lage, dann den neuen Würfel durch Drehung um eine zur Grundrißtafel senkrechte Gerade in eine ganz allgemeine Lage über.

§ 3. Verschiedene Aufgaben aus der Geometrie des Raumes.

217. Der bei der Lösung einzuschlagende Weg. Wird eine Aufgabe aus der Geometrie des Raumes gestellt, so muß man zunächst gedanklich ihre Lösung im Raume selbst durchführen, ohne sich um die zeichnerische Ausführung zu kümmern. Erst nachdem man sich die Lösung im Raume vollständig zurechtgelegt hat, geht man an ihre Durchführung mittels der Zeichnung. Wenn man dagegen von vornherein die Lage der gegebenen Gebilde gegenüber den Projektionstafeln berücksichtigt, wird man im räumlichen Denken unfrei und ungeschickt.

Beim Durchdenken der Lösung einer räumlichen Aufgabe setzt man voraus, man sei imstande, im Raum alle Konstruktionen des Verbindens und Schneidens von Punkten, Geraden und Ebenen wirklich auszuführen, insbesondere auch die des Parallelenziehens, aber auch diejenigen, die sich auf das Senkrechtstehen beziehen sowie auf das Abtragen von Strecken von gegebener Länge. Man führt also die im Raume gestellte Aufgabe auf eine Reihe nacheinander zu erledigender Grundaufgaben (Nr. 206) zurück. Diese löst man dann Schritt für Schritt durch Zeichnung im Grundriß und Aufriß.

Bei der Lösung geometrischer Aufgaben im Raum ist die Benutzung geeigneter Hilfsebenen eines der wichtigsten Hilfsmittel. Erst in zweiter Linie verwendet man Hilfsgeraden, und zwar aus einem schon gelegentlich erwähnten Grunde (Nr. 147): Von Hilfsebenen weiß man, daß sie alle vorhandenen Geraden wirklich schneiden, sei es vielleicht auch erst im Unendlichfernen, aber von Hilfsgeraden kann man das nicht behaupten. Weil man gewöhnt ist, in der Zeichenebene zu konstruieren und also planimetrisch zu denken, muß um so mehr betont werden, daß bei den Anwendungen der darstellenden Geometrie das räumliche oder stereometrische Denken an allererster Stelle steht, und daß demgemäß die Hilfsebenen statt der Hilfsgeraden ein Hauptmittel zur Lösung sind.

Häufig kann man unter unendlich vielen Hilfsebenen eine Auswahl treffen. Entweder gibt dabei die Lösung der Aufgabe im Raume selbst einen Anhalt, oder die Auswahl bleibt vorläufig dahingestellt. Im zweiten Fall hat man den Vorteil, daß man die Hilfsebene so annehmen kann, daß sie in bezug auf die Projektionstafeln eine besonders günstige Lage bekommt. Betrachten wir z. B. die sehr häufig vorliegende Aufgabe, die Durchstoßung einer gegebenen krummen Fläche F durch eine gegebene Gerade g zu ermitteln. Man legt in diesem Fall durch g irgendeine Ebene E, denn sie wird die Fläche F in einer Linie s schneiden, siehe Fig. 315, und da diese Linie und g beide in der Ebene E liegen, sind die Durchstoßungspunkte die Schnittpunkte von g mit s. Nun kann die Fläche F so beschaffen sein, daß sie von einer gewissen Ebene durch g in einer besonders leicht zu ermittelnden Linie s geschnitten wird, so daß man diese Ebene als Hilfsebene benutzen wird. Ist das nicht der Fall, so

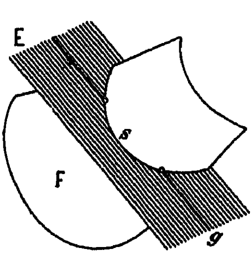


Fig. 315

wird man die Hilfsebene bei der Ausführung der Konstruktion in der Zeichnung z. B. senkrecht zur Grundriß- oder zur Aufrißtafel annehmen, um dadurch Vereinfachungen zu erreichen. Allgemeine Vorschriften lassen sich nicht machen; es ist Sache des Zeichners, für jeden vorkommenden Fall das beste Verfahren zu ermitteln

218. Gerade, die zwei gegebene Geraden schneidet und durch einen gegebenen Punkt geht. Die beiden gegebenen Geraden a und b seien windschief, der gegebene Punkt heiße P. Die gesuchte Gerade g soll drei Bedingungen befriedigen. Lassen wir vorläufig eine beiseite, so geht ein geometrischer Ort fur g hervor Verlangen wir namlich nur, daß die Gerade g durch P gehe und a schneide, so gibt es unendlich viele derartige Geraden g, und sie erzeugen die Ebene durch P und a. Diese Ebene hat mit der Geraden b einen Punkt Y gemein. Ist er ermittelt worden, so ist PY die gesuchte Gerade. Denn da sie in der Ebene durch P und a liegt, trifft sie auch a in einem Punkt X.

Die in dieser Weise im Raume durchdachte Lösung laßt sich nun nach Nr. 199 zeichnerisch erledigen, denn die Ebene durch P und a kann durch a und eine von P nach irgendeinem Punkt A von a gehende Gerade, also durch ein Geradenpaar oder Winkelfeld festgelegt werden, dessen Schnittpunkt Y mit b leicht gefunden wird Die Richtigkeit der Zeichnung pruft man daran, daß die hervorgehenden beiden Projektionen X' und X'' des Punktes X auf einem Lot zur Projektionsachse liegen mussen

Liegt der gegebene Punkt P unendlich fern, etwa auf einer gegebenen Geraden l, so ergibt sich ein Sonderfall der gestellten Aufgabe, die Bestimmung derjenigen Geraden, die zwei gegebene windschiefe Geraden a und b schneidet und zu einer gegebenen Geraden l parallel ist.

219. Vielflache und ihre Schnitte mit Ebenen und Geraden. Wenn wir von einem Vielflach reden, meinen wir immer ein von lauter ebenen Vielecken begrenztes (Nr 65). Die geringste Anzahl von Ecken hat das Vierflach Als seine Ecken kann man irgendwelche vier Punkte A, B, C, D annehmen Der Schnitt des Vierflachs mit einer gegebenen Ebene wird gewonnen, indem man die gegebene Ebene mit allen vier Flachen oder mit allen sechs Kanten des Vierflachs schneidet Aber nicht alle diese Schnitte kommen in Betracht· Trifft die gegebene Ebene drei von einer Ecke D ausgehende Kanten, so wird sie die drei übrigen Kanten AB, BC, CA nicht, sondern nur ihre Verlängerungen schneiden, so daß das Schnittvieleck ein Dreieck ist (siehe Fig. 210 von Nr. 148). Trifft die gegebene Ebene DA und DB, aber nicht DC, so wird sie noch AC und BC schneiden, d. h. dann ist das Schnittvieleck ein Viereck.

Schneidet man vom Vierflach mittels einer Ebene ein Stück ab, so entsteht ein Fünfflach. Von ihm kann man weiterhin mittels Ebenen Stücke abschneiden und dadurch zu allen möglichen anderen Vielflachen kommen. Dies läßt sich zeichnerisch ohne Mühe durchführen (Nr. 199, 200). Dagegen ist es durchaus nicht angangig, alle Ecken eines beliebigen Vielflachs willkürlich im Aufriß und Grundriß anzunehmen, es sei denn, daß man ein Vielflach darstellt, das nur von Dreiecken gebildet

wird. Denn vier oder noch mehr willkürlich gewählte Punkte gehören ja im allgemeinen durchaus nicht einer Ebene an.

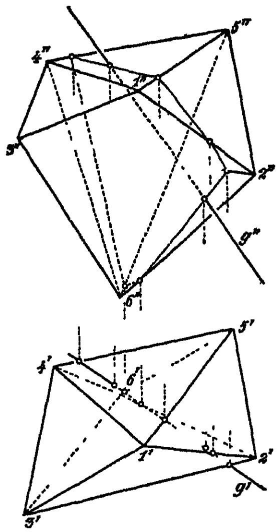


Fig 316

Ebenso wie aus dem Vierflach kann man aus anderen einfachen Vielflachen durch wiederholtes Abschneiden allgemeinere Vielflache herstellen, so z B. aus einem Spat (Nr. 147), der von sechs zu zweien kongruenten Parallelogrammen begrenzt wird. Die drei in einer Ecke zusammenstoßenden Parallelogramme kann man nach Nr. 198 im Grundriß und Aufriß nach Belieben darstellen, selbstverständlich nur so, daß zusammengehörige Grund- und Aufrisse auf Loten zur Achse liegen.

Die Durchbohrung eines Vielflachs mit einer Geraden g wird hergestellt, indem man durch g eine Hilfsebene legt. Diese Ebene schneidet das Vielflach in einem Vieleck, und die gesuchten Stellen sind die Punkte, in denen g das Vieleck trifft. Im allgemeinen empfiehlt es sich, als Hilfsebene eine der projizierenden Ebenen von g zu benutzen. In Fig 316 ist die zur Grundrißtafel senkrechte Ebene durch g angewandt worden. Die Grundrißprojektion des Schnittvielecks fallt dann auf g', so daß die Aufrißprojektion sofort zu finden ist.

220. Durchdringung von Pyramiden. Diese Aufgabe wurde in allgemeiner Parallelprojektion schon in Nr. 155 besprochen; indem wir es hier von neuem tun, sehen wir von dem dort Gesagten ganz ab, weil wir ein anderes Verfahren entwickeln wollen.

Wir nehmen an, es seien zwei nicht durch Grundebenen abgegrenzte Pyramiden vorgelegt. Ihre Spitzen seien S_1 und S_2. Von S_1 und S_2 mögen also gegebene Strahlen $a_1, a_2 \ldots a_n$ und $b_1, b_2 \ldots b_m$ ausgehen, die Kanten der Pyramiden, so daß die Winkelfelder $(a_1 a_2)$, $(a_2 a_3) \ldots (a_n a_1)$ und $(b_1 b_2)$, $(b_2 b_3) \ldots (b_m b_1)$ die Flachen der Pyramiden sind. Man kann nun im einzelnen feststellen, wo die Kanten jeder Pyramide die Flächen der anderen durchschneiden (Nr. 199). Aber für die Durchdringung kommen dabei nur diejenigen Punkte in Betracht, die innerhalb der Winkelfelder, nicht auf ihren Erweiterungen über die Schenkel hinaus gelegen sind. Bei jedem dieser in Betracht kommenden Durchstoßungspunkte tut man gut, anzumerken, welchem Winkelfeld er angehört, da man sich sonst nachher leicht irren kann. Nun handelt es sich noch darum, die Schnittpunkte, die ja die Ecken des oder der Durchdringungsvielecke sind, in ihre richtige Reihenfolge zu bringen: Da die Kanten dieser Vielecke diejenigen Strecken sind, in denen die Winkelfelder der beiden Pyramiden einander durchsetzen, muß es, wenn überhaupt eine Durchdringung zustande kommt, mindestens ein Winkelfeld der ersten Art und ein Winkelfeld der zweiten Art geben, die einander schneiden. Es seien etwa $(a_1 a_2)$ und $(b_1 b_2)$ derartige Winkelfelder. Ihre Schnittstrecke XY hat Endpunkte X und Y, die auf den Randern der Winkelfelder liegen müssen. Daher liegen sie

entweder auf a_1 und a_2 oder auf b_1 und b_2 oder es liegt der eine auf einem der Schenkel a_1, a_2 und der andere auf einem der Schenkel b_1, b_2, also etwa X auf a_1 und Y auf b_2. Siehe Fig. 317 a, b, c, die entweder den Grundriß oder den Aufriß darstellen. In keinem Fall können die Schenkel a_1, a_2 sonst noch das Winkelfeld $(b_1\,b_2)$ oder die Schenkel b_1, b_2 sonst noch das Winkelfeld $(a_1\,a_2)$ durchstoßen. Wir nehmen uns nun vor, das Durchdringungsvieleck der Pyramiden, von dem XY eine Kante ist, im Sinne von X nach Y zu durchlaufen. In Y angelangt, kommen wir im Fall a an den Rand a_2 des Winkelfeldes $(a_1\,a_2)$, das somit hier verlassen wird, so daß wir zum benachbarten Winkelfeld $(a_2\,a_3)$ übergehen. Demnach ist die nächste Kante YZ des Durchdringungsvielecks der Schnitt des Winkelfeldes $(a_2\,a_3)$ mit dem Winkelfeld $(b_1\,b_2)$. Im Fall b dagegen kommen wir in Y an den Rand b_2 des Winkelfeldes $(b_1\,b_2)$, so daß wir zum benachbarten Winkelfeld $(b_2\,b_3)$ gelangen, also die nächste Kante YZ des Durchdringungsvielecks der Schnitt des Winkelfeldes $(a_1\,a_2)$ mit dem Winkelfeld $(b_2\,b_3)$ ist. Im Fall c endlich verlassen wir in Y ebenfalls das Winkelfeld $(b_1\,b_2)$, so daß wir wieder YZ als Schnitt der Felder $(a_1\,a_2)$ und $(b_2\,b_3)$ zu suchen haben. Hiernach sind in jedem der drei Fälle für den gesuchten Punkt Z nur gewisse Möglichkeiten vorhanden. Im Fall a ist er entweder der Schnittpunkt von a_3 mit $(b_1\,b_2)$ oder der von b_1 oder b_2 mit $(a_2\,a_3)$. Im Fall b ist er entweder der Schnittpunkt von b_3 mit $(a_1\,a_2)$ oder der von a_1 oder a_2 mit $(b_2\,b_3)$, im Fall c ebenso. Sicher ist immer nur einer der drei möglichen Punkte wirklich vorhanden, und da alle überhaupt in Betracht kommenden Durchstoßungspunkte vorweg bestimmt und bezeichnet worden sind, ist es leicht, den Punkt Z herauszufinden. Diese Untersuchung bringt es demnach mit sich, daß wir zwangläufig zum dritten Punkt Z kommen, und ebenso bei der Fortsetzung zu den folgenden Eckpunkten des Durchdringungsvielecks. Schließlich müssen wir so von selbst zum Ausgangspunkt X zurückkommen. Vgl. Fig. 224 und 225 von Nr. 153. Bleiben nach der Vollendung des Vielecks noch Durchstoßungspunkte übrig, so heißt dies, daß noch mindestens ein anderes Durchdringungsvieleck vorhanden ist, das ebenso ermittelt wird. Vgl. Fig. 227 von Nr. 155.

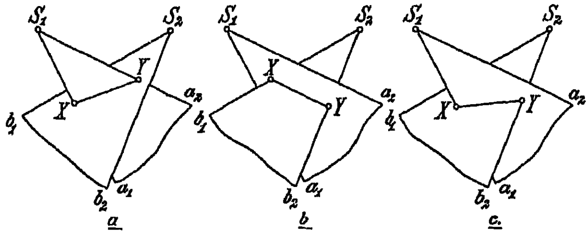


Fig 317

Bis jetzt haben wir einen Ausnahmefall mit Stillschweigen übergangen: Es ist möglich, daß eine Kante der einen Pyramide eine Kante der anderen schneidet. Nehmen wir z. B. an, daß sich a_2 und b_2 in X treffen. Dann fassen wir die beiden in a_2 sowie die beiden in b_2 aneinander stoßenden Ebenen $(a_1\,a_2)$, $(a_2\,a_3)$ und $(b_1\,b_2)$, $(b_2\,b_3)$ der Pyramiden ins Auge. Jede der beiden ersten Ebenen schneidet jede der beiden anderen in einer durch X gehenden Geraden, so daß zunächst vier von X ausgehende Schnittlinien vorhanden sind. Aber sie kommen doch nur dann in Betracht, wenn sie innerhalb der Winkelfelder verlaufen. Klarheit über die verschiedenen Möglichkeiten

bekommt man, wenn man sich die Ebene durch a_2 und b_2, also die Ebene S_1XS_2 vorstellt. Jedes jener vier Winkelfelder liegt nämlich auf bloß einer Seite dieser Ebene, und nur solche Winkelfelder haben eine Schnittstrecke, die auf derselben Seite dieser Ebene liegen. Mithin sind die folgenden Fälle denkbar, dargestellt in Fig 318 a, b, c, d.

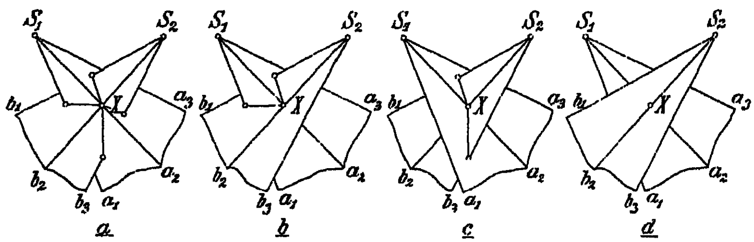


Fig 318

Fall a Alle vier Winkelfelder liegen auf derselben Seite der Ebene S_1XS_2. Dann gehen von X vier Schnittstrecken aus

Fall b: Drei Winkelfelder liegen auf derselben Seite der Ebene S_1XS_2, das vierte liegt auf der anderen Seite Dann gibt es nur zwei von X ausgehende Schnittstrecken, und beide liegen auf derselben Seite der Ebene S_1XS_2.

Fall c· Zwei Winkelfelder liegen auf der einen Seite, die beiden anderen auf der anderen Seite der Ebene S_1XS_2, und zwar gehört zu jedem Paar je ein Winkelfeld jeder Pyramide. Auch hier gibt es nur zwei von X ausgehende Schnittstrecken, aber sie liegen auf verschiedenen Seiten der Ebene S_1XS_2

Fall d: Zwei Winkelfelder liegen auf der einen Seite, die beiden anderen auf der anderen Seite der Ebene S_1XS_2, und zwar gehört das erste Paar der einen, das zweite der anderen Pyramide an Hier gibt es keine von X ausgehende Schnittstrecke. Man stelle sich vor, daß man in Fig. 318 d in den Raumwinkel von $(b_1 b_2)$ und $(b_2 b_3)$, der kleiner als zwei rechte ist, hineinsieht, dagegen in den von $(a_1 a_2)$ und $(a_2 a_3)$ nicht.

Die Fälle b und c bieten keine besonderen Ausnahmen; die vorhin durchgeführte Betrachtung ist in diesen Fällen immer noch zwangläufig. Man vergleiche Fig 224 von Nr. 155, wo die zweite sichtbare Kante der ersten Pyramide (von links gerechnet) die zweite sichtbare Kante der zweiten Pyramide (von oben gerechnet) schneidet. Im Fall d liegt die eine Pyramide so über der anderen, daß sich eine ihrer Kanten auf eine der anderen stützt. Hier haben die beiden Pyramiden überhaupt bloß den Punkt X gemein, wenn sie keine einspringenden Flächen haben. Sonst allerdings, wenn sie einspringende Flächen haben, ist es wohl denkbar, daß ein Durchdringungsvieleck vorhanden ist, aber auch dann gehört der Punkt X nicht dazu. Er ist vielmehr eine vereinzelte oder isolierte gemeinsame Stelle beider Pyramiden. Ob eine solche isolierte Stelle vorkommt, sieht man, nachdem man nach dem allgemeinen Verfahren die Durchdringungsvielecke ermittelt hat, daran, daß noch ein gemeinsamer Punkt zweier Kanten der Pyramiden übriggeblieben ist.

Im Fall a endlich, wo von X vier verschiedene Schnittstrecken ausgehen, heißt X ein Doppelpunkt der Durchdringung. Hier ist die allgemeine Betrachtung nicht mehr zwanglaufig, denn wenn man z. B. auf der Schnittstrecke von $(a_1\, a_2)$ und $(b_1\, b_2)$ nach X gelangt ist, steht es frei, ob man eines dieser beiden Winkelfelder und welches verlassen will, um zum benachbarten überzugehen, oder ob man beide verlassen will. Man treffe eine beliebige Wahl Dann wird die Betrachtung weiterhin doch wieder zwanglaufig, und man wird schließlich wieder zum Punkt X zurückgeführt. Dann aber sind zwei von X ausgehende Schnittstrecken schon verwendet Man benutzt daher die beiden anderen, um das noch fehlende Durchdringungsvieleck herzustellen Vgl Fig 226 von Nr 155

Nach dem Vorhergehenden ist ein Doppelpunkt vorhanden wenn sich zwei Kanten der beiden Pyramiden schneiden und überdies die beiden Paare von Pyramidenflachen, die in diesen Kanten aneinanderstoßen, auf derselben Seite der Ebene beider Kanten liegen

Schließlich kann es vorkommen, daß eine Flache der einen Pyramide mit einer Flache der anderen in derselben Ebene liegt, so daß z B die Kanten a_1, a_2 und b_1, b_2 einer gemeinsamen Ebene angehören Man kann dann sagen, daß beide Pyramiden auf dieser Ebene liegen. An die Stelle einer Kante des Durchdringungsvielecks tritt hier dasjenige Stuck dieser Ebene, das die beiden Winkelfelder $(a_1\, a_2)$ und $(b_1\, b_2)$ gemein haben

221. Anderes Verfahren für die Durchdringung von Pyramiden. Wir schneiden die Pyramiden mit zwei Hilfsebenen E und $\mathfrak{E}$ Die Ebene E treffe die Kanten $a_1, a_2 \ldots a_n$ und $b_1, b_2 \ldots b_m$ in $A_1, A_2 \ldots A_n$ und $B_1, B_2 \ldots B_m$, die Ebene $\mathfrak{E}$ treffe sie in $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_m$. Die Ebene E schneidet die Ebenen $(a_1\, a_2)$ und $(b_1\, b_2)$ in den Geraden $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$, deren Schnittpunkt X also den Ebenen von $(a_1\, a_2)$ und $(b_1\, b_2)$ angehort. Ebenso schneidet die Ebene $\mathfrak{E}$ diese Ebenen in den Geraden $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2$, deren Schnittpunkt $\mathfrak{X}$ den Ebenen von $(a_1\, a_2)$ und $(b_1\, b_2)$ angehort. Folglich ist die Gerade $X\mathfrak{X}$ die Schnittgerade der Ebenen von $(a_1\, a_2)$ und $(b_1\, b_2)$. Von dieser Geraden kommt aber nur eine Strecke *1 2* in Betracht, namlich nur dasjenige Stück, das sowohl innerhalb des Winkelfeldes $(a_1\, a_2)$ als auch innerhalb des Winkelfeldes $(b_1\, b_2)$ liegt. Gibt es kein derartiges Stück, so haben die Pyramidenflachen $(a_1\, a_2)$ und $(b_1\, b_2)$ nichts miteinander gemein. Ist aber ein derartiges Stuck *1 2* vorhanden, so nehmen wir uns vor, das gesuchte Durchdringungsvieleck, von dem *1 2* eine Kante ist, im Sinne von *1* nach *2* zu durchlaufen Im Punkte *2* angekommen, verlassen wir dann dasjenige von den beiden Winkelfeldern $(a_1\, a_2)$ und $(b_1\, b_2)$, auf dessen Rand der Punkt *2* liegt. Wenn der Punkt *2* z. B. auf a_2 liegt, verlassen wir das Winkelfeld $(a_1\, a_2)$, indem wir es also durch das daran anstoßende Feld, nämlich durch $(a_2\, a_3)$ ersetzen. Die folgende Kante *2 3* des Durchdringungsvielecks wird demnach die Durchdringung der Winkelfelder $(a_2\, a_3)$ und $(b_1\, b_2)$ sein. Hier verfahren wir wie vorher, usw. So beschreiben wir zwangläufig ein vollständiges Durchdringungsvieleck, bis wir zum Ausgangspunkt *1* zurückgelangen.

Als Hilfsebenen E und 𝔈 benutzt man am bequemsten solche Ebenen, die auf einer Tafel senkrecht stehen. In Fig. 319 ist E diejenige Ebene, die längs einer beliebig gezogenen Geraden s auf der Aufrißtafel senkrecht steht, und 𝔈 diejenige, die längs einer ebenfalls beliebig gezogenen Geraden 𝔰 auf der Aufrißtafel senkrecht steht. Man bekommt hier die Punkte X und 𝔛 zunächst in ihren Grundrissen X' und 𝔛$'$, die Aufrisse X'' und 𝔛$''$ liegen auf s und 𝔰.

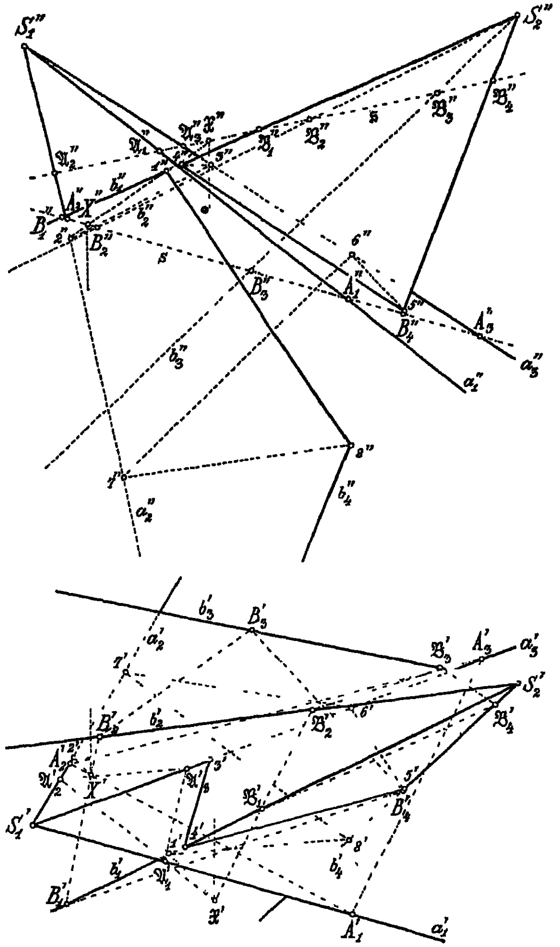


Fig. 319

222. Drittes Verfahren für die Durchdringung von Pyramiden. Wir schneiden die Pyramiden mit nur einer Hilfsebene E, wodurch sich zwei Vielecke $A_1A_2 \ldots A_n$ und $B_1B_2 \ldots B_m$ ergeben. Ferner bestimmen wir den Punkt T, in dem die geradlinige Verbindende der Pyramidenspitzen S_1 und S_2 die Ebene E trifft. Da alle Ecken des Durchdringungsvielecks auf Pyramidenkanten liegen und alle diese Kanten durch S_1 oder S_2 gehen, ist jede Ecke in einer Ebene durch S_1 und S_2 enthalten, und eine derartige Ebene schneidet die Ebene E in einer von T ausgehenden Geraden, die entweder nach einem der Punkte $A_1, A_2 \ldots A_n$ oder nach einem der Punkte $B_1, B_2 \ldots B_m$ geht. Demnach ziehen wir von T aus zunächst alle Geraden nach $A_1, A_2 \ldots A_n$ und $B_1, B_2 \ldots B_m$. Fassen wir z. B. die Gerade TA_1 ins Auge. Sie möge das Vieleck $B_1B_2 \ldots B_m$ in einem Punkte C schneiden (es können mehrere Schnittpunkte vorhanden sein); dann liegt die Kante S_1A_1 der ersten Pyramide in der Ebene S_1TA_1, die die zweite Pyramide längs der Geraden S_2C schneidet. Mithin liefert der Schnitt der Kante S_1A_1 mit S_2C einen Punkt, in dem die Kante S_1A_1 in die zweite Pyramide eindringt. So findet man alle Durchstoßungspunkte der Kanten der ersten oder zweiten Pyramide mit den Ebenen der zweiten oder ersten Pyramide. In Betracht kommen selbstredend immer nur solche Durchstoßungspunkte, die auf den Seitenflächen der Pyramiden selbst und

nicht auf ihren Fortsetzungen über die Kanten hinaus gelegen sind. Um nun alle gefundenen Durchstoßungspunkte in der richtigen Reihenfolge zu verbinden, hat man sich vorzustellen, daß das gesuchte Durchdringungsvieleck in einem bestimmten Sinn durchlaufen werde. Indem man dabei von Punkt zu Punkt geht, dreht sich die zugehörige Hilfsebene durch S_1 und S_2 um die Gerade S_1S_2 herum. Demnach läßt man diese Hilfsebene wie in Nr. 155 um die Gerade S_1S_2 pendeln; sie macht dabei Ausschläge hin und her, und das dabei zu beobachtende Verfahren wurde in Nr. 155 auseinandergesetzt. Man lese das dort zu Fig. 223 Gesagte nach. Die gegenwärtige Betrachtung ist insofern einfacher als die damals angestellte, weil jetzt die beiden dort benutzten verschiedenen Ebenen E_1 und E_2 in eine Ebene E zusammenfallen, also auch an die Stelle der beiden mit T_1 und T_2 bezeichneten Punkte nur ein Punkt T tritt.

Bei den verschiedenen Verfahren zur Ermittlung der Durchdringung können unerreichbare Punkte vorkommen. Die daraus entstehenden Schwierigkeiten lassen sich entweder durch geeignetere Annahme der Hilfsebenen überwinden oder auch dadurch, daß man einzelne Kanten des Durchdringungsvielecks als Schnitt zweier Dreiecke nach Nr. 200 bestimmt.

223. Durchdringung von Pyramiden und Prismen. Das erste und zweite Verfahren von Nr 220 und 221 lassen sich ohne weiteres auch auf den Fall der Durchdringung einer Pyramide mit einem Prisma oder der Durchdringung zweier Prismen anwenden

Will man in diesen Fällen das dritte Verfahren von Nr 222 anwenden, so muß man die Prismen als Pyramiden mit unendlich fernen Spitzen auffassen Handelt es sich um die Durchdringung einer Pyramide mit einem Prisma, so sei S_1 die Spitze der Pyramide, während die unendlich fern gedachte Spitze der Pyramide, als die man das Prisma betrachtet, in der Richtung der Kanten des Prismas liegt. Demnach ist jetzt als Gerade S_1S_2 die durch S_1 parallel zum Prisma gezogene Gerade zu benutzen. Im übrigen verläuft die Konstruktion wie sonst. Liegen dagegen zwei Prismen vor, so sind beide Pyramidenspitzen S_1 und S_2 unendlich fern, daher gilt dasselbe von dem Hilfspunkt T. Mithin treten an die Stelle der in voriger Nummer von T aus nach $A_1, A_2 \ldots A_n$ und $B_1, B_2 \ldots B_m$ gezogenen Geraden lauter parallele Geraden. Ihre Richtung findet man so: Durch irgendeinen Punkt des Raumes zieht man die Parallelen zu beiden Prismen Sie bestimmen eine Ebene, ihr Schnitt mit der Ebene E ist eine Gerade, und diese Gerade hat die zu benutzende Richtung. Vergleiche auch das in Nr. 156 Gesagte.

224. Durchdringung beliebiger Vielflache. Bei der Unmenge verschiedenartiger Gestalten von Vielflachen läßt sich über die Ermittlung der Durchdringung irgend zweier Vielflache nicht viel mehr sagen, als daß man nach Nr. 199 die Punkte feststellt, in denen die Kanten des einen Vielflachs die Flächen des anderen und umgekehrt schneiden oder also nach Nr. 200 die Schnitte der Flächen beider Vielflache bestimmt. Zu den Durchdringungsvielecken gehören nur solche Strecken der Schnitte, die innerhalb der Flächen, nicht auf ihren Erweiterungen über

ihre Kanten hinaus, gelegen sind. Sobald man nur eine derartige Strecke XY gefunden hat, kann man die Betrachtung dadurch zwangläufig machen, daß man sich vornimmt, das Durchdringungsvieleck im Sinne von X nach Y zu durchlaufen. Denn Y muß ja auf dem Rande einer der beiden Seitenflächen liegen, so daß man, in Y angekommen, diese Seitenfläche durch die dort anstoßende Seitenfläche zu ersetzen hat.

Für besondere Arten von Vielflachen lassen sich besondere Erleichterungen der Konstruktion erdenken, aber darauf können wir nicht im einzelnen eingehen.

Man kann sich oft vorteilhaft des Verfahrens bedienen, das in Nr. 221 für Pyramiden auseinandergesetzt wurde, indem man zunächst die Schnitte aller Seitenflächen beider Vielflache mit zwei Hilfsebenen E und $\mathfrak{E}$ ermittelt. Denn diese Schnitte sind leicht zu zeichnen, wenn man die Hilfsebenen senkrecht zu einer der Tafeln wahlt oder die eine senkrecht zur Grundrißtafel und die andere senkrecht zur Aufrißtafel. Dabei muß man die Ebenen der einzelnen Flächen selbstverständlich unter Umständen über die Kanten hinaus fortsetzen, um sie mit den Hilfsebenen E und $\mathfrak{E}$ zum Schnitt zu bringen.

225. Senkrechte Projektion einer gegebenen Strecke auf eine gegebene Ebene. Gegeben sei eine Strecke PQ und eine Ebene, diese etwa als ein Dreieck ABC. Soll PQ auf diese Ebene senkrecht projiziert werden, so muß durch PQ die zur Ebene ABC senkrechte Ebene gelegt werden. Nach Nr. 18 führt man aber alle Aufgaben des Senkrechtstehens auf die zurück, entweder die zu einer gegebenen Richtung senkrechte Stellung oder die zu einer gegebenen Stellung senkrechte Richtung zu finden. Im vorliegenden Fall ist die Stellung der Ebene ABC bekannt Demnach bestimmt man die zu ihr senkrechte Richtung, d. h. man fallt von P und Q die Lote auf die Ebene ABC und ermittelt ihre Fußpunkte (Nr 203).

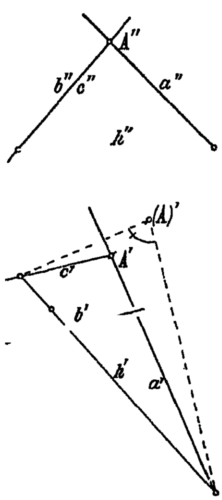


Fig 320

226. Winkel von Geraden und Ebenen. Zwei windschiefe Geraden a, b bilden gewisse Winkel miteinander Man bekommt die Schenkel dieser Winkel, indem man durch irgendeinen Punkt die Parallelen zu beiden Geraden zieht (Nr. 6) Am einfachsten ist es, einen Punkt A auf a anzunehmen, da man dann nur die Parallele c zu b durch A zu ziehen braucht. Die wahre Größe der Winkel von a und c ergibt sich, indem man eine Hohenlinie h der Ebene des Winkelfeldes $(a\ c)$ auswahlt und die Ebene so weit um h dreht, bis sie zur Grundrißtafel parallel liegt (Nr. 205). Es ist vorteilhaft, den Punkt A auf a so anzunehmen, daß A'' auch auf b'' liegt, weil dann c'' mit b'' zusammenfallt. Siehe Fig 320.

Die Winkel, die eine gegebene Gerade g mit einer gegebenen Ebene E bildet, liegen in der Ebene, vermöge deren g auf die Ebene E senkrecht projiziert wird, siehe Nr. 225. Kommt es aber

nicht darauf an, die Lage dieser Winkel, sondern nur ihre wahre Größe zu ermitteln, so verfahrt man bequemer. Man fallt von einem Punkt von g das Lot l auf die Ebene E (Nr. 203), ohne den Fußpunkt dieses Lotes zu bestimmen. Der spitze Winkel, den g mit l bildet, ist das Komplement des spitzen Winkels den g mit der Ebene bildet. Man wird daher den spitzen Winkel von g und l durch Umlegung in eine zur Grundrißtafel parallele Lage in wahrer Größe darstellen und sein Komplement bilden. Hierbei sei besonders darauf aufmerksam gemacht, daß man beim Fallen des Lotes l auf der Ebene E der Hauptlinien dieser Ebene bedarf, und beim Umlegen der Ebene von g und l einer Höhenlinie dieser zweiten Ebene. Man kann die Zeichnung ein wenig vereinfachen, indem man die Höhenlinien beider Ebenen gleich hoch wahlt, so daß ihre Aufrisse zusammenfallen, aber ihre Grundrisse nicht.

Die Winkel, die zwei gegebene Ebenen miteinander bilden, liegen in den zu beiden Ebenen oder also zu ihrer Schnittgeraden s senkrechten Ebenen. Man bestimmt also zuerst diese Schnittgerade s (Nr 200) und legt dann durch irgendeinen Punkt S von s die zu s senkrechte Ebene (Nr 202). Schließlich schneidet man diese Ebene mit den beiden gegebenen Ebenen. Wenn man aber nur die wahre Große der Winkel haben will, kann man auch hier bequemer verfahren. Von irgendeinem Punkte fallt man auf beide gegebenen Ebenen die Lote l_1 und l_2 (Nr. 203), ohne ihre Fußpunkte zu bestimmen, und ermittelt dann durch Umlegen der Ebene von l_1 und l_2 die wahre Große der Winkel von l_1 und l_2. Der stumpfe Winkel von l_1 und l_2 ist namlich das Supplement des spitzen Winkels, den die beiden gegebenen Ebenen miteinander bilden

227. **Kugel durch vier gegebene Punkte.** Liegt ein Vierflach $ABCD$ vor, so hat der Mittelpunkt M der dem Vierflach umschriebenen Kugel von allen vier Ecken A, B, C, D dieselbe Entfernung Alle Punkte, die von A und B gleiche Entfernungen haben, bilden die in der Mitte von AB auf AB senkrecht stehende Ebene, von der man nach Nr. 202 sofort Hauptlinien finden kann Ebenso kann man die zu BC und die zu CD mittelsenkrechten Ebenen feststellen. Der gesuchte Mittelpunkt M der Kugel ist der Schnittpunkt der drei mittelsenkrechten Ebenen. Demnach kommt die gestellte Aufgabe darauf zuruck, den gemeinsamen Punkt dieser Ebene zu finden.

Durch M gehen auch die drei zu AC, AD und BD mittelsenkrechten Ebenen, zur Prüfung der Richtigkeit der Zeichnung benutze man daher auch eine von ihnen, indem man feststellt, ob der gefundene Punkt M in ihr liegt.

Der Radius der Kugel wird als die wahre Länge von MA bestimmt (Nr. 204). Ist dies geschehen, so kann man die Umrisse der Kugel in beiden Projektionen zeichnen.

Insbesondere kann es vorkommen, daß drei Ebenen nicht nur einen Punkt M, sondern eine Gerade gemein haben. Im vorliegenden Fall tritt dies aber bei den mittelsenkrechten Ebenen von AB, BC und CD nicht ein, wenn $ABCD$ ein wirklich räumliches Vierflach ist.

228. **Nochmals der kürzeste Abstand windschiefer Geraden.** Der kürzeste Abstand XY zweier gegebener windschiefer Geraden a, b wurde

in Nr. 214 durch Benutzung zweier neuer Tafeln gefunden. Man kann aber auch wie folgt vorgehen. Die gesuchte Gerade XY muß senkrecht sein zu a und b, also auch zu einer Ebene, die zu a und b parallel ist. Alle derartigen Ebenen sind zueinander parallel, und man bekommt eine, indem man durch einen beliebigen Punkt A von a die Parallele c zu b zieht, da dann a und c eine solche Ebene bestimmen. Ist l etwa das in A auf diese Ebene errichtete Lot (Nr. 203), so ist die gesuchte Gerade XY zu l parallel. Mithin liegt jetzt die Aufgabe vor, diejenige zu l parallele Gerade zu finden, die a und b schneidet, d. h. die in Nr. 218 zuletzt erwähnte Aufgabe. Man bringt die Ebene von a und l mit b in Y zum Schnitt (Nr. 199); die Parallele zu l durch Y wird dann a in X treffen, und XY ist der gesuchte kürzeste Abstand.

Die Zeichnung vereinfacht sich ein wenig, wenn man A so auf a wählt, daß A'' auch auf b'' liegt, weil dann c'' mit b'' zusammenfällt. Daß X' und X'' auf einem Lot zur Projektionsachse liegen müssen, ist eine Zeichenprobe. Die wahre Länge des kürzesten Abstandes XY ergibt sich nach Nr. 204.

229. Netze von Pyramiden und Prismen. Ein ebenes Vieleck $ABCD\ldots$ kann nach Fig 301 von Nr. 205 durch seine beiden Projektionen gegeben werden, indem man von einem Paar Hauptlinien h und k seiner Ebene ausgeht. Außerdem nehmen wir noch einen außerhalb der Ebene des Vielecks gelegenen Punkt S an. Die Geraden $SA, SB, SC\ldots$ sind dann die Kanten einer Pyramide mit der Grundfläche $ABCD\ldots$ Das N e t z d e r P y r a m i d e wird von den dreieckigen Seitenflächen SAB, $SBC\ldots$ und der Grundfläche $ABCD$ in ihrer wahren Gestalt und Größe gebildet. Man kann diese einzeln nach Nr. 205 ermitteln, indem man jede dieser Ebenen um eine ihrer Höhenlinien so weit dreht, bis sie zur Grundrißtafel parallel liegt.

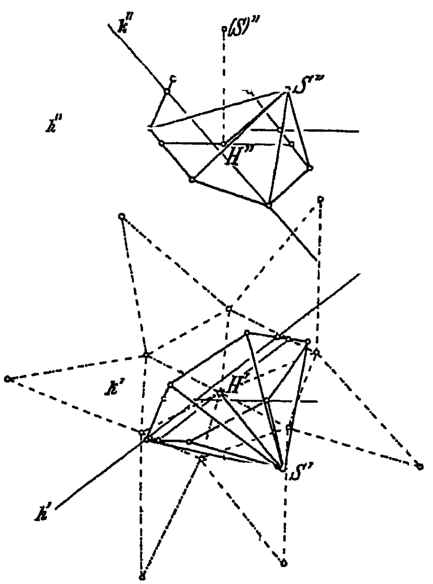


Fig. 321

Wenn aber die Pyramide viele Kanten hat, läßt sich dies Verfahren durch ein bequemeres ersetzen: Man bringt die ganze Pyramide durch eine Drehung in eine derartige Lage, daß ihre Grundfläche zur Grundrißtafel parallel wird. Da man feststellen muß, wohin dabei die Pyramidenspitze S gelangt, empfiehlt es sich, als Drehachse diejenige Höhenlinie zu benutzen, die durch den Fußpunkt H des Lotes von S auf die Grundebene (h, k) der Pyramide geht. Siehe Fig. 321. Der Fußpunkt H wird nach Nr. 203 ermittelt. Die Lage des Grundvielecks nach der Drehung um die durch H gehende Höhenlinie ergibt sich wie in Nr. 205. Nun ist die Höhe in der neuen Lage der Pyramide zur Grundrißtafel senk-

recht, d. h. $(S)'$ fällt mit H' zusammen, während sich die Höhe im Aufriß $H''(S)''$ in wahrer Länge zeigen muß. Daher wird die wahre Länge von HS bestimmt (Nr. 204) und mit ihrer Hilfe $(S)''$ gefunden. Nun liegt das Grundvieleck in der neuen Lage im Grundriß in wahrer Gestalt und Größe vor. Das Netz ergibt sich also, wenn man alle Seitenflächen um ihre Grundkanten in die Ebene der Grundfläche umlegt. Dabei beschreibt die Spitze (S) jedesmal einen Kreis, der im Grundriß als Lot von $(S)'$ auf eine der Kanten erscheint. Die Radien der Drehkreise sind die Höhen der Seitendreiecke von (S) aus. Man bestimmt sie als Hypotenusen aus den seitlichen Abständen des Punktes (S) von den Grundkanten und der wahren Länge der Pyramidenhöhe als Katheten. Somit kann man die von der Spitze ausgehenden Höhen der Dreiecke in der Umlegung zeichnen, und damit hat man dann alles Wesentliche für das Netz gefunden. Eine Probe der Richtigkeit besteht darin, daß jede von der Spitze ausgehende Kante zweimal im Netz vorkommt, so daß diese beiden Strecken gleich lang ausfallen müssen. Vgl. Fig. 21 von Nr. 23.

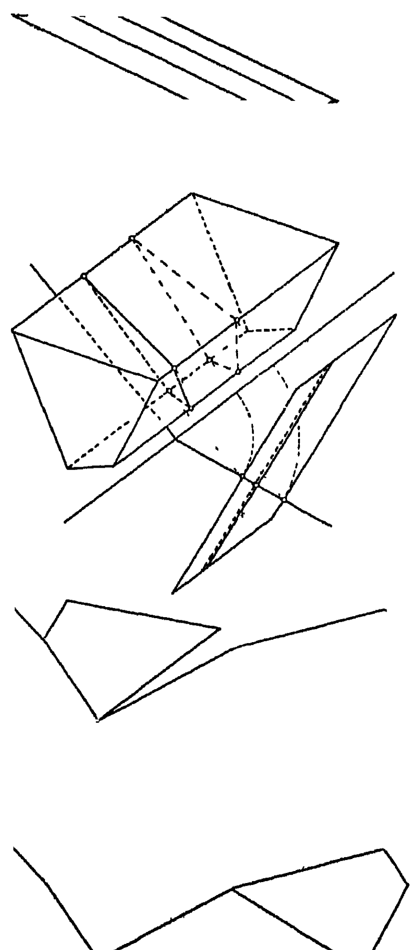


Fig. 322.

Wir nehmen nun an, ein Prisma sei vorgelegt, das durch zwei parallele Ebenen begrenzt sei, von denen wir die eine als die Grundfläche bezeichnen. Zur Ermittlung des **Netzes des Prismas** kann man wie bei der Pyramide eine Drehung des Prismas vornehmen, so daß die Grundfläche zur Grundrißtafel parallel wird. Da aber hier keine Spitze vorkommt, benutze man den oberen Endpunkt einer Prismenkante, indem man von ihm das Lot auf die Grundfläche fällt und wie vorhin die Pyramidenhöhe so jetzt dieses Lot verwendet. Sobald man die neue Lage dieses oberen Endpunktes gefunden hat, ist auch die ganze obere Endfläche in der neuen Lage bekannt, da sie mit der Grundfläche kongruent ist und mit ihr parallele Kanten hat. Zur Umlegung der einzelnen Seitenparallelogramme des Prismas in die Ebene der Grundfläche genügt es, die Länge einer Kante zu bestimmen, da alle Kanten gleich lang sind.

Ein anderes **Verfahren zur Herstellung des Prismennetzes** besteht darin, daß man zuerst einen zu seiner Richtung **senkrechten Querschnitt** ausfindig macht, etwa durch Anwendung eines zur Prismenrichtung parallelen Seitenrisses, so daß der Querschnitt im

Seitenriß nur als Strecke erscheint, siehe Fig. 322. Die wahre Gestalt des Querschnittes ergibt sich, wenn man ihn um eine Höhenlinie seiner Ebene in eine zur Grundrißtafel parallele Lage bringt. In Fig. 322 ist insbesondere die Grundriß-Spurgerade der Querschnittebene als Drehachse benutzt worden. Die Drehkreise erscheinen im Seitenriß als Kreise. Um das Netz herzustellen, setzt man die Kanten des Querschnitts geradlinig aneinander und trägt auf den Loten in den einzelnen Endpunkten die Längen der Prismenkanten über und unter dem Querschnitt auf; man entnimmt diese Längen dem Seitenriß, der sie unverkürzt zeigt. Nachdem man den Prismenmantel gefunden hat wird man noch die beiden einander kongruenten Endvielecke in ihrer wahren Gestalt und Größe ansetzen.

230. Eine Folge von Winkelfeldern und ihre Abwicklung. Eine nicht durch eine Grundflache abgeschlossene Pyramide besteht aus einer Anzahl von Winkelfeldern, von denen je zwei aufeinanderfolgende einen Schenkel gemein haben, wahrend allen Winkelfeldern derselbe Scheitel zukommt. Indem wir die letzte Bedingung fortlassen, gelangen wir zu einer allgemeineren Folge von Winkelfeldern. Es ist nützlich, das aus ihnen bestehende eigenartige Gebilde genauer zu untersuchen

Statt des gemeinsamen Scheitels nehmen wir im Raum einen gebrochenen Linienzug $P_0P_1P_2P_3\ldots$ an, der nicht eben sein soll, siehe Fig. 323. Es soll also P_3 nicht in der Ebene $P_0P_1P_2$, ferner P_4 nicht in der Ebene $P_1P_2P_3$ usw. liegen. Indem wir die Strecken P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3 .. ruckwarts, d. h. über P_0, P_1, $P_2\ldots$ hinaus beliebig weit geradlinig verlangern, bekommen wir die Schenkel t_{01}, t_{12}, $t_{23}\ldots$ der Winkelfelder Zu dem so entstandenen Gebilde aus Winkelfeldern gehort geradeso wie zu einer Pyramide ein Gebilde von Scheitelwinkelfeldern, die sich ergeben, wenn man P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3 .. vorwarts, d. h. uber P_1, P_2, P_3 .. hinaus geradlinig verlängert Nehmen wir an, daß alle Winkelfelder undurchsichtig seien, so werden die einen Winkel die anderen zum Teil verdecken. Das Gebilde besteht also aus zwei Manteln, die sich langs $P_0P_1P_2P_3\ldots$ aneinander anschließen

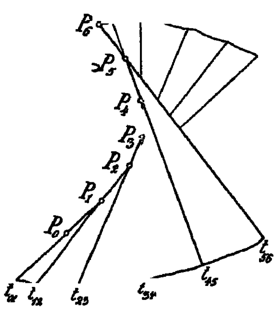


Fig 323

Jedes Winkelfeld sei für sich starr und mit seinem Scheitelwinkelfelde starr verknüpft. Dagegen seien langs der Geraden t_{01}, t_{12}, $t_{23}\ldots$ Drehungen der Winkelfeldebenen gegeneinander möglich. Dann ist es leicht, das ganze Gebilde auf die Ebene der Tafel auszubreiten. Man lege namlich das erste Winkelfeld mit dem starr damit verbundenen Scheitelfeld auf die Tafel, drehe dann den Rest um t_{12}, bis dasselbe vom zweiten Winkelfeld und seinem Scheitelfeld gilt, weiterhin den Rest um t_{23}, bis dasselbe vom dritten Winkelfeld und seinem Scheitelfeld gilt, usw. Man sieht, daß auf diese Art das ganze Gebilde derartig auf die Ebene der Tafel abgewickelt wird, daß es einen gewissen Teil der Ebene doppelt uberdeckt. Aus dem räumlichen Linienzug $P_0P_1P_2P_3\ldots$ wird dabei eine ebene gebrochene Linie, und die Ebene wird auf der konvexen Seite dieser gebrochenen Linie von den beiden Mänteln des abgewickelten

Gebildes doppelt überdeckt, auf der konkaven Seite dagegen gar nicht.

Das Gebilde ist gegeben, sobald der gebrochene Linienzug $P_0 P_1 P_2$ .. durch seine beliebig anzunehmenden beiden Projektionen gegeben ist, siehe Fig. 324. Hier ist das Gebilde willkürlich durch zwei Höhenschnitte abgegrenzt worden, wodurch sich die Punkte $S_{01}, S_{12}, S_{23}, \ldots$ und $T_{01}, T_{12}, T_{23} \ldots$ ergeben. Um die Abwicklung wirklich herzustellen, legt man zunächst jedes einzelne Winkelfeld nebst seinem Scheitelfelde etwa um die Höhenlinie der unteren Begrenzung so weit um, bis es zur Grundrißtafel parallel wird. Man bekommt dadurch im Grundriß die wahre Gestalt der einzelnen Felder Diese setzt man dann richtig aneinander, wodurch sich das ebene Netz in Fig. 325 ergibt, in dem sich die beiden Mantel zum Teil uberdecken Man muß dabei beachten, daß die Winkelfelder in Fig 324 zur Vermeidung einer Überdeckung des Grundrisses nach außen umgelegt worden sind. Bei der Zusammensetzung zum Netz in Fig 325 sind sie daher noch umgedreht worden. Es leuchtet ein, daß, wenn man auf dem Gebilde irgendeinen gebrochenen Linienzug von Kante zu Kante zieht und die Eckpunkte dieses Linienzugs jeweilig auch in den Umlegungen bestimmt, auf dem abgewickelten Mantel ein Linienzug entsteht, dessen einzelne Strecken die wahren Langen der Strecken des angenommenen Linienzugs sind. Jeder auf dem Gebilde gezeichnete gebrochene Linienzug geht mithin vermöge der Abwicklung in einen gerade so langen gebrochenen Linienzug in der Ebene über.

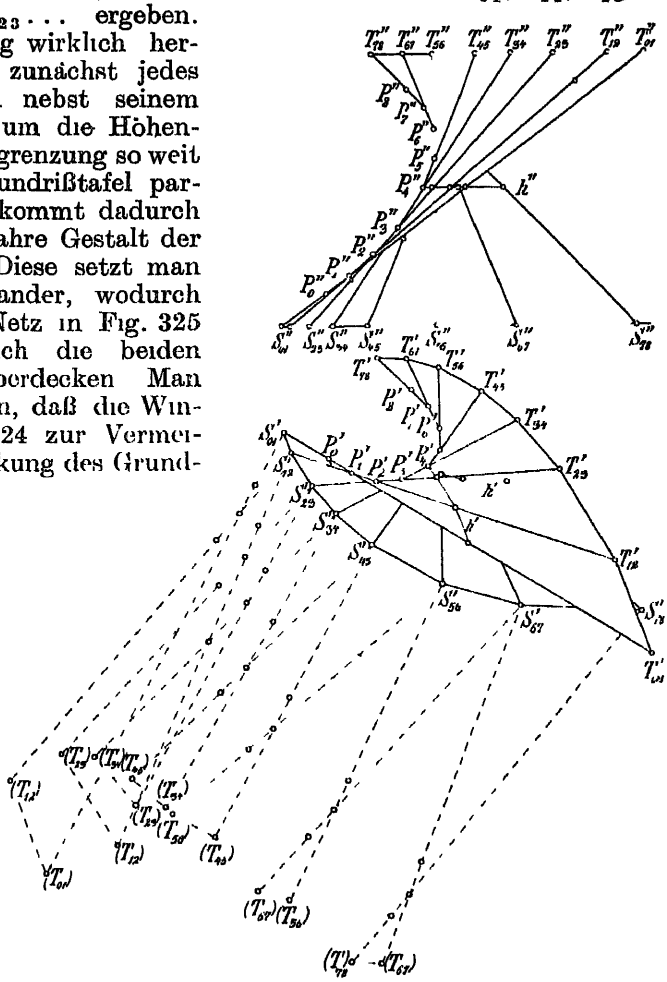


Fig 324.

Die Beschaffenheit des Gebildes, insbesondere der Zusammenhang der beiden Mäntel längs des Linienzuges $P_0 P_1 P_2 \ldots$ kommt noch deutlicher zum Ausdruck, wenn man es mit irgendeiner Ebene

schneidet, die keine Strecke des Linienzugs $P_0P_1P_2$ . . enthalt, z. B. mit einer wagerechten Ebene. Die beiden begrenzenden Höhenebenen sind allerdings auch wagerecht, aber der eine ist so tief und der andere so hoch angenommen, daß sie nur je einen Mantel des Gebildes schneiden. Deshalb ist noch ein mittlerer Höhenschnitt h durch P_4 gewählt worden. Der gebrochene Linienzug, der sich durch diesen Schnitt ergibt, ist im Grundriß in wahrer Gestalt zu sehen. Er gehort teils dem einen und teils dem anderen Mantel an. Je kleiner der Winkel der beiden Ebenen des Gebildes ist, denen jener Punkt P_4 angehort, um so spitzer treffen sich in P_4 die beiden Teile des Schnitt-Linienzuges, die auf den beiden verschiedenen Manteln liegen Deshalb nennt man den Linienzug $P_0P_1P_2$ . . . den Grat des Gebildes

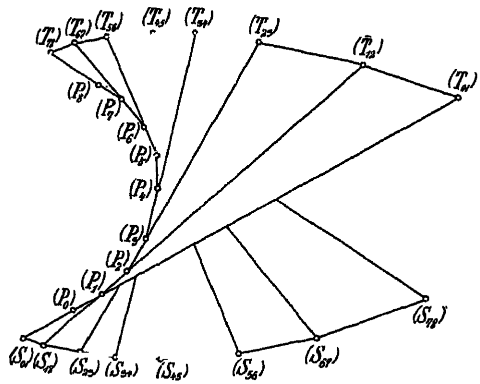


Fig 325

231. Raumkurven und abwickelbare Flächen. Nunmehr machen wir einen Grenzubergang. Wir stellen uns vor, daß alle Strecken P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3 . . . des gebrochenen Linienzuges unendlich klein werden Zugleich aber sollen auch die Winkel (t_{01}, t_{12}), (t_{12}, t_{23}) . . . aller Winkelfelder unendlich klein werden Außerdem schreiben wir vor, daß auch die Winkel, die je zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Winkelfeldebenen miteinander bilden, unendlich klein werden. Dann wird aus $P_0P_1P_2$. eine stetige Raumkurve k, die uberall bestimmte Tangenten und bestimmte Schmiegungsebenen hat Unter der Tangente eines Punktes der Kurve versteht man namlich die Gerade, die ihn mit einem unendlich benachbarten Punkte der Kurve verbindet, so daß t_{01}, t_{12}, t_{23} . . . die Tangenten von P_0, P_1, P_2 . . . sind Unter der Schmiegungsebene eines Punktes der Kurve versteht man die Ebene, die durch seine Tangente und noch einen unendlich benachbarten Punkt geht, so daß die Ebene von t_{01} und P_2, also die Ebene $P_0P_1P_2$, d. h. die des Winkelfeldes (t_{01}, t_{12}) die Schmiegungsebene des Punktes P_0 ist. Die Schmiegungsebene von P_0 kann auch als die Grenzlage der Ebene betrachtet werden, die durch den Punkt P_0 und zwei benachbarte Punkte P_1 und P_2 der Kurve geht, für den Fall, wo P_1 und P_2 längs der Kurve unendlich nahe an P_0 heranrucken. Die Schmiegungsebenen sind also die Ebenen je dreier unendlich benachbarter Punkte der Kurve. Ebenso wie dem Punkt P_0 die Schmiegungsebene $P_0P_1P_2$ zukommt, hat der Punkt P_1 die Schmiegungsebene $P_1P_2P_3$, der Punkt P_2 die Schmiegungsebene $P_2P_3P_4$ usw. Es ist übrigens einerlei, ob man sagt, P_0P_1 sei die Tangente und $P_0P_1P_2$ die Schmiegungsebene von P_0 oder es seien dies die Tangente und Schmiegungsebene von P_1, denn P_0 und P_1 sollen ja unendlich nahe aneinander rücken.

Eine ebene Kurve unterscheidet sich von einer Raumkurve da-

durch, daß alle ihre Punkte in einerlei Ebene liegen. Sie ist als eine Raumkurve aufzufassen, deren Schmiegungsebenen sämtlich in eine einzige Ebene zusammenfallen.

Das in voriger Nummer betrachtete Gebilde wird beim Grenzübergang diejenige krumme Fläche, die von den Tangenten der Raumkurve k erzeugt wird, die sogenannte Tangentenfläche der Kurve. Sie besteht aus zwei Mänteln, die längs der Kurve k zusammenhängen.

In voriger Nummer wurde ein beliebiger ebener Schnitt, z. B. ein wagerechter Schnitt, durch das Gebilde gelegt. Da jetzt die aufeinanderfolgenden Ebenen der Winkelfelder unendlich kleine Winkel miteinander bilden, folgt aus dem dort Erkannten, daß der Schnitt der Tangentenfläche mit einer beliebigen Ebene eine Kurve liefert, deren beide Zweige auf den beiden Mänteln verlaufen und sich dort, wo die Ebene die Kurve k trifft, in einer Spitze vereinigen. Eine Spitze nennt man auch einen Rückkehrpunkt, weil ein eine Kurve durchlaufender Punkt in einer Spitze der Kurve geradezu umkehrt. Dementsprechend heißt die Raumkurve k die Rückkehrkurve ihrer Tangentenfläche Man bezeichnet sie auch als ihren Grat Das vorhin über ebene Schnitte Gesagte gilt allerdings nicht mehr, wenn die Ebene des Schnittes eine Tangente der Raumkurve k enthält.

Die Geraden, die von einem Kurvenpunkt ausgehen und zu seiner Tangente senkrecht sind, heißen die Normalen des Punktes (vgl. Nr. 79 für den besonderen Fall einer ebenen Kurve). Sie bilden seine Normalebene. Die Normalebene des Punktes P_0 ist also die in P_0 auf P_0P_1 senkrecht stehende Ebene. Sie ist demnach zur Schmiegungsebene $P_0P_1P_2$ des Punktes P_0 ebenfalls senkrecht Beide Ebenen schneiden sich also in einer der Normalen des Punktes P_0, und diese Normale wird die Hauptnormale des Kurvenpunktes P_0 genannt, diejenige dagegen, die nicht nur auf der Tangente, sondern auch auf der Schmiegungsebene senkrecht steht, die Binormale des Kurvenpunktes (d. h. Doppelnormale) Die Tangente, Haupt- und Binormale eines Kurvenpunktes stehen also alle drei aufeinander senkrecht und bilden somit ein rechtwinkliges Achsenkreuz. Man nennt es das den Kurvenpunkt begleitende Achsenkreuz, weil es von Punkt zu Punkt eine andere Lage bekommt.

Wenn insbesondere eine ebene Kurve vorliegt, ist ihre Ebene, wie gesagt, die allen Punkten der Kurve gemeinsame Schmiegungsebene Diejenige Gerade, die man kurzweg in der Geometrie der Ebene eine Kurvennormale nennt, ist also die Hauptnormale des betreffenden Kurvenpunktes. Die Binormalen einer ebenen Kurve sind die längs der Kurve auf ihrer Ebene senkrecht stehenden Geraden, also alle zueinander parallel. Dagegen sind die Binormalen einer wirklichen Raumkurve nicht zueinander parallel.

Aus den Betrachtungen der vorigen Nummer folgt, **daß man die Tangentenfläche einer Raumkurve ohne Dehnung auf die Tafel ausbreiten kann**, nämlich so, daß jede auf der Tangentenfläche gezogene willkürliche Linie bei der Ausbreitung ihre Länge bewahrt. Dies meint man, wenn man den Satz ausspricht, **daß die Tangentenflächen der Raumkurven auf die Ebene abwickelbar sind.** Bei der Ausbreitung fallen die beiden Mäntel der Fläche

übereinander, und zwar liegen sie nur auf der konvexen Seite derjenigen Kurve, in die dabei die Raumkurve selbst übergeht.

Man kann beweisen, daß es außer den Tangentenflächen der Raumkurven und den Kegel- und Zylinderflächen, die man als Sonderfälle oder Ausartungen zu ihnen rechnen kann, keine auf die Ebene abwickelbaren Flächen gibt. Der Beweis dieses Satzes erfordert jedoch andere Hilfsmittel, so daß wir darauf nicht eingehen. Dagegen sei eine daraus zu ziehende Folgerung hervorgehoben: Jede Fläche, die durch Verbiegung der Ebene ohne Dehnung und Knickung entsteht, ist danach die Tangentenfläche einer Raumkurve, d. h. sie enthält trotz der ausgeführten Biegung immer noch unendlich viele Geraden, die die Tangenten einer Raumkurve sind. Man kann ein Blatt Papier als hinreichend unausdehnbar ansehen. Man biege es in irgendeine krumme Form und überzeuge sich davon, daß man dann in jedem Punkt der Fläche ein Lineal so anlegen kann, daß es die Fläche in seiner ganzen Länge berührt. Allerdings sieht man hier nicht die Raumkurve, deren Tangenten die Geraden der Fläche sind. Das liegt daran, daß diese Raumkurve weiter außerhalb des hergestellten Flächenstückes ist; man müßte die Geraden der Fläche erst hinreichend über das Blatt hinaus verlängern.

Man kann aber auch diese Raumkurve selbst zur Anschauung bringen: Man nehme zwei Blätter Papier, lege sie aufeinander, ziehe irgendeine krumme Linie und schneide auf beiden Blättern dasjenige Stück fort, das auf der konkaven Seite der Linie liegt. Alsdann befestige man die beiden Blätter längs der Linie miteinander. (Am bequemsten ist es, man näht die Blätter vor dem Abschneiden längs der Kurve aufeinander und schneidet erst dann die konkaven Teile aus.) Das so hergestellte Modell kann man dann verbiegen, indem man dabei die beiden Blätter voneinander entfernt. Dadurch bekommt man eine sehr gute Vorstellung von den beiden Teilen einer Tangentenfläche, indem die gemeinsame Linie nunmehr die zugehörige Raumkurve, der Grat der Fläche, ist.

Mit gewissen Raumkurven und ihren Tangentenflächen werden wir uns im zweiten Band eingehender beschäftigen.

Anmerkung. Zuerst wurden die Raumkurven — abgesehen von einzelnen besonderen — als Kurven auf krummen Flächen behandelt, also nicht unabhängig für sich. So z. B. durch Johann Bernoulli (geb. 1667 in Basel, Professor der Mathematik in Groningen und Basel, wo er 1748 starb) in der Abhandlung „In superficie quacunque curva ducere lineam inter duo puncta brevissimam“ (Auf irgendeiner krummen Oberfläche die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten zu ziehen), die er 1728 dem Professor Klingenstierna an der Universität Upsala mitgeteilt hatte, die aber erst im „Johannis Bernoulli Opera omnia“, 4. Bd. Lausanne und Genf 1742, S. 108 bis 128, im Druck erschien. Er führte (S. 113) den Begriff der Schmiegungsebene (planum osculans oder Oskulationsebene) ein. Zum Gegenstand einer besonderen Untersuchung wurden die Raumkurven in einer berühmten Abhandlung des damals erst achtzehnjährigen Alexis Claude Clairaut (geb. 1713 in Paris, Mitglied der Akademie, bekannt als Forscher über die Gestalt der Erde, gest. ebenda 1765) gemacht, nämlich in seinen „Recherches sur les courbes à double courbure“, Paris 1731. Sie wurden aber hier wesentlich rechnerisch mit Hilfe der analytischen Geometrie des Raumes behandelt. Clairaut bezeichnete die Raumkurven als „courbes à double courbure“, Kurven doppelter Krümmung, wie sie auch jetzt noch oft genannt werden, weil sie gewissermaßen an den Krümmungen zweier ebener Kurven, nämlich ihrer Grund- und Aufrisse, teilnehmen (Vorrede 2. Seite). Daß die Tangenten einer Raumkurve eine abwickelbare Fläche erzeugen, wurde von L. Euler (Nr. 65) erkannt: „De solidis quorum superficiem in planum explicare licet“ (Über die Körper, deren Oberfläche sich auf die Ebene ausbreiten läßt), Novi Comment. Acad.

Petrop. 16 Bd, S 3—34, gelesen 1771, gedruckt Petersburg 1772 Fast gleichzeitig mit Euler widmeten G. Monge und Tinseau den Raumkurven und damit zusammenhangenden geometrischen Gebilden eingehende Untersuchungen, bei denen die Raumkurven zum ersten Male unabhangig fur sich, nicht als Flachenkurven, auftraten. Die Abhandlung von Monge (Nr 191) hat den Titel. „Mémoire sur les développées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexions des courbes à double courbure", Mém. des Savants étrangers de l'Acad 10 Bd, S 511—550, vorgelegt 1771, gedruckt Paris 1785. Sie wurde dann in seine bei Nr. 201 genannten „Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie" (siehe § XXVII der 5 Auflage von 1850) aufgenommen Monge bezeichnete die Raumkurve als den Grat ihrer Tangentenflache ausdrucksvoll mit „arête de rebroussement" oder Ruckburstgrat, er dachte dabei an die scharfe Linie, die entsteht, wenn man ein Fell von zwei Seiten her mit der Burste zusammen kammt. Die Abhandlung von Tinseau, einem franzosischen Genieoffizier, hat den Titel „Solution de quelques problèmes relatifs à la théorie des surfaces courbes et des courbes à double courbure", Mém des Savants étrangers de l'Acad 9 Bd, S 593—624, vorgelegt 1774, gedruckt Paris 1780 Eine zweite Abhandlung von Monge, die alter als die erste ist, aber spater veroffentlicht wurde, hat den Titel „Sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulièrement sur celles des surfaces développables, avec une application à la théorie des ombres et pénombres", ebenda 9 Bd, S. 382—440, vorgelegt 1775, gedruckt Paris 1780 Hier geht Monge genauer auf die Eigenschaften der abwickelbaren Flachen ein, indem er sie deutlich von den sonst noch vorhandenen Flachen unterscheidet, die ebenfalls unendlich viele gerade Linien enthalten. Er macht dabei Anwendungen auf die Schattentheorie Der Name Binormale fur die auf der Schmiegungsebene senkrecht stehende Normale wurde eingefuhrt von Claude Bairé de Saint-Venant (geb 1797 zu Portoiseau bei Melun, Ingenieur, gest 1886 zu Paris) „Mémoire sur les lignes courbes non planes", Journ de l'école polyt 30 cahier, 18. Bd, Paris 1845, S 1—76, insbesondere S 17 Daß die Tangentenflachen der Raumkurven, zu denen auch die Kegel und Zylinder als Sonderfalle gehoren, die einzigen Flachen sind, die sich auf die Ebene abwickeln lassen, wurde erst viel spater streng bewiesen durch Ossian Bonnet (geb 1819, Professor an der École polytechnique und Sorbonne, gest 1892 in Paris), siehe „Recherche des surfaces que l'on peut représenter sur un plan", Annali di Matem. 2 Serie, 7 Bd 1875, S 61, 62

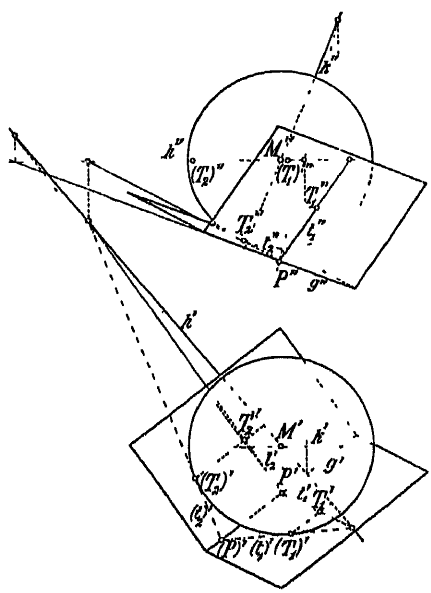


Fig. 326.

232. Tangentialebenen an eine Kugel und durch eine gegebene Gerade. Ist M der Mittelpunkt einer Kugel vom Radius r und ist g eine Gerade, deren Entfernung von M größer als r ist, so daß die Gerade die Kugel nicht schneidet, so gibt es zwei Tangentialebenen der Kugel, die durch die Gerade gehen. Das sind diejenigen Ebenen durch g, die von M den Abstand r haben. Da diese beiden Abstande als Lote zu den Ebenen die Gerade g senkrecht kreuzen, liegen sie in der zu g senkrechten Ebene E durch M. Man wird demnach diese Ebene E mit g in P zum Schnitt bringen und dann in E von P aus diejenigen Geraden t_1 und t_2 ziehen, die von M die Entfernung r haben, d. h. in der Ebene E die Tangenten von P an den Kreis um M vom Radius r legen. Dann bestimmen die beiden Geraden g, t_1 die eine und die beiden Geraden g, t_2 die andere Tangentialebene.

In der Zeichnung wird man die Ebene E durch ihre von M aus-

gehenden Hauptlinien h und k bestimmen, wobei $h' \perp g'$ und $k'' \perp h''$ ist (Nr. 202); dann wird man nach Nr. 199 den Schnittpunkt P der Ebene E mit g feststellen und die Ebene E um ihre Höhenlinie h so weit drehen, bis sie zur Grundrißtafel parallel liegt (Nr 205), weil sie dann im Grundriß ihre wahre Gestalt zeigt, siehe Fig 326. Dabei muß man feststellen, nach welcher Stelle (P) der Punkt P gelangt; von ihr aus sind die Tangenten $(t_1)'$, $(t_2)'$ an den Kreis um M' vom Radius r zu legen. Dieser Kreis ist im Grundriß der Umriß der Kugel, so daß man also von $(P)'$ an diesen Umriß die Tangenten legt und ihre Berührungspunkte $(T_1)'$ und $(T_2)'$ feststellt. Indem man die Drehung wieder aufhebt, bekommt man die Tangenten t_1 und t_2 und ihre Berührungspunkte T_1 und T_2 in der richtigen Lage. Die Umlegung zeigt den Winkel, den die beiden Tangentialebenen miteinander bilden.

Eine andere Art der Lösung der Aufgabe wurde in Nr. 216 unter 3 angedeutet.

233. Tangentialebenen an einen Rotationskegel von einem gegebenen Punkt aus. Obgleich wir erst später über krumme Flächen überhaupt und ihre Tangentialebenen reden wollen, sei doch schon hier auf eine besondere Eigenschaft hingewiesen, die nur den abwickelbaren Flächen (Nr. 231) zukommt. Hat man an eine Fläche eine Tangentialebene gelegt, so wird es im allgemeinen auch solche benachbarte Tangentialebenen geben, deren Stellung nur wenig von derjenigen der einen Ebene abweicht, und zwar ganz einerlei, auf welche Art man die Stellung ändert Wenn man aber insbesondere an einen Kegel eine Tangentialebene gelegt hat, darf man ihre Stellung nur auf gewisse Art ändern, wenn man eine benachbarte Tangentialebene des Kegels haben will Dies gilt auch für den Zylinder und noch allgemeiner für die Tangentenflächen der Raumkurven Man beweist nämlich, wie wir hier nur flüchtig bemerken, daß die Tangentialebenen der Tangentenfläche einer Raumkurve die Schmiegungsebenen (Nr 230) der Raumkurve sind, und da man durch Fortgang längs der Kurve von einer Stellung der Schmiegungsebene zu einer bestimmten neuen Stellung dieser Ebene gelangt, kann man von einer Tangentenebene einer abwickelbaren Fläche nur durch bestimmte Änderung ihrer Stellung zu einer benachbarten kommen, nicht durch beliebige Änderung Die Mannigfaltigkeit der Tangentialebenen einer Fläche ist also, wenn die Fläche eine abwickelbare Fläche ist, bedeutend eingeschränkt gegenüber dem Fall einer beliebigen Fläche. Das soeben Gesagte wird deutlicher, wenn man z. B. einen Kegel oder einen Zylinder mit der Kugel vergleicht. Während es zu jeder Ebene parallele Tangentialebenen der Kugel gibt, hat ein Kegel oder ein Zylinder keine zu einer beliebig angenommenen Ebene parallele Tangentialebene. Die Gesamtheit aller Tangentialebenen der Kugel weist alle möglichen Stellungen auf, während den Tangentialebenen von Kegeln und Zylindern nur gewisse Stellungen zukommen.

Dies erklärt es, daß die Aufgabe, die wir in der letzten Nummer gelöst haben, nicht immer Lösungen hat, wenn an die Stelle der Kugel ein Kegel tritt. Durch eine beliebig gewählte Gerade g geht im allgemeinen keine Tangentialebene eines Kegels. Dagegen kann man sich die Aufgabe stellen, von einem gegebenen Punkt aus die Tangentialebenen an den Kegel zu legen.

Wir wollen insbesondere annehmen, der Kegel sei ein Rotationskegel Ein Rotationskegel ist bestimmt, sobald man seine Spitze und eine dem Kegel eingeschriebene Kugel gegeben hat (Nr 94). Die Tangentialebenen des Kegels sind diejenigen Ebenen, die durch die Kegelspitze gehen und die Kugel berühren. Folglich handelt es sich um die Bestimmung derjenigen Tangentialebenen der Kugel, die durch die Kegelspitze S und den gegebenen Punkt P gehen, d. h die eine gegebene Gerade SP enthalten Damit kommen wir auf die Aufgabe der letzten Nummer zurück.

Entsprechend behandelt man die Aufgabe, von einem gegebenen Punkt aus die Tangentialebenen an einen Rotationszylinder zu legen, indem man den Zylinder als Kegel mit unendlich ferner Spitze auffaßt.

234. Rotationskegel mit gemeinsamen Tangentialebenen. Die Frage, ob zwei gegebene Rotationskegel eine Tangentialebene gemein haben, laßt sich ebenfalls beantworten, indem man jeden Kegel durch seine Spitze und eine ihm eingeschriebene Kugel ersetzt Es handelt sich namlich dann um die Beantwortung der Frage, ob die beiden Kugeln eine Tangentialebene gemein haben, die durch die beiden Spitzen S_1, S_2 geht

Wir betrachten daher zunachst uberhaupt Ebenen E, die beide Kugeln beruhren Die Beruhrungspunkte T_1, T_2 sind die Fußpunkte der Lote von den Kugelmitten M_1, M_2 auf E Diese Lote sind parallel und gleich den Kugelradien r_1, r_2. Mithin trifft die Gerade T_1T_2 die Gerade M_1M_2, die sogenannte Zentrale beider Kugeln, in einem derjenigen beiden Punkte A_1, A_2, die die Strecke M_1M_2 innerlich oder außerlich im Verhaltnis $r_1 : r_2$ teilen Beachtet man nun, daß jedes parallele Radienpaar M_1P_1 und M_2P_2 der Kugeln die Eigenschaft hat, daß die Verbindende der Endpunkte P_1, P_2 durch A_1 oder A_2 geht, so erhellt, daß A_1 und A_2 die sogenannten Ahnlichkeitspunkte der beiden Kugeln sind Man nennt die Ähnlichkeitspunkte den außeren und inneren Dies bezieht sich aber nur auf die Art der Teilung der Strecke M_1M_2 (Nr 9), keineswegs auf die Lage gegenüber den Kugeln Ein außerer Ähnlichkeitspunkt kann namlich sehr wohl im Innern der Kugeln liegen, ebenso aber auch ein innerer außerhalb der Kugeln

Eine gemeinsame Tangentialebene beider Kugeln muß, wie sich zeigte, durch einen der beiden Ähnlichkeitspunkte gehen, kann also nur dann vorhanden sein, wenn es wenigstens einen außerhalb beider Kugeln liegenden Ähnlichkeitspunkt A gibt. Da die Ebene auch durch S_1 und S_2 gehen muß, sind zwei Fälle zu unterscheiden: Wenn S_1, S_2 und A nicht in gerader Linie liegen, kann als fragliche Tangentialebene einzig und allein die Ebene S_1S_2A in Betracht kommen. Man vermag leicht festzustellen, ob sie von der Mitte der einen Kugel diejenige Entfernung hat, die gleich dem Radius ist (Nr. 203, 204); trifft dies zu, so gilt es auch hinsichtlich der anderen Kugel, d. h. dann, aber auch nur dann ist S_1S_2A eine und zwar die einzige gemeinsame Tangentialebene. Dieser Fall liegt z. B. dann vor, wenn man zwei Rotationskegel so auf die Grundrißtafel legt, daß die Grundrißtafel ihre gemeinsame Tangentialebene wird. Der andere denkbare Fall ist, daß S_1, S_2, A

eine Gerade bestimmen. Wenn die Gerade die Kugeln nicht schneidet, hat man durch sie nach Nr. 232 die Tangentialebenen an die eine Kugel zu legen. Sie werden auch die andere Kugel berühren. Die Annahme, daß S_1, S_2 und A überhaupt zusammenfallen, kommt augenscheinlich gar nicht in Betracht.

235. Gemeinsame Tangentialebenen dreier Kugeln. Liegen drei Kugeln mit verschiedenen Mittelpunkten vor, so kommt jedem Kugelpaar ein Paar von Ähnlichkeitspunkten zu, die auf der Zentralen der beiden Mittelpunkte gelegen sind und die Zentrale innerlich oder äußerlich im Verhältnis der Radien teilen. Insgesamt gibt es also sechs Ähnlichkeitspunkte; sie liegen sämtlich auf den Seiten des Dreiecks der drei Kugelmitten, und auf sie ist der Satz des Menelaus (Nr. 11) anwendbar. Danach liegen die Ähnlichkeitspunkte zu je dreien auf geraden Linien, und zwar kommt dies insgesamt viermal vor.

Eine Ebene, die alle drei Kugeln berührt, muß also durch eine dieser vier Geraden gehen. Auch erhellt leicht, daß eine Ebene, die durch eine dieser Geraden geht und eine der Kugeln berührt, also nach Nr 232 bestimmt werden kann, immer auch die beiden anderen Kugeln berührt. Mithin gehen durch jede solche unter den vier Geraden, die keine der Kugeln trifft, zwei gemeinsame Tangentialebenen aller Kugeln, und deshalb gibt es insgesamt höchstens acht gemeinsame Tangentialebenen Es kann aber auch gar keine vorhanden sein.

236. Kürzester Weg von einer Ebene auf eine andere Ebene. Zwei Ebenen E_1 und E_2 seien durch ihre Schnittgerade s und durch je einen Punkt A und B gegeben. Ein Punkt soll auf dem kurzesten auf beiden Ebenen verlaufenden Wege von A nach B wandern, d. h. es wird ein Punkt X auf s so gesucht, daß die Summe der Strecken AX und XB am kleinsten wird Dreht man die Ebene E_2 um s so weit, bis sie mit E_1 eine Ebene bildet, so andert sich dadurch die Strecke BX nicht Ist durch die Drehung aus B der Punkt (B) der Ebene E_1 hervor gegangen, so handelt es sich also dann darum, in der Ebene E_1 einen Punkt X auf s so ausfindig zu machen, daß die Summe der Strecken AX und $X(B)$ am kleinsten wird. Aber in der Ebene ist der kürzeste Weg der gerade Weg. Man hat also A mit (B) geradlinig zu verbinden Der Schnittpunkt der Verbindenden mit s ist X. Dabei ist jedoch zu beachten, daß man E_2 in verschiedenen Sinnen so um s drehen kann, bis E_2 mit E_1 zur Deckung kommt. Man muß die Drehung so ausuben, daß (B) auf diejenige Seite von s gelangt, auf der A nicht liegt.

Will man dies im Grund- und Aufriß zeichnen, so hat man zu bedenken, daß eine Drehung um eine Gerade s besonders leicht zu bewerkstelligen ist, wenn die Gerade zu einer Tafel parallel liegt (Nr. 13). Da nun s im allgemeinen weder zur Grundrißtafel noch zur Aufrißtafel parallel sein wird, benutzt man daher einen Seitenriß, der zur Geraden s parallel ist. Außerdem wird man gut tun, beide Ebenen E_1 und E_2, und zwar jede für sich, so weit um s zu drehen, bis beide zur Seitenrißtafel parallel sind. Dabei gelangen A und B in neue Lagen (A) und (B). Die Seitenrisse $(A)'''$ und $(B)'''$ ergeben sich so, wie es Fig. 327 zeigt· Die Mittelpunkte M_a und M_b der Drehkreise haben ihre Seitenrisse M_a''' und M_b''' in den Fußpunkten der Lote von A''' und B'''

auf s'''. Die Radien der Drehkreise sind die Hypotenusen, die zu den aus dem Seitenriß zu entnehmenden seitlichen Abständen, also den Abständen der Punkte A''' und B''' von s''', und aus den aus dem Grundriß zu entnehmenden Unterschieden der Abstände von der Seitenrißtafel, also den Abständen der Punkte A' und B' von s', als Katheten gehören. Diese Radien sind von M'''_a und M'''_b aus auf den Loten zu s''' bis $(A)'''$ und $(B)'''$ abzutragen, und zwar nach verschiedenen Seiten von s''' hin. Die Gerade $(A)'''(B)'''$ schneidet s''' in X'''. Daraus findet man rückwärts den Grundriß X' und Aufriß X'' des gesuchten Punktes X auf s. Die Strecken AX und XB des kürzesten Weges von A nach B über s sieht man im Seitenriß in den Umlegungen $(A)'''X'''$ und $X'''(B)'''$ in ihren wahren Längen

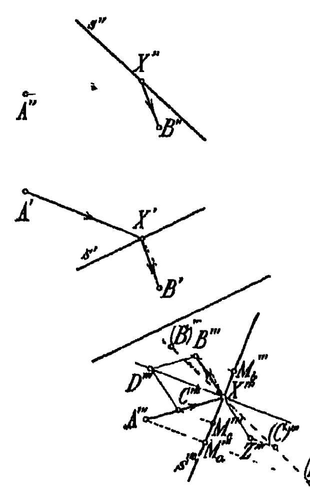


Fig 327

Hieran schließen wir die folgende Betrachtung: Zunächst sei bemerkt, daß diejenige Ebene, die in X auf s senkrecht steht, zur Seitenrißtafel senkrecht ist und also dort nur durch die Senkrechte zu s''' durch X''' dargestellt wird Da im Falle unserer Figur die wahre Länge von AX größer als die von XB ist, wollen wir mit C denjenigen Punkt auf AX bezeichnen, für den $CX = XB$ ist In der Umlegung $(C)'''$ im Seitenriß liegt der Punkt so, daß $(C)'''X''' = X'''(B)'''$ ist. Der Punkt C''' ergibt sich auf $A'''X'''$ durch das Fällen des Lotes von $(C)'''$ auf s''' Wenn man nun aus $C'''X'''$ und $X'''B'''$ als Seiten ein Parallelogramm bildet, liegt seine vierte Ecke D''' auf dem in X''' auf s''' errichteten Lot. In der Tat, wenn der Fußpunkt des Lotes von $(C)'''$ auf s''' mit M'''_c bezeichnet wird und wenn $X'''B'''$ über X''' hinaus verlängert $(C)'''M'''_c$ in Z''' trifft, ist $\triangle C'''Z'''X''' \sim \triangle D'''X'''B'''$, da $C'''X''' \parallel D'''B'''$ ist, $Z'''X'''$ und $X'''B'''$ auf einer Geraden liegen und $X'''M'''_c = X'''M'''_b$ ist Mithin ist $D'''X''' \parallel C'''Z'''$, d. h senkrecht zu s''', wie behauptet wurde. Erinnert man sich nun daran, daß das Lot zu s''' durch X''' die Projektion der zu s senkrechten Ebene auf die Seitenrißtafel ist, so bedeutet dies:

Wenn man auf XA von X aus die Strecke $XC = XB$ bis C aufträgt und aus den beiden gleichen Strecken CX und XB als aufeinanderfolgenden Seiten den Rhombus $CXBD$ herstellt, liegt D in der in X auf s senkrecht stehenden Ebene. Die Diagonale XD des Rhombus teilt aber den Winkel CXB oder also den Winkel AXB in gleiche Teile. Daher ergibt sich der Satz: Der kürzeste Weg AXB von A über s nach B ist so beschaffen, daß diejenige Gerade, die den $\sphericalangle AXB$ an der Knickstelle X in gleiche Teile teilt, zur Geraden s senkrecht ist.

237. Übungen. Die Lösungen der folgenden Aufgaben sollen im Grundriß und Aufriß durchgeführt werden.

1) Gegeben seien zwei Ebenen E_1 und E_2, gesucht diejenigen Ebenen, die ihre Winkel in gleiche Teile zerlegen. Man bestimmt die Schnitt-

gerade s von E_1 und E_2 (Nr. 200) und errichtet in einem Punkte S von s die zu s senkrechte Ebene E (Nr. 202). Sie wird E_1 und E_2 in den Schenkeln a_1 und a_2 des zu teilenden Winkels schneiden (Nr 200). Um die Teilung vorzunehmen, hat man die Ebene E um eine ihrer Höhenlinien in die zur Grundrißtafel parallele Lage zu drehen (Nr 205) Nachher muß man zur ursprünglichen Lage zurückkehren.

2) Von einem geraden Prisma sei die Grundfläche als regelmäßiges Vieleck gegeben, ferner sei die Länge der Höhe gegeben. Man soll Grundriß und Aufriß des Prismas in allgemeiner Lage zeichnen. Zunächst zeichnet man das Vieleck in allgemeiner Lage (Nr. 205), dann errichtet man in einem Eckpunkt das Lot auf seine Ebene (Nr. 203) und macht es gleich der gegebenen Höhe (Nr. 204).

3) Insbesondere soll ein Würfel in allgemeiner Lage gezeichnet werden. Entweder wie in 2) oder so: Durch einen Punkt P zieht man eine Gerade a, errichtet darauf in P die senkrechte Ebene (Nr. 202), wählt in ihr eine Gerade b von a aus beliebig und errichtet in P auf die Ebene (a, b) das Lot c (Nr. 203). Dann bilden a, b, c ein rechtwinkliges Achsenkreuz in allgemeiner Lage Auf die Achsen hat man die Würfelkante von P aus aufzutragen (Nr. 204) Ein drittes Verfahren wurde in Nr. 216 unter 5) angegeben

4) Die einem gegebenen Vierflach eingeschriebene Kugel zu bestimmen Hierbei ist Aufgabe 1) dreimal anzuwenden Man kann aber auch das Vierflach zuerst so weit drehen, bis eine seiner Ebenen zur Grundrißtafel parallel wird (Nr 229), weil dann die Teilung der an dieser Ebene liegenden Ebenenwinkel des Vierflachs bequemer ist.

5) Gesucht eine von einem gegebenen Punkt S ausgehende Gerade c, die mit zwei gegebenen von S ausgehenden Geraden a und b gegebene Winkel α und β bildet. Würde man eine Strecke r von S aus auf c bis T abtragen und von T die Lote TX und TY auf a und b fallen, so wäre $SX = r\cos\alpha$, $SY = r\cos\beta$. Indem man r beliebig annimmt, kann man also X und Y auf a und b ermitteln (Nr. 204) Nun muß T auf derjenigen Geraden s liegen, in der sich die zu a bzw b senkrechten Ebenen durch X bzw. Y (Nr. 202) schneiden (Nr. 200) Außerdem muß T von S die Entfernung r haben, d h. T ist ein Schnittpunkt von s mit der Kugel um S vom Radius r (Nr. 212)

6) Gegeben sei die gemeinsame Spitze S zweier Rotationskegel, ferner seien ihre Achsen a und b und die Winkel α und β gegeben, die diese Achsen mit den Mantellinien bilden. Gesucht die gemeinsamen Mantellinien beider Kegel. Diese Aufgabe kommt auf die vorhergehende zurück.

7) Von einem gegebenen Punkt S die gemeinsamen Tangenten zweier gegebener Kugeln zu ziehen. Auch diese Aufgabe kommt auf Aufgabe 5 zurück.

8) Gegeben zwei windschiefe Geraden a und b und zwei Winkel α und β. Gesucht eine Gerade, die a und b unter den Winkeln α und β schneidet. Indem man die gegebenen Geraden durch zwei sich schneidende ersetzt, kann man nach 5) die Richtung der gesuchten Geraden bestimmen. Weiterhin verfährt man ähnlich wie in Nr. 228.

§ 4. Aufgaben, die sich auf die Lage zu den Tafeln beziehen.

238. Neigungen einer Geraden zu den Tafeln. Zu den im letzten Paragraphen behandelten Aufgaben, die sich auf Gebilde von ganz beliebiger Lage zu den Tafeln bezogen, kommt jetzt noch eine Reihe von verhaltnismaßig einfachen Aufgaben, bei denen die Lage zu den Tafeln von wesentlicher Bedeutung ist. Es handelt sich um Fragen, die gerade diese Lagerung betreffen, so daß für sie die in Nr 217 gemachte allgemeine Bemerkung uber die Teilung der Lösung einer Aufgabe in zwei Schritte nicht zutrifft

Eine erste Aufgabe ist, die spitzen Winkel α und β zu bestimmen, die eine durch ihre Projektionen gegebene Gerade mit den Tafeln bildet Hinsichtlich des Winkels α ist diese Aufgabe schon in Fig 296 a und b von Nr 204 gelost worden, denn hier ist die Ebene, durch die man die Strecke AB auf die Grundrißtafel projiziert, im Fall a parallel zur Grundrißtafel und im Fall b parallel zur Aufrißtafel gemacht worden, und da diese Ebene den Winkel α enthalt, erscheint er in beiden Fallen nach der Drehung in wahrer Große Entsprechend kann man verfahren, um β zu finden, indem man die Rollen des Grundrisses und Aufrisses vertauscht Wie schon damals bemerkt wurde, ist das Verfahren im Fall b vorzuziehen.

Man kann die durch ihre Projektionen gegebene Gerade durch die Parallele von einem Punkt A der Projektionsachse aus ersetzen Dann stellen sich die Konstruktionen so dar, wie es Fig 328 zeigt Durch Drehung um die in A auf der Grundrißtafel senkrecht stehende Gerade gelangt AB nach $A(B)$ in der Aufrißtafel, durch Drehung um die in A auf der Aufrißtafel senkrecht stehende Gerade nach $A[B]$ in der Grundrißtafel, so daß die Projektionsachse mit $A(B)$ den Winkel α und mit $A[B]$ den Winkel β bildet Außerdem stellt sowohl $A(B)$ als auch $A[B]$ die wahre Lange w der Strecke AB dar, d. h. (B) und $[B]$ liegen auf einem Kreis um A

Deshalb laßt sich im Anschluß hieran sofort die umgekehrte Aufgabe losen Die Richtung derjenigen Geraden zu bestimmen, die mit den Tafeln gegebene spitze Winkel α und β bilden Man kann einen Punkt A einer Geraden von der gesuchten Richtung irgendwo auf der Achse annehmen und sich vorstellen, auf der Geraden sei eine beliebig lange Strecke $w = AB$ abgetragen. Da α und β gegeben sind, setzt man also diese Winkel in A, wie es Fig. 328 zeigt, an die Achse an und schneidet ihre freien Schenkel mit einem Kreis vom beliebigen Radius w um A in (B) im Aufriß und $[B]$ im Grundriß. Indem man dann von (B) und $[B]$ die Lote auf die Achse fällt und durch ihre Fußpunkte die Kreise um A legt sowie durch $[B]$ und (B) die Parallelen zur Achse zieht, bekommt man als Schnittpunkte der Kreise und Parallelen die Projektionen B' und B'' des Endpunktes einer Strecke AB, die mit den Tafeln die Winkel α und β bildet. Als Probe der Richtigkeit der Zeichnung dient, daß B' und B'' auf einem Lot zur Achse liegen müssen.

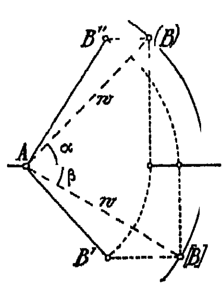


Fig 328.

Man erkennt leicht, unter welchen Bedingungen die Aufgabe keine Lösung hat: Die zuletzt gezogenen Kreise haben die Radien $w\cos\alpha$ und $w\cos\beta$. Ferner hat $[B]$ von der Achse den Abstand $w\sin\beta$ und (B) den Abstand $w\sin\alpha$. Die Schnittpunkte B' und B'' sind also nur dann vorhanden, wenn

$$w\cos\alpha \geqq w\sin\beta \qquad \text{und} \qquad w\cos\beta \geqq w\sin\alpha$$

ist. Beide Bedingungen besagen dasselbe, namlich $\cos^2\alpha \geqq \sin^2\beta$ oder

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta \geqq 1\,.$$

Im Falle $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$, d. h. wenn α und β Komplementwinkel sind, werden beide Projektionen der Geraden AB zur Achse senkrecht. Die Quadratsumme der Kosinus der Neigungswinkel einer Geraden zu den Tafeln ist demnach im allgemeinen größer als Eins und nur dann gleich Eins, wenn die Gerade eine zur Projektionsachse senkrechte Richtung hat.

239. Neigungen einer Ebene zu den Tafeln. Die spitzen Winkel, die eine Ebene mit den Tafeln bildet, sind die Komplemente der spitzen Winkel, die eine zur Ebene senkrechte Gerade mit den Tafeln bildet (Nr. 226). Die Aufgabe, die Neigungen einer Ebene zu den Tafeln zu ermitteln, kann man daher nach Nr. 202 auf die in der letzten Nummer behandelte zurückführen.

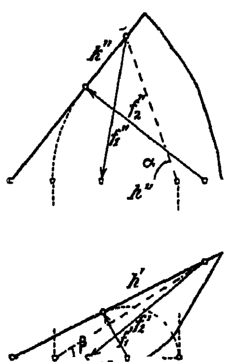


Fig 329

Man kann aber auch die Fallinien der Ebene gegenüber den Tafeln benutzen Die Fallinien der Ebene gegenüber der Grundrißtafel (Nr 17) sind in Wirklichkeit und im Grundriß zu den Hohenlinien senkrecht und bilden mit der Grundrißtafel den Winkel α zwischen Ebene und Tafel Ist die Ebene durch ein Paar Hauptlinien h und k gegeben, so findet man leicht eine Fallinie f_1, deren Winkel α mit der Grundrißtafel sich durch eine Drehung ergibt, siehe Fig. 329 Unter einer Falllinie gegenüber der Aufrißtafel ist eine Gerade f_2 der Ebene zu verstehen, die zu den Hauptlinien zweiter Art senkrecht ist, so daß $f_2'' \perp k''$ ist. Sie bildet mit der Aufrißtafel den Winkel β zwischen Ebene und Tafel. Auch dieser Winkel ist in Fig. 329 bestimmt worden.

Soll die Stellung derjenigen Ebenen ermittelt werden, die mit den Tafeln gegebene spitze Winkel α und β bilden, so kann man so vorgehen, daß man zunachst nach Nr. 238 die Richtung derjenigen Geraden bestimmt, die mit den Tafeln die Komplementwinkel bilden. Zu dieser Richtung ist die gesuchte Stellung senkrecht. Da der Sinus eines Winkels gleich dem Kosinus des Komplementwinkels ist, ergibt sich daraus, daß die Aufgabe nur dann lösbar ist, wenn

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta \geqq 1$$

ist. Im Falle $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1$ ist die gesuchte Stellung zur Projektionsachse parallel.

Wir geben noch einen anderen Weg an, die Aufgabe zu lösen, durch einen beliebig gegebenen Punkt P diejenigen Ebenen zu

legen, die mit den Tafeln gegebene spitze Winkel α und β bilden: Alle Ebenen durch P, die zur Grundrißtafel unter dem Winkel α geneigt sind, umhüllen einen Böschungskegel mit der Spitze P, dessen Grundkreis auf der Grundrißtafel liegt und den Mittelpunkt P' hat (Nr. 31). Seinen Radius findet man sofort, siehe Fig. 330. Ebenso umhüllen alle unter dem Winkel β zur Aufrißtafel geneigten Ebenen durch P einen Böschungskegel, dessen Grundkreis auf der Aufrißtafel liegt und den Mittelpunkt P'' hat Nun handelt es sich darum, die gemeinsamen Tangentialebenen dieser beiden geraden Kreiskegel mit derselben Spitze P zu bestimmen. Nach Nr. 234 beschreiben wir jedem Kegel eine Kugel ein, etwa diejenige, die ihn langs seines Grundkreises beruhrt Dies und die weitere Konstruktion führt man aus einem sogleich anzugebenden

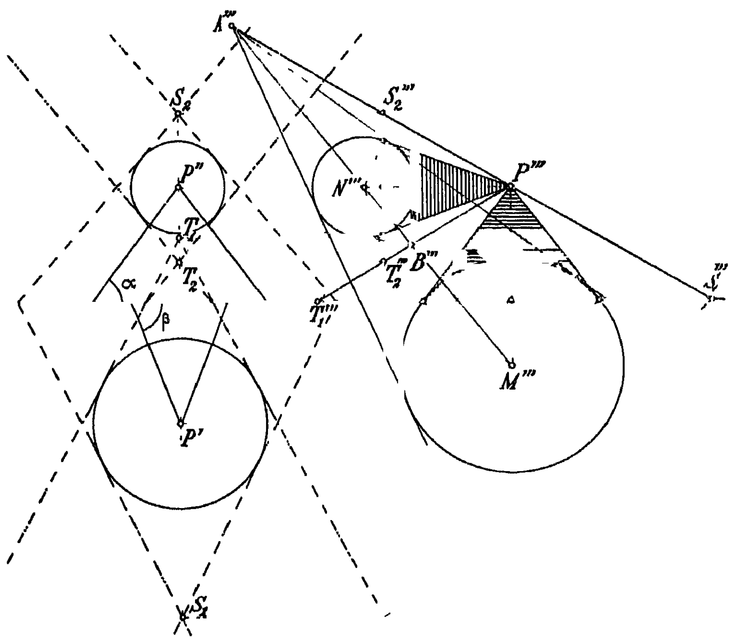


Fig 330.

Grunde im Kreuzriß aus, wo M''' und N''' die Projektionen der Kugelmitten sind. Die Ähnlichkeitspunkte A und B der Kugeln haben hier die Projektionen A''' und B''', und die gesuchten gemeinsamen Tangentialebenen beider Kegel enthalten entweder die Gerade PA oder die Gerade PB. Diese Geraden kreuzen die alte Projektionsachse senkrecht, und dies ist der Grund dafür, daß man den Kreuzriß benutzt (Nr. 211). Die Spurpunkte S_1, S_2 und T_1, T_2 von PA und PB im Grundriß und Aufriß findet man sofort aus ihren Seitenrisse S_1''', S_2''' und T_1''', T_2'''. Die Tangentialebenen durch PA schneiden die Grundrißtafel in den von S_1 an den Böschungskreis im Grundriß gehenden Tangenten und die Aufrißtafel in den von S_2 an den Böschungskreis im Aufriß gehenden Tangenten. Mithin sind diese Tangenten die Spurgeraden von Ebenen der gesuchten Art, und mithin müssen sie sich zu je zweien auf der Projektionsachse schneiden (Nr. 201). Benutzt man

statt der Geraden PA die Gerade PB, so sind statt S_1 und S_2 die Punkte T_1 und T_2 zu verwenden. Insgesamt ergeben sich in Fig. 330 vier Ebenen von der gesuchten Art. Ihre Spurgeraden sind durch Strich-Punkt-Punkt-Linien dargestellt.

240. Neigungen zur Projektionsachse. Um den spitzen Winkel γ zu bestimmen, den eine beliebig gegebene Gerade mit der Projektionsachse bildet, verschiebt man die Gerade parallel, bis sie die Achse in einem Punkt A schneidet. Die neue Gerade, auf der man irgendwo einen Punkt B annimmt, dreht man dann um die Achse in die Grundrißtafel. Der Drehkreis von B hat als Mittelpunkt den Schnittpunkt M der Achse mit $B'B''$, und sein Radius ist die Hypotenuse zu den Katheten MB' und MB''

Der spitze Winkel, den eine gegebene Ebene mit der Projektionsachse bildet, bestimmt man so· Man fällt von einem Punkt A der Achse das Lot auf die Ebene und stellt nach dem Vorhergehenden fest, welchen spitzen Winkel es mit der Achse bildet Das Komplement dieses Winkels ist der gesuchte Winkel.

241. Die Deckebene[1]. Eine Folge davon, daß man die beiden Tafeln nicht in ihrer ursprünglichen gegenseitigen Lage läßt, sondern in eine Doppelebene umlegt (Nr. 196), ist, daß der Grundriß P' eines Punktes P mit seinem Aufriß P'' zur Deckung kommen kann Tritt dies oberhalb der Projektionsachse ein, so heißt dies, daß der Punkt P gerade so hoch über der Grundrißtafel wie hinter der Aufrißtafel liegt, tritt es unter der Projektionsachse ein, so heißt es, daß der Punkt P gerade so tief unter der Grundrißtafel wie vor der Aufrißtafel liegt Am klarsten sieht man dies durch Benutzung eines Kreuzrisses, siehe den Kreuzriß in Fig. 331, wo P ein Punkt von der ersten Art, Q ein Punkt von der zweiten Art ist.

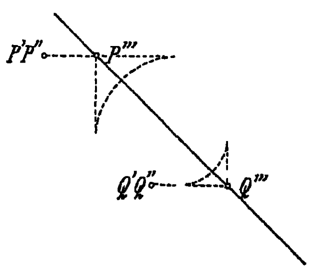


Fig 331

Hieraus folgt: Der Grundriß und Aufriß eines Punktes decken sich somit dann, aber auch nur dann, wenn der Punkt in derjenigen Ebene liegt, die durch die Achse geht und den hinteren oberen und vorderen unteren rechten Winkel der beiden Tafeln in gleiche Teile zerlegt. Diese Ebene heißt die Deckebene; ihre Punkte werden Deckpunkte des Grund- und Aufrisses genannt. Ist eine Gerade g gegeben, so wird sie im allgemeinen die Deckebene in einem Punkte treffen. Seine zusammenfallenden Projektionen liegen im Schnittpunkt von g' und g''. Eine Gerade g ist zur Deckebene parallel, wenn $g' \parallel g''$ ist. Eine Gerade g liegt in der Deckebene, wenn g' mit g'' zusammenfällt. Dann heißt sie eine Deckgerade des Grund- und Aufrisses.

Eine Ebene $\mathfrak{E}$ schneidet die Deckebene in einer Deckgeraden s. Ist die Ebene durch ein Dreieck ABC gegeben, so schneiden die Seiten

[1]) In Nr. 241 wird der Inhalt von Nr. 120 und 121 des zweiten Kapitels als bekannt vorausgesetzt.

BC, CA, AB die Deckebene in Deckpunkten X, Y, Z. Also liegen die Schnittpunkte der Geradenpaare $B'C'$, $B''C''$ — $C'A'$, $C''A''$ — AB'', $A''B''$ auf der Geraden s, siehe Fig. 332. Wird eine Gerade g in der Ebene beliebig angenommen, so liegt der Schnittpunkt von g' und g'' ebenfalls auf der Deckgeraden.

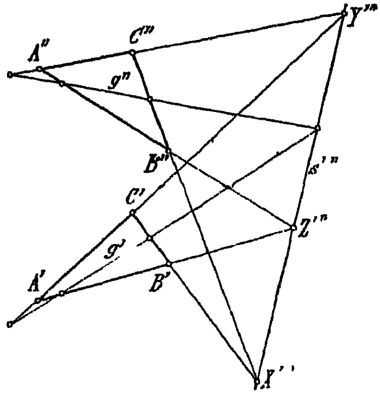


Fig 332

Infolge hiervon besteht zwischen der Grundriß- und Aufrißprojektion irgendeiner Figur in der betrachteten Ebene E eine Affinität in der Doppelebene (Nr 121) Denn es gelten die Gesetze

Erstens: Ein Grundrißpunkt fällt mit dem zugehörigen Aufrißpunkt dann, aber auch nur dann zusammen, wenn er auf der Deckgeraden s' (oder s'') liegt

Zweitens Jeder Geraden g' entspricht eine Gerade g''.

Drittens Parallelen Geraden g_1' und g_2' entsprechen parallele Geraden g_1'' und g_2'' Denn im Falle $g_1' \parallel g_2'$ ist $g_1 \parallel g_2$, also auch $g_1'' \parallel g_2''$

Mithin sind die drei in Nr. 120 aufgestellten Gesetze der Affinität erfüllt. In Nr. 121 ergab sich, daß infolgedessen auch das vierte Gesetz gilt, wonach einander entsprechende Punkte auf parallelen Geraden liegen In der Tat liegen die Grund- und Aufrisse der Punkte der Ebene E auf den Loten zur Projektionsachse.

Zwischen den beiden Projektionen einer ebenen Figur in einer Ebene E besteht demnach eine Affinität, deren Achse von den zusammenfallenden Projektionen der Deckgeraden s der Ebene E, d h von der Projektion der Schnittgeraden s der Ebene E mit der Deckebene gebildet wird, während die Richtung der Affinität zur Projektionsachse senkrecht ist

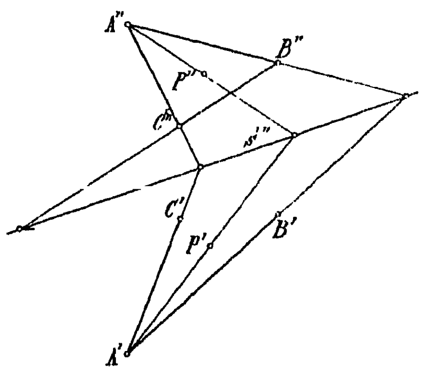


Fig 333

Dies gibt uns ein neues Mittel, zum Grundriß P' (oder Aufriß P'') eines Punktes P einer z. B. durch ein Dreieck ABC gegebenen Ebene den Aufriß P'' (oder Grundriß P') zu ermitteln (Nr. 198), siehe Fig. 333. Man zieht etwa $A'P'$ (oder $A''P''$) bis zum Schnitt mit $s'(s'')$ und verbindet den Schnittpunkt geradlinig mit A'' (oder A'). Auf dieser Geraden muß die gesuchte Projektion liegen.

Wenn die Ebene E durch ein Paar Hauptlinien h, k gegeben ist, bekommt man ihre Deckgerade als Verbindende der Schnittpunkte von h', h'' und k', k'', und man kann mit Hilfe der Deckgeraden statt wie in Fig. 301 von Nr. 205 den zu einem gegebenen Grundriß (Aufriß) eines ebenen Vielecks gehörigen Aufriß (Grundriß) auch wie in Fig. 334 ausfindig machen.

Die Deckgerade einer Ebene ist nur dann unbestimmt, wenn die Ebene selbst die Deckebene ist. Dieser Fall liegt z. B. vor, wenn eine Ebene durch ein Dreieck ABC derartig gegeben wird, daß A' mit A'', B' mit B'' und C' mit C'' zusammenliegt. Die wahre Gestalt dieses Dreiecks ergibt sich besonders leicht durch Umlegung um die Projektionsachse. Man braucht nur die Abstände der Punkte A', B', C' von der Achse im Verhältnis $\sqrt{2} : 1$ zu vergrößern, weil die Deckebene unter 45° zur Grundrißtafel geneigt ist.

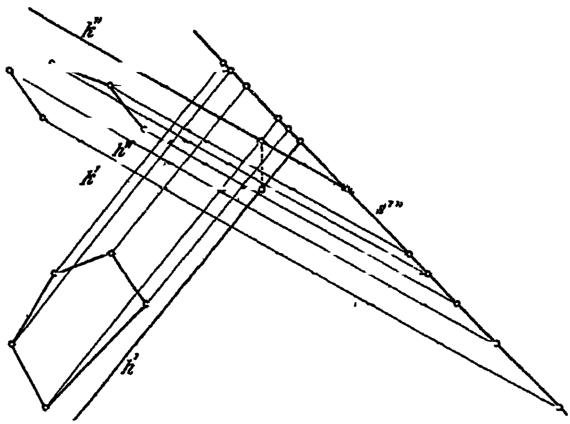


Fig 334

Anmerkung: Die Deckebene ist als Konstruktionsmittel wahrscheinlich zuerst durch Jean Baptiste Brasseur (geb 1802 zu Esch sur l'Alzette in Luxemburg, Professor der darstellenden Geometrie an der Universität Lüttich, gest. daselbst 1868) eingeführt worden. In seiner Abhandlung „Sur une nouvelle méthode d'application de la géométrie descriptive à la recherche des propriétés de l'étendue", gelesen 1853, Mém de l'Acad de Belgique, 29 Bd, Sonderdruck Brüssel 1855, S. 1—148, führte er auf S 7 die Deckebene unter dem Namen „plan bissecteur" ein Die zusammenfallenden Projektionen einer in der Deckebene gelegenen Figur nannte er eine „projection double"

242. Umriß-Mantellinien eines Rotationskegels und Rotationszylinders. Wenn der Mittelpunkt einer Kugel der Deckebene angehört, liegen die Umrisse u' und v'' der Kugel im Grund- und Aufriß aufeinander Dabei ist im Auge zu behalten, daß der Aufriß u'' desjenigen Großkreises u der Kugel, der u' als Grundriß hat, durch den zur Projektionsachse parallelen Durchmesser von v'' dargestellt wird, ebenso der Grundriß v' desjenigen Großkreises v, der v'' als Aufriß hat, durch den zur Achse parallelen Durchmesser von u' (Nr. 210). Mithin fallen auch u'' und v' zusammen, siehe Fig. 335. Der Grundriß P' und Aufriß P'' eines Punktes P der betrachteten Kugel stehen dabei in den in der Figur dargestellten Beziehungen zu einander. Die Projektionsachse ist irgendeine zu u'' (oder v') parallele Gerade.

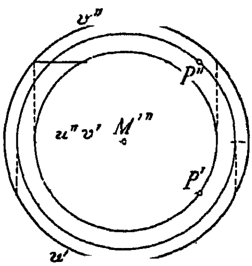


Fig 335

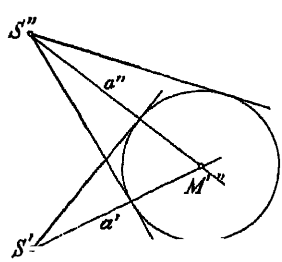


Fig 336.

Nun möge ein Rotationskegel mit der Achse a und Spitze S vorliegen. Die Achse a treffe die Deckebene in M, so daß M' und M'' im Schnittpunkt von a' und a'' liegen, siehe Fig. 336. Die dem Kegel eingeschriebene Kugel mit dem Mittelpunkt M gehört zu den soeben betrachteten Kugeln, d. h. ihre Umrisse fallen zusammen. Die Mantellinien des Kegels sind die

Tangenten von S an die Kugel. Mithin sind die Umriß-Mantellinien im Grundriß und die Umriß-Mantellinien im Aufriß die Tangenten von S' und S'' an den Umrißkreis. Hieraus ergibt sich ein einfaches Kennzeichen für die Umriß-Mantellinien eines Rotationskegels:

Sind S' und S'' die Projektionen der Spitze eines Rotationskegels, so können zwei von S' und S'' ausgehende Geradenpaare dann und nur dann die Umriß-Mantellinien des Kegels im Grundriß und Aufriß sein, wenn alle vier Geraden Tangenten eines und desselben Kreises sind.

Es kann aber vorkommen, daß S' oder S'' oder beide Punkte innerhalb des Kugelumrisses liegen. Dann hat der Kegel im Grundriß oder Aufriß oder in beiden Projektionen keine Umriß-Mantellinien (Nr. 94).

Im Fall eines Rotationszylinders ergibt sich der selbstverständliche Satz, daß die Umriß-Mantellinien im Grundriß und die im Aufriß je zwei parallele Geraden sind, deren Abstand voneinander gleich dem Durchmesser des Zylinders ist. Nur wenn der Zylinder auf einer der beiden Tafeln senkrecht steht, tritt an die Stelle der beiden Umriß-Mantellinien ein Kreis, dessen Durchmesser gleich dem des Zylinders ist.

243. Netz einer durch die Deckebene begrenzten Pyramide. Indem man den Kreuzriß anwendet, erkennt man leicht, daß der Abstand PQ eines Punktes P von der Deckebene gleich der mit $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ multiplizierten Strecke $P'P''$ ist, denn im Kreuzriß erscheint PQ als Strecke $P'''Q'''$ senkrecht zur Deckebene und in wahrer Länge, weil das Lot PQ zur Kreuzrißtafel parallel ist. Auch erhellt, daß der Grundriß und Aufriß des Fußpunktes Q dieses Lotes in der Mitte von $P'P''$ liegt.

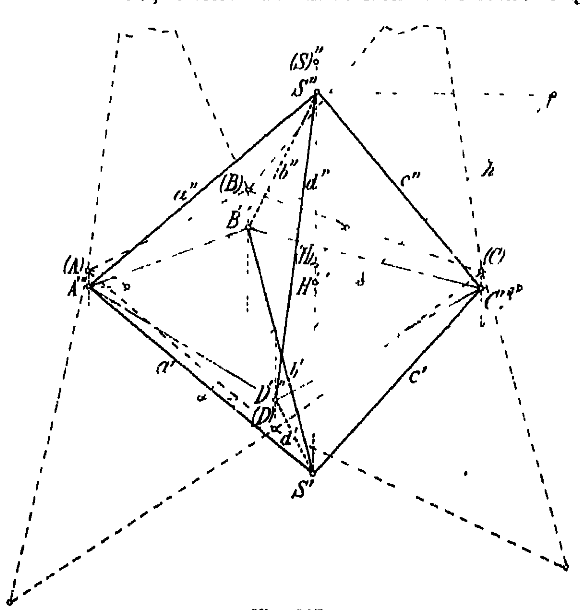


Fig. 337.

Hiervon machen wir eine Anwendung, um auf eine andere Art, als es in Nr. 229 geschah, das Netz einer Pyramide herzustellen. Die Pyramide sei im Grundriß und Aufriß durch ihre Spitze S und durch ihre von S ausgehenden Kanten a, b, c, d gegeben, indem wir uns hier auf eine vierseitige Pyramide beschränken. Die Kanten schneiden die Deckebene in Punkten A, B, C, D, deren Grund- und Aufrisse die Schnittpunkte von a', a'', von b', b'', von c', c'' und von d', d'' sind,

siehe Fig. 337. Der Fußpunkt H des Lotes von S auf die Deckebene hat seine Projektionen nach dem Vorhergehenden im Mittelpunkt von $S'S''$. Wir können nun das Viereck $ABCD$ als die Grundfläche der Pyramide und HS als ihre Höhe betrachten. Die wahre Gestalt der Grundfläche geht nach Nr. 241 hervor, wenn man die Entfernungen der Punkte A', B', C', D' von der Projektionsachse im Verhältnis $\sqrt{2}:1$ vergrößert, was leicht mit Hilfe eines Winkels von 45° zu bewerkstelligen ist. Außer dem so entstehenden Grundviereck $(A)(B)(C)(D)$ bestimmen wir auch die Lage (H) des Höhenfußpunktes H zu ihm, indem wir auch den Abstand des Punktes H' von der Achse im Verhältnis $\sqrt{2}:1$ vergrößern. Nunmehr ist die Pyramide in eine solche Lage gebracht worden, daß ihre Grundfläche $(A)(B)(C)(D)$ auf der Grundrißtafel liegt und der Höhenfußpunkt (H) bekannt ist. Außerdem wissen wir, daß die Höhe h dieser Pyramide gleich der Hälfte der mit $\sqrt{2}$ multiplizierten Strecke $S'S''$ ist, so daß man die Aufrißprojektion $(S)''$ der Spitze S der gedrehten Pyramide angeben kann. Infolgedessen sind alle Ausmessungen der Pyramide bekannt, so daß sich ihre Dreiecke um ihre Grundlinien in die Grundrißtafel umlegen lassen. Zu Fig. 337 ist noch zu bemerken: In beiden Projektionen ist hervorgehoben, welche Kanten sichtbar sind. Was das Grundviereck in der Deckebene betrifft, so wird hier die Entscheidung über die Sichtbarkeit verschieden ausfallen, je nachdem man die Projektion als Grundriß oder Aufriß auffaßt.

In ähnlicher Weise kann man auch andere Aufgaben der vorigen Paragraphen mit Hilfe der Deckebene auf eine neue Art lösen. Doch ist zu bemerken, daß die Deckpunkte und Deckgeraden des Grund- und Aufrisses sehr wohl unerreichbar sein können.

244. Übungen. 1) Durch eine gegebene Gerade diejenigen Ebenen zu legen, die mit der Grundrißtafel (oder mit der Aufrißtafel) einen gegebenen spitzen Winkel bilden (Nr. 32, 239).

2) Den kürzesten Abstand einer gegebenen Geraden von der Projektionsachse zu bestimmen (Nr. 228).

3) Ein gegebenes Vierflach senkrecht auf die Deckebene zu projizieren (Nr. 243). Man bestimme die wahre Gestalt der Projektion (Nr. 241) und die Höhen der Punkte des Vierflachs über der Deckebene. Alsdann zeichne man die Aufrißprojektion des Vierflachs für den Fall, wo die Deckebene mit dem starr daran geknüpft gedachten Vierflach um die Projektionsachse in die Grundrißtafel umgelegt wird.

4) Bestimmung des Netzes eines durch die Deckebene und durch eine zu ihr parallele Ebene begrenzten Prismas (Nr. 243).

§ 5. Krumme Gebilde im Grundriß und Aufriß.

245. Grundriß und Aufriß des Kreises. Im Raume wird ein Kreis durch die Angabe seiner Ebene oder Achse g, seines Mittelpunktes M und der Länge seines Radius r bestimmt (Nr. 88). Grundriß und Aufriß des Kreises sind Ellipsen (Nr. 72). Die Hauptachsen dieser Ellipsen sind die Projektionen der zu den betreffenden Tafeln parallelen Durchmesser, also derjenigen Durchmesser AB und CD des Kreises, die auf den durch M gehenden Hauptlinien h und k der Kreisebene liegen.

Demnach liegt die Hauptachse $A'B'$ der Grundrißellipse auf h' und die Hauptachse $C''D''$ der Aufrißellipse auf k'', und beide haben dieselbe Länge wie der Kreisdurchmesser Oder auch Die Hauptachse der Grundrißellipse ist zur Grundrißprojektion, die der Aufrißellipse zur Aufrißprojektion der Kreisachse g senkrecht und gleich dem wahren Kreisdurchmesser Der Aufriß $A''B''$ sowie der Grundriß $C'D'$ sind zur Projektionsachse parallel Somit ist von jeder der beiden Ellipsen außer der Hauptachse noch ein Durchmesser bekannt, siehe Fig 338 Die Längen ihrer halben Nebenachsen findet man also mit Hilfe der Punkte C' bzw A'' nach Fig 116 von Nr 83. Augenscheinlich liegen beide Ellipsen zwischen zwei gemeinsamen und zur Projektionsachse senkrechten Tangenten

Die Hauptachsen der beiden Ellipsen sind hiernach Projektionen zweier verschiedener Kreisdurchmesser, auch sind weder $A'B'$ und $C'D'$ noch $A''B''$ und $C''D''$ zueinander konjugiert Vielmehr ist der zu $A'B'$ konjugierte Durchmesser $X'Y'$ der Grundrißellipse, d h die Nebenachse dieser Ellipse, der Grundriß desjenigen Kreisdurchmessers, der vom höchsten Punkt X zum tiefsten Punkt Y des Kreises geht, nämlich auf der durch M verlaufenden Fallinie der Kreisebene liegt Entsprechend ist der zu $C''D''$ konjugierte Durchmesser $U''V''$ der Aufrißellipse, d h die Nebenachse dieser Ellipse, der Aufriß desjenigen Kreisdurchmessers, der vom vordersten Punkt U zum hintersten Punkt V des Kreises geht Man kann die Aufrisse X'', Y'' sowie die Grundrisse U', V' ohne Benutzung der gezeichneten Ellipsen mittels der durch X, Y, U, V gehenden Hauptlinien der Kreisebene ermitteln (Nr 201), wie es in Fig 338 für X'' und U' gezeigt ist Die Grundrißellipse hat in U' und V' zur Projektionsachse parallele Tangenten, und das sind die Grundrisse der zur Aufrißtafel parallelen Kreistangenten Die Aufrißellipse hat in X'' und Y'' zur Projektionsachse parallele Tangenten, und das sind die Aufrisse der zur Grundrißtafel parallelen Kreistangenten.

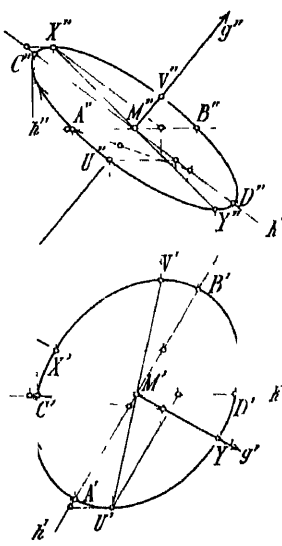


Fig 338

Liegt die Grundrißprojektion eines Kreises vor und kennt man die Höhe seines Mittelpunktes M, so kann man auch die Aufrißprojektion finden. Denn wenn a und b die Halbachsen der Grundrißellipse sind, ist $b : a$ der Kosinus des Winkels, den die Kreisebene mit der Grundrißtafel bildet (Nr. 88), d. h. die Neigung der Kreisebene ist bekannt. Da man nun außerdem den Punkt M und die durch M gehende Höhenlinie h kennt, nämlich die Parallele zur Hauptachse der Grundrißellipse, so leuchtet ein, daß der Kreis eine bestimmte Lage im Raume hat, mithin seine Aufrißprojektion ermittelt werden kann. Allerdings gibt es zwei verschiedene Kreise mit derselben Grundrißprojektion und demselben Mittelpunkt M, weil der

Winkel seiner Ebene mit der Grundrißtafel durch den Supplementwinkel ersetzt werden kann. Um die Aufrißprojektion des Kreises aus dem gegebenen Grundriß und dem gegebenen Mittelpunkt M zu gewinnen, beachte man, daß A'', B'' ohne weiteres bekannt sind und C'' so hoch über bzw. so tief unter M'' liegt, wie es sich als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ergibt, dessen dieser Kathete gegenüberliegender Winkel α ist, während die α anliegende Kathete der aus dem Grundriß zu entnehmende seitliche Abstand des Punktes C von AB ist.

Zu jedem Punkt P' der Grundrißellipse gehört ein Punkt P'' der Aufrißellipse. Allerdings schneidet das Lot von P' auf die Projektionsachse die Aufrißellipse an zwei Stellen, aber welche zu nehmen ist, erkennt man sofort, da der Grundriß zeigt, welchem der vier Bogenstücke AC, CB, BD, DA der Kreispunkt P angehört.

Es ist jedoch ungenau, auf diese Art mittels der gezeichneten Ellipse die Projektionen eines Kreispunktes herzustellen, da der Zeichnung einer Ellipse immer Fehler anhaften, die beträchtlicher sind als diejenigen Fehler, die man bei der Anwendung der zeichnerischen Werkzeuge, des Lineals und Zirkels, macht. Man kann aber beliebige Punkte P' der Grundrißellipse nach Nr. 73 mittels konzentrischer Kreise ermitteln. Wir wissen, daß dies Verfahren darauf beruht, daß der Kreis, dessen senkrechte Projektion die Ellipse ist, gedreht wird, bis er zur Tafel parallel liegt. Beachtet man dies, so ist es leicht, den Zusammenhang zwischen den Konstruktionen von Punkten P' und P'' der beiden Ellipsen mittels konzentrischer Kreise herzustellen. Man habe etwa P' mittels des Radius $M'(P)'$ des großen Kreises aus den konzentrischen Kreisen im Grundriß gewonnen, siehe Fig. 339. Dieser Radius geht aus dem Radius $M'A'$ vermöge Drehung durch einen gewissen Winkel α hervor, und man hat zu beachten, daß derselbe Winkel α im Aufriß vorkommen muß. Hier also wird man von der Umlegung $[A]''$ aus den Bogen $A'(P)'$ des großen Kreises im Grundriß auf dem großen Kreis im Aufriß abtragen. Dadurch gelangt man zu einem Punkt $[P]''$, und aus ihm gewinnt man mittels der konzentrischen Kreise den zu P' gehörigen Aufriß P''. Selbstredend ist beim Auftragen des Bogens der Drehsinn zu beachten. In Fig. 338 hat der Kreis in den Projektionen gleichen, in Fig. 339 dagegen verschiedenen Drehsinn. In Fig. 338 zeigt er also in den Projektionen dieselbe Seite, in Fig. 339 verschiedene Seiten.

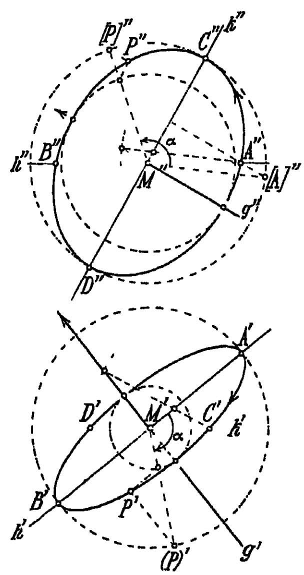


Fig. 339

Man kann nun auch leicht eine regelmäßige Teilung des Kreises, beginnend an einer Stelle P, in beiden Projektionen darstellen, indem man diese Teilung zunächst auf den beiden umgelegten Kreisen von $(P)'$ und $[P]''$ aus vollzieht, vgl. Fig. 120 von Nr. 88.

Im Raum ist ein Kreis auch dann völlig bestimmt, wenn man verlangt, ein gegebener Punkt P solle sich um eine gegebene

Achse drehen Der Mittelpunkt des Drehkreises und die Hauptlinien der Kreisebene findet man nach Nr. 203, und die Länge des Radius ergibt sich nach Nr 204. Es ist auch leicht, denjenigen Punkt Q zu ermitteln, nach dem P vermöge einer Drehung durch einen vorgeschriebenen Winkel gelangt Man unterwirft die umgelegten Kreisradien $M'(P)'$ und $M''[P]''$ in Fig. 339 den Drehungen durch diesen Winkel.

Handelt es sich bei irgendeiner Aufgabe um die Ermittlung eines Kreises, so wird man zunächst seine Ebene noch nicht kennen. Deshalb erinnere man sich der Bemerkung von Nr. 88, wonach es darauf ankommt, den zur Tafel steilsten Durchmesser des Kreises zu suchen, also etwa den zur Grundrißtafel steilsten Kennt man ihn, so gibt seine Projektion die Nebenachse der Grundrißellipse, während seine Länge die Länge der Hauptachse ist. Die Aufrißprojektion des Kreises ist dann entweder in entsprechender Weise zu finden, indem man den gegenüber der Aufrißtafel steilsten Durchmesser des Kreises bestimmt, oder sie wird, wie es oben angedeutet wurde, aus der Grundrißprojektion abgeleitet Man kann die Vorschrift den steilsten Durchmesser zu suchen, etwas anders aussprechen

Der erste Schritt, um den steilsten Kreisdurchmesser zu finden, besteht darin, daß man diejenige lotrechte Ebene bestimmt, die durch die Kreisachse geht Denn diese Ebene enthält den steilsten Durchmesser. Es gibt viele Fälle, in denen diese Ebene dadurch ausfindig gemacht werden kann, daß man die Symmetrie der Gebilde berücksichtigt Man sagt bekanntlich, daß ein Gebilde eine Symmetrieebene habe, wenn es zu jedem Punkt P des Gebildes einen zweiten Punkt Q des Gebildes derart gibt, daß die Symmetrieebene zur Strecke PQ mittelsenkrecht ist Man sagt auch, daß das Gebilde an der Symmetrieebene in sich selbst gespiegelt werde Insbesondere hat nun der Kreis außer seiner eigenen Ebene unendlich viele Symmetrieebenen, nämlich alle Ebenen durch seine Achse Demnach ist die lotrechte Ebene durch die Kreisachse die einzige vorhandene lotrechte Symmetrieebene des Kreises Man tut deshalb gut, bei der Lösung einer den Kreis betreffenden Aufgabe zunächst danach zu suchen, ob etwa eine lotrechte Symmetrieebene des ganzen vorgelegten Gebildes vorhanden ist. Gibt es eine und hat man sie gefunden, so handelt es sich weiterhin darum, den in ihr gelegenen steilsten Kreisdurchmesser zu bekommen. Dies gelingt z. B dadurch, daß man den in dieser Ebene gelegenen Schnitt der gegebenen Gebilde herstellt und umlegt. So gingen wir in Nr 89—94 vor, als wir bloß auf eine Tafel senkrecht projizierten. Es gelingt aber auch dadurch, daß man die lotrechte Symmetrieebene oder, was auf dasselbe hinauskommt, irgendeine zu ihr parallele Ebene als Seitenrißtafel anwendet (Nr 207) Dann nämlich erscheint der Kreis in diesem Seitenriß als doppelt zählende Strecke, also in der einfachsten Form. Schließlich kann man auch so vorgehen, daß man alle gegebenen Gebilde einer Drehung um eine lotrechte Gerade unterwirft, bis die lotrechte Symmetrieebene zur Aufrißtafel parallel wird (Nr. 212). Nach der Drehung erscheint der Kreis im Aufriß als doppelt zählende Strecke. Aus dem Seitenriß bzw. aus diesem einfachen Aufriß leitet man dann den Grundriß ab.

246. Tangentialkegel der Kugel. Um zu zeigen, wie man durch Beachtung des soeben Auseinandergesetzten angeleitet wird, vorgelegte Aufgaben auf ganz bestimmtem Wege in Angriff zu nehmen und zu lösen, behandeln wir die schon in Nr 94 besprochene Aufgabe noch einmal, von einem Punkt S aus an eine Kugel den Tangentialkegel zu legen

Hier handelt es sich darum, den Kreis ausfindig zu machen, längs dessen der Kegel die Kugel berührt Gegeben ist die Kugel und der Punkt S. Für die Kugel ist jede Ebene durch ihren Mittelpunkt M eine Symmetrieebene, demnach ist die einzige lotrechte Symmetrieebene beider gegebener Gebilde, nämlich der Kugel und des Punktes S, die lotrechte Ebene durch M und S Mithin ist dies auch die lotrechte Symmetrieebene des gesuchten Kreises, d h in einem zu MS parallelen Seitenriß erscheint der Kreis als doppelt zählende Strecke, nämlich als die Sehne $X'''Y'''$, die die beiden Berührungspunkte der von S''' aus an den Kugelumriß gehenden Tangenten verbindet, siehe Fig 340 Der zugehörige Grundriß $X'Y'$ ist die Nebenachse der Grundrißellipse, senkrecht zu $M'S'$ liegt ihre Hauptachse $A'B'$, und zwar ist sie gleich dem Durchmesser des Kreises, d h gleich $X'''Y'''$ Was den Aufriß betrifft, so ist der des Kreismittelpunktes K ohne weiteres zu finden, und die Hauptachse der Aufrißellipse ist zu $M''S''$ dem Aufriß der Kreisachse, senkrecht Ihre Länge ist wieder gleich $X'''Y'''$ Da $A''B''$ zur Projektionsachse parallel ist, kennt man von der Aufrißellipse die Hauptachse und außerdem einen Durchmesser $A''B''$, so daß man die Nebenachse nach Nr. 83 findet. Man kann die Aufrißellipse aber auch dadurch ermitteln, daß man eine neue Grundrißtafel parallel zu $M''S''$ benutzt (Nr 213)

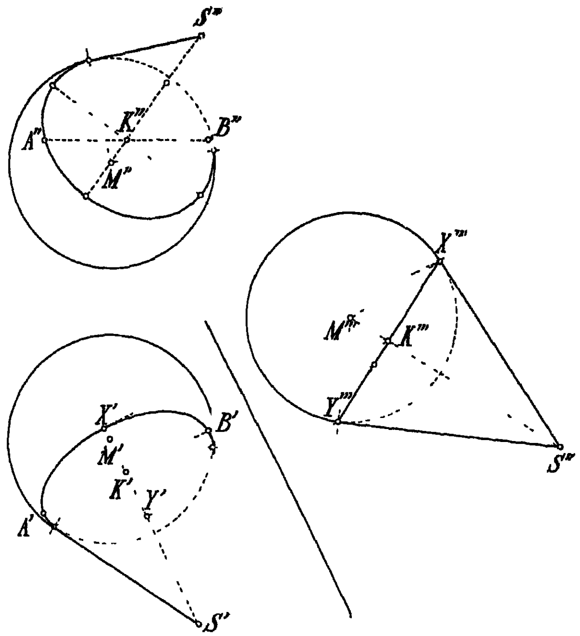


Fig 340

Dieselbe Aufgabe kann man auch dadurch lösen, daß man alles Gegebene, also die Kugel und den damit starr verbunden gedachten Punkt S, um ein Lot zur Grundrißtafel so weit dreht, bis MS zur Aufrißtafel parallel wird Am einfachsten ist es, die Drehachse durch die Kugelmitte M zu legen, weil dann die Kugel in sich gedreht wird. Der Kreis, in dem der Tangentialkegel vom gedrehten Punkt (S) aus die Kugel berührt, erscheint jetzt im Aufriß als doppelt zählende Strecke $(X)''(Y)''$,

siehe Fig. 341 Daraus leitet man die Nebenachse $(X)'(Y)'$ und Hauptachse $(A)'(B)'$ der Grundrißellipse ab. Dann dreht man wieder zurück. Der Aufriß wird aus dem Grundriß abgeleitet

Die in Nr. 89—93 in senkrechter Projektion auf eine einzige Tafel gelösten Aufgaben über Kugelkreise kann man ohne weiteres im Grund- und Aufriß erledigen Denn die damals gebrauchten Höhen über der Tafel sind jetzt als Höhen über der Grundrißtafel im Aufriß abzugreifen Die Aufrißzeichnungen führt man geradeso wie die Grundrißzeichnungen aus, an die Stelle der Höhen treten dabei die im Grundriß abzugreifenden Abstände von der Projektionsachse

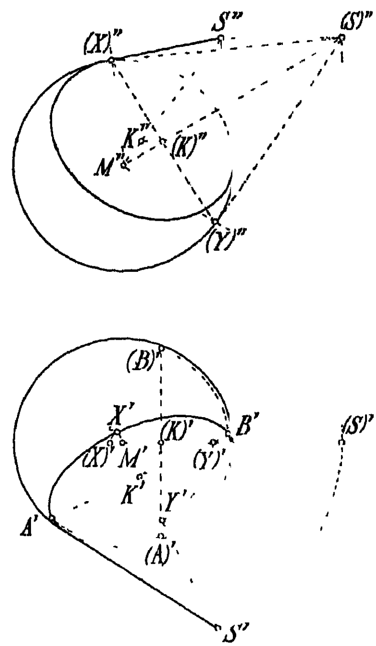


Fig 341

247. Ellipsen und elliptische Zylinder. Jede Parallelprojektion einer Ellipse ist wieder eine Ellipse (Nr. 139), daher stellt sich eine Ellipse im Grund- und Aufriß als Ellipse dar Man kann eine Ellipse im Raume durch ein Paar konjugierter Durchmesser AB und CD geben Sind diese im Grundriß und Aufriß dargestellt, so sind $A'B'$ und $C'D'$ konjugierte Durchmesser der Grundrißellipse und $A''B''$ und $C''D''$ konjugierte Durchmesser der Aufrißellipse Aus ihnen bekommt man die Achsen der beiden Bildellipsen (nach Nr. 85 oder 137) Hierbei sei hervorgehoben Während die Bildellipsen eines Kreises im Grund- und Aufriß allemal eine Hauptachse gleich dem wahren Kreisdurchmesser haben, gilt etwas Entsprechendes nicht mehr für die Bilder einer Ellipse Auch sind die Hauptachsen der Bildellipsen im allgemeinen nicht, wie es bei der Abbildung des Kreises der Fall war, die Projektionen der zu den Tafeln parallelen Durchmesser der wahren Ellipse Dagegen gilt auch hier der Satz, daß die Bilder einer Ellipse im Grund- und Aufriß zwei gemeinsame zur Projektionsachse senkrechte Tangenten haben

Hiernach geht man bei der Gewinnung der Bilder einer Ellipse anders vor als im Fall der Abbildung eines Kreises: Man wird meistens nicht in der Lage sein, geradezu so wie damals die Achsen der Bilder zu ermitteln, vielmehr nur konjugierte Durchmesser, aus denen man dann nachträglich die Achsen konstruiert.

Die Darstellung eines elliptischen Zylinders in beiden Projektionen ist mit dem Gesagten auch ohne weiteres erledigt. Der Schnitt eines elliptischen Zylinders mit einer Ebene E liefert wieder eine Ellipse (Nr. 139) Wenn die Grundellipse des Zylinders durch konjugierte Durchmesser AB und CD gegeben ist, sind die Schnittpunkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ der Ebene E mit den von A, B, C, D ausgehenden Mantellinien des Zylinders die Endpunkte konjugierter Durchmesser $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ der Schnittellipse.

Da jeder elliptische Zylinder nach Nr. 139 so geschnitten werden kann, daß ein Kreis hervorgeht, ergibt sich die Aufgabe, die **Kreisschnitte eines vorgelegten elliptischen Zylinders zu bestimmen.** Zunächst wird man einen zur Zylinderrichtung senkrechten Querschnitt herstellen. Er liefert nämlich eine Ellipse e, und der Zylinder kann nun als gerader elliptischer Zylinder mit der Grundellipse e aufgefaßt werden. Stellt man ihn mit der Grundellipse e auf die Grundrißtafel lotrecht hin, so handelt es sich dann noch darum, einen Kreis zu finden, dessen senkrechte Projektion auf die Grundrißtafel gerade die Ellipse e liefert. In Fig. 342 ist angenommen worden, der Zylinder sei durch konjugierte Durchmesser AB und CD seiner ursprünglichen

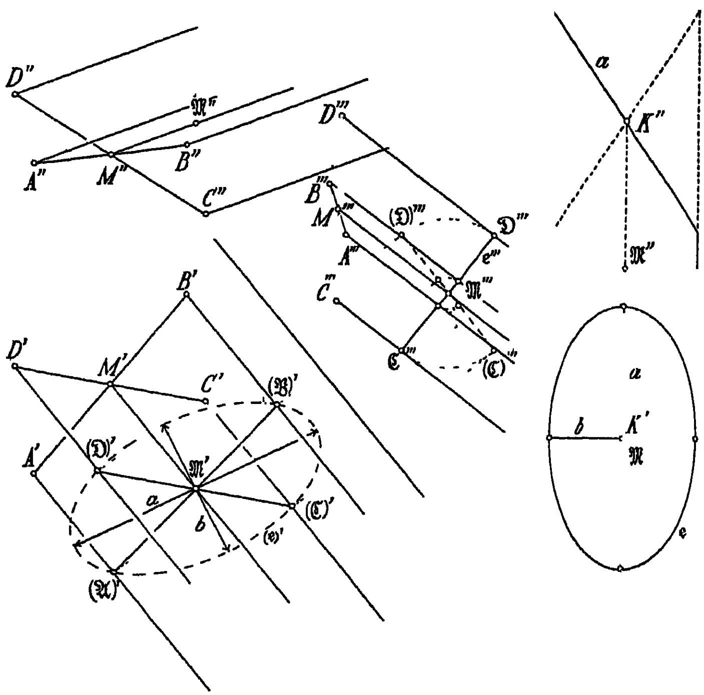


Fig 342

Grundellipse und durch seine Achse gegeben. Dann ist (wie beim Prisma in Fig. 322 von Nr. 229) ein zu seiner Achse paralleler Seitenriß benützt, in dem der Querschnitt e als doppelt zählende Strecke e''' erscheint Durch Drehung der Ebene des Querschnittes in die zur Grundrißtafel parallele Lage bekommt man die wahren Längen und gegenseitigen Lagen (𝔄)'(𝔅)' und (ℭ)'(𝔇)' konjugierter Durchmesser von e, so daß man die Achsen der Ellipse e bestimmen kann. Nun wird e, wie gesagt, auf die Grundrißtafel gelegt, und der Zylinder erscheint jetzt als lotrechter Zylinder mit der Grundellipse e. Man tut gut, e so zu legen, daß die Nebenachse $2b$ zur Aufrißtafel parallel wird, wie es in Fig. 342 rechts geschehen ist; dann sind die gesuchten Kreisschnittebenen zur Aufrißtafel senkrecht. Außerdem haben die Kreise den Radius a, so daß die Kreisschnitte im Aufriß sofort als

doppelt zählende Strecken gefunden werden können, indem man von dem Aufriß K'' eines Punktes K der Zylinderachse aus die Strecke a bis zu den äußersten Mantellinien einträgt Es ergeben sich zwei Stellungen für die Kreisebenen.

Wenn man einen elliptischen Zylinder oder, was auf dasselbe hinauskommt, einen beliebigen Kreiszylinder mittels einer Ebene durchschneidet, ergeben sich zwei Zylinderstumpfe Der Punkt 𝔐, in dem die Ebene die Achse des Zylinders schneidet, ist der Mittelpunkt der

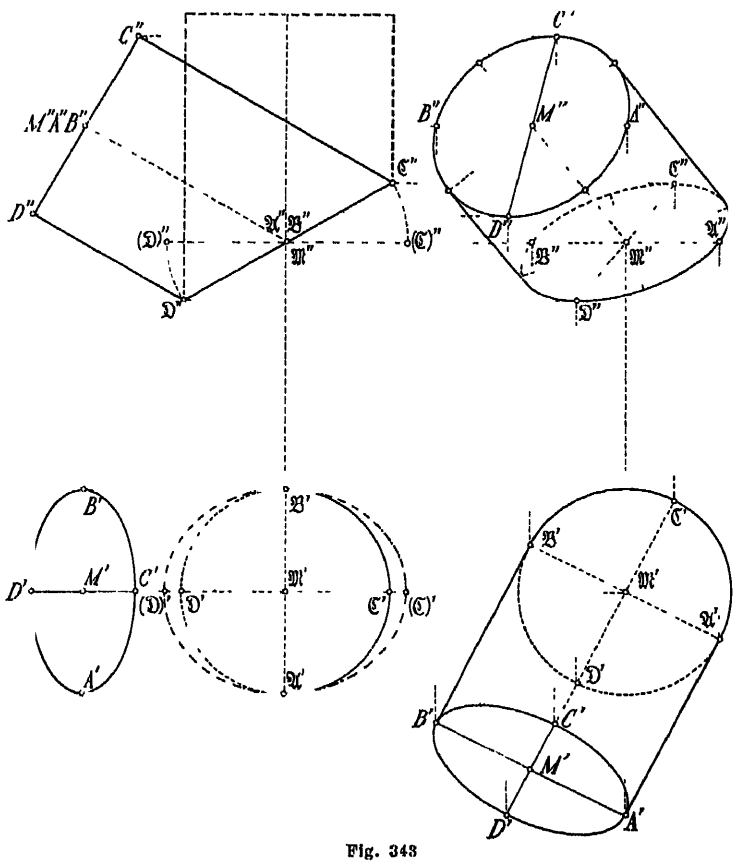


Fig. 343

Schnittellipse. Da diese Ellipse zwei Symmetriegeraden, ihre Haupt- und Nebenachse, hat, also durch eine Drehung um 180° um ihren Mittelpunkt in sich übergeht, erkennt man Wird der eine Zylinderstumpf um das in 𝔐 auf die Ellipsenebene errichtete Lot durch einen Winkel von 180° gedreht, so schließt er sich längs der Ellipse wieder überall an den anderen Stumpf an. Man gelangt so zu einem Zylinderknie.

In Fig. 343 ist ein Zylinderknie aus einem lotrecht auf der Grundrißtafel stehenden Rotationszylinder hergestellt worden. Linkerhand ist der Schnitt durch 𝔐 mittels einer zur Aufrißtafel senkrechten Ebene ausgeführt Die Schnittellipse erscheint deshalb im Aufriß als doppelt zählende Strecke ℭ''𝔇'', während ihr Grundriß der Grundkreis des

Zylinders ist Die Hauptachse der Schnittellipse ist $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, ihre Nebenachse $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Die wahre Gestalt der Ellipse ergibt sich im Grundriß, wenn man die Ebene der Ellipse um ihre Höhenlinie $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ in die zur Grundrißtafel parallele Lage dreht, siehe die Ellipse $\mathfrak{A}'(\mathfrak{C})'\mathfrak{B}'(\mathfrak{D})'$ In der Figur ist rechts das Zylinderknie nach einer Drehung um die Achse des unteren Stumpfes dargestellt Der Grundriß ist mit dem alten Grundriß kongruent, nur gedreht, und im Aufriß haben alle Punkte dieselben Höhen wie links, so daß sich die konjugierten Durchmesser $\mathfrak{A}''\mathfrak{B}''$ und $\mathfrak{C}''\mathfrak{D}''$ des Bildes der Schnittellipse im Aufriß sofort ergeben. Auch für das Bild des Endkreises des oberen Zylinderstumpfes findet man konjugierte Durchmesser $A''B''$ und $C''D''$. Aber man kann die Hauptachse dieser Ellipse geradezu bestimmen. sie ist senkrecht zu $M''\mathfrak{M}''$ und gleich dem wahren Zylinderdurchmesser (Nr 245) Die Umrißlinie des unteren Stumpfes verlauft auf der linken Seite hinter der Umrißlinie des oberen Stumpfes und wird also im Aufriß von ihr verdeckt, wahrend der Umriß des Knies rechts außer aus den beiden Umrißmantellinien der Zylinderstumpfe noch aus einem Stuck der Schnittellipse besteht

Die beiden Zylinderstumpfe haben zwei gemeinsame parallele, namlich lotrechte Tangentialebenen Nach Nr 140 schneiden sich zwei elliptische oder Kreiszylinder mit zwei gemeinsamen parallelen Tangentialebenen in zwei Ellipsen Die eine ist die des Knies, die andere geht erst hervor, wenn man beide Zylindermantel über diese Ellipse hinaus fortsetzt. Sie wird aber für das Knie nicht gebraucht

248. Angenäherte Ausmessung von Kreisbogen. Weil wir die Abwicklung von Zylinder- und Kegelmanteln zu besprechen beabsichtigen, werde vorweg eine dabei auftretende Aufgabe erledigt, namlich die Ausmessung gegebener Kreisbogen Man nennt diese Aufgabe auch die der Rektifikation der Kreisbogen, da es sich darum handelt, zu einem Kreisbogen eine gleichlange Strecke zu finden Man kann beweisen, daß es unmoglich ist, mit Hilfe des Lineals und Zirkels allein, wozu man auch noch Zeichendreiecke fügen mag, durch eine endliche Anzahl von Konstruktionen die wahre Lange eines vorgelegten Kreisbogens als Strecke darzustellen Deshalb muß man auf Naherungsverfahren ausgehen

Zunachst handle es sich darum, den ganzen Umfang eines Kreises vom Radius r durch eine Strecke darzustellen. Diese Strecke ist gleich $2\pi r$. Die Zahl $\pi = 3{,}14159$. hat man auf mehrere hundert Dezimalstellen berechnet Man kann daher den ganzen Kreisumfang außerordentlich genau als Strecke darstellen, wenn man den Radius r mit hinreichender Genauigkeit mißt und mit 2π multipliziert. Angenahert ist π gleich $3^1/_7$. Dieser Wert ist nur um $0{,}04\%$ zu groß und reicht daher fur gewöhnlich vollkommen aus. Man hat viele Verfahren ersonnen, durch Konstruktion den Umfang möglichst genau zu ermitteln, aber jedes zeichnerische Verfahren ist mit unvermeidlichen Ungenauigkeiten behaftet, und deshalb machen diese Ungenauigkeiten die zunachst große Annaherung an die wahre Lange zuschanden. Es lohnt sich daher nicht, auf solche Verfahren einzugehen.

Etwas anderes ist es, wenn es sich darum handelt, nicht den ganzen Kreisumfang, sondern einen gegebenen Kreisbogen angenahert als Strecke darzustellen Hier empfiehlt sich eine

einfache Konstruktion, die wir durch die folgende Betrachtung gewinnen:

Statt eines Kreisbogens nehmen wir zunachst eine Anzahl Seiten eines regelmaßigen Vielecks mit dem Mittelpunkt M an, siehe Fig 344. Eine Seite des Vielecks sei AB. Drehen wir alle anderen Seiten um ihre Endpunkte herum, bis sie auf der Geraden AB liegen, d h. wickeln wir den Umfang des Vielecks auf die Gerade AB ab, so ergeben sich auf dieser Geraden Punkte, die den Ecken des Vielecks entsprechen Wenn nun einander entsprechende Ecken des Vielecks und der Geraden durch gerade Linien verbunden werden, beobachtet man, daß diese, gehorig verlangert, nahezu durch einen gemeinsamen Punkt gehen Wir suchen jetzt insbesondere die Lage desjenigen Punktes O, in dem das Lot MT von M auf AB die Gerade CD schneidet, vermoge deren die nachsten einander entsprechenden Punkte C und D verbunden werden Da $BC = BD$ ist, teilt die Hohe BE des Dreiecks CBD den Winkel bei B in gleiche Teile Andererseits teilt MB den Supplementwinkel dieses Winkels in gleiche Teile, so daß $MB \perp BE$, mithin $MB \parallel DC$ ist Da nun $TC = 3\,TB$ ist, muß also auch $TO = 3\,TM$ sein

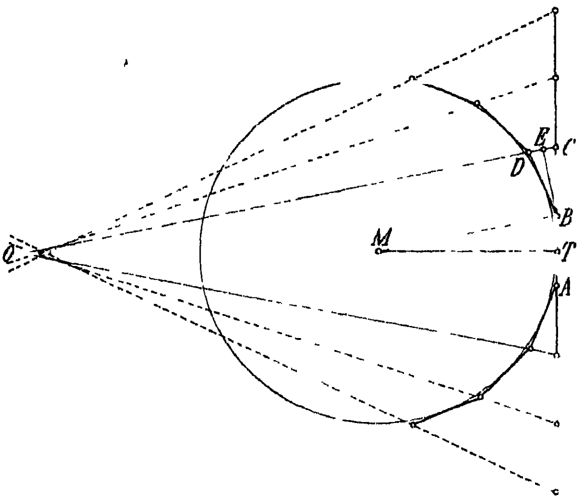


Fig 344

Nun ersetzen wir das regelmaßige Vieleck durch einen Kreisbogen AB mit der Kreismitte M. Die Mitte des Bogens sei T, siehe Fig 345 Auf der Geraden TM werde O so bestimmt, daß O auf derselben Seite von T wie M liegt und $TO = 3\,TM$ ist Aus dem Vorhergehenden schließen wir Ist der Bogen AB sehr kurz, so wird der Bogen mit sehr großer Annaherung gleich demjenigen Stuck A_0B_0 der Tangente von T sein, das von den Geraden OA und OB ausgeschnitten wird. Der Grad der Genauigkeit laßt sich rechnerisch feststellen, und dies führt zu einem überraschend gunstigen Ergebnis. Wir bezeichnen den halben Zentriwinkel AMB mit x, den Kreisradius sehen wir als Langeneinheit an. Das Lot von A auf MT habe den Fußpunkt C Dann ist $MC = \cos x$, $CA = \sin x$. Aus der Proportion

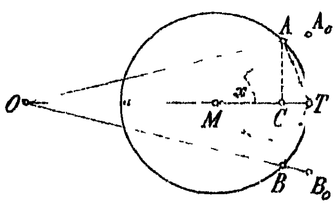


Fig 345

$$\frac{TA_0}{CA} = \frac{OT}{OC} = \frac{3}{2 + MC}$$

folgt nun

$$TA_0 = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}.$$

Wenn wir den Zentriwinkel TMA nicht in Geraden, sondern durch sein sogenanntes Bogenmaß messen, d. h. durch den Bogen, den er auf dem Kreis vom Radius Eins um seinen Scheitel ausschneidet, ist x der Bogen TA selbst. Mithin kommt

$$\frac{\text{Bogen } TA - \text{Strecke } TA_0}{\text{Bogen } TA} = \frac{x - TA_0}{x} = \frac{2x + x\cos x - 3\sin x}{2x + x\cos x}.$$

Der links stehende Bruch ist der relative Fehler f, den man macht, wenn man den Bogen TA durch die Strecke TA_0 ersetzt, nämlich das Verhältnis der Abweichung beider voneinander zur wahren Bogenlänge. Mit Hilfe der trigonometrischen Tafeln läßt sich dieser relative Fehler f für verschiedene Winkel x berechnen. Dabei ist zu beachten, daß x das Bogenmaß darstellt, also zu 360° das Bogenmaß 2π, daher zu 10° das Bogenmaß $\pi : 18$ gehört. Indem man also nacheinander x gleich $\frac{1}{18}\pi$, $\frac{2}{18}\pi$, $\frac{3}{18}\pi$ . . setzt, bekommt man die relativen Fehler f für die Fälle, wo $\sphericalangle TMA = 10°, 20°, 30°$ . . . ist. Es ergibt sich, abgerundet auf fünf Dezimalstellen.

$\sphericalangle TMA$	f	$\sphericalangle TMA$	f	$\sphericalangle TMA$	f
10°	0,00000	40°	0,00139	70°	0,01477
20°	0,00008	50°	0,00353	80°	0,02654
30°	0,00043	60°	0,00760	90°	0,04507

Also erst bei 60° beträgt der relative Fehler $^3/_4$%. Wenn man sich auf Winkel TMA beschränkt, die kleiner als 60° sind, ist der Fehler noch kein Hundertteil der gesuchten Länge. Diese Genauigkeit wird meistens ausreichen. In diesem Falle beträgt der ganze Winkel ATB des zu rektifizierenden Kreisbogens weniger als 120°. Man kann also mittels des in Fig. 345 angegebenen Verfahrens den Bogen AB in eine Strecke A_0B_0 mit einem Fehler von weniger als 1% verwandeln, wenn der Bogen AB weniger als ein Drittel des ganzen Kreisumfanges beträgt. Will man eine größere Genauigkeit haben, so wende man das Verfahren nur auf die Hälfte oder ein Viertel des Bogens AB an und multipliziere das Ergebnis mit 2 oder 4. Ebenso verfährt man, wenn der Bogen AB mehr als ein Drittel des Kreisumfanges ausmacht. Der Fehler f ist positiv, d. h. die Strecke A_0B_0 ist tatsächlich kleiner als die wahre Bogenlänge. Ist der Punkt O unerreichbar, so teilt man die Sehne AT in Drittel. Die Geraden durch die Teilpunkte nach M und dem Gegenpunkt von T auf dem Kreis sind dann zu OA parallel, so daß man OA ohne Benutzung des Punktes O ziehen kann, wie es in Fig. 345 auf voriger Seite angedeutet ist.

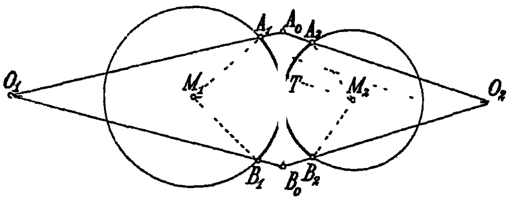


Fig. 346

Man ist nun auch imstande, die Aufgabe zu lösen, **einen gegebenen Bogen A_1B_1 eines Kreises auf einen Kreis von anderem Radius als Bogen A_2B_2 so aufzutragen, daß beide Bogen angenähert gleich lang werden** Siehe Fig. 346. Man zeichnet die beiden Kreise mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 so aneinander, daß sie sich in der Mitte T des gegebenen Bogens A_1B_1 berühren, und zieht die gemeinsame Tangente. Dann bestimmt man O_1 über M_1 hinaus und O_2 über M_2 hinaus so, daß

$$TO_1 = 3\,TM_1\,, \quad TO_2 = 3\,TM_2$$

ist, bringt die Geraden O_1A_1 und O_1B_1 mit der Tangente zum Schnitt in A_0 und B_0 und zieht A_0O_2 und B_0O_2. Diese Geraden bestimmen die Endpunkte A_2 und B_2 des gesuchten Bogens auf dem zweiten Kreis. Dies Verfahren ist mit einem Fehler behaftet, der kleiner als 1% ist, wenn keiner der beiden Bogen A_1B_1 und A_2B_2 mehr als ein Drittel seines Kreises ausmacht. Tatsächlich ist der Fehler sogar bedeutend kleiner, weil sich die Ungenauigkeiten beim Übergang vom ersten Kreis zur Tangente und von der Tangente zum zweiten Kreis zum Teil wieder aufheben. Er ist z. B gleich Null, wenn beide Kreise gleiche Radien haben Um Platz zu sparen, kann man den zweiten Kreis auf dieselbe Seite der Tangente legen wie den ersten Ist O_2 unerreichbar, so nehme man ein oder zwei Drittel von TA_0 und verbinde den Endpunkt mit M_2 oder dem Gegenpunkt von T auf dem zweiten Kreis Diese Verbindenden sind zu A_0O_2 parallel, so daß man A_0O_2 ohne Benutzung des Punktes O_2 ziehen kann

Anmerkung Daß es unmöglich ist, durch eine endliche Anzahl von Konstruktionen mit Hilfe des Lineals und Zirkels die Länge des Umfanges eines Kreises von gegebenem Radius zu bestimmen, bewies Ferdinand Lindemann (geb 1852 in Hannover, Professor an der Universität München) in der Abhandlung „Über die Zahl π“, Mathematische Annalen 20 Bd 1882, S 213—225

Das oben vorgetragene Näherungsverfahren zur Ausmessung von Kreisbogen steckt in einer Formel, die herrührt vom Kardinal Nikolaus von Kusa (Cusanus, eigentlich Nik Chryppfs oder Krebs, geb 1401 in Cues a d Mosel in der Nähe von Trarbach, Rechtsgelehrter in Mainz, dann Geistlicher, Mitglied des Baseler Konzils von 1432 bis 1437, seit 1450 Bischof von Brixen, gest 1464 in Todi in Unteritalien) Die Formel kommt, wenn auch nicht in der jetzt gebräuchlichen Schreibart, in seiner Schrift „De mathematica perfectione“ (Mathematische Vervollkommnung) vor, die sich in der Baseler Ausgabe seiner Werke „Cusani Opera“ von 1565, S 1110—1154, befindet Vgl Moritz Cantor (geb 1829 in Mannheim, als Professor an der Universität Heidelberg gest. 1920), „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“, 2 Bd. 2 Aufl Leipzig 1900, S. 199, 200

249. Abwicklung des Rotationszylinders. Die Zylinder gehören zu denjenigen Flächen, die sich auf die Ebene abwickeln lassen (Nr 231) Um einen richtigen Begriff von dem Vorgang des Abwickelns zu bekommen, fasse man statt des Zylinders zunächst ein dem Zylinder nahekommendes Prisma ins Auge, also ein Prisma, dessen Kanten a, b, c . sehr nahe aufeinander folgen. Dies Prisma legt man mit der Fläche $(a\,b)$ auf die Ebene, dann kippt man es um b, bis die Fläche $(b\,c)$ auf der Ebene liegt, dann um die Kante c, bis die Fläche $(c\,d)$ auf der Ebene liegt, usw. So werden Streifen für Streifen nebeneinander gelegt: Aus $a, b, c \ldots$ gehen parallele Geraden (a), (b), (c) . . der Ebene hervor, und ihre Abstände sind gleich den wahren Abständen auf den Prismenflächen. Hat man auf dem Prisma irgendeine gebrochene Linie l gezogen,

die durch Punkte A, B, C .. der Kanten a, b, c . gehen, so liefern diese Punkte bei der Abwicklung Punkte (A), (B), (C) . auf (a), (b), (c) .., die Ecken desjenigen gebrochenen Linienzuges (l), der durch die Abwicklung aus l entsteht. In jeder der vorhin beschriebenen Lagen des Prismas deckt sich eine Strecke des Linienzuges l mit der entsprechenden Strecke des Linienzuges (l).

Geht man vom Prisma zum Zylinder über, so wird aus dem ruckweisen Umkippen des Prismas ein stetiges Abrollen des Zylinders Das Abrollen darf nicht mit einem Schleifen des Zylinders auf der Ebene verbunden werden, d. h . bestimmt man einen zu allen Mantellinien des Zylinders senkrechten Querschnitt, so ist dieser eine Kurve k, die bei der Abwicklung eine Gerade (k) werden muß, und zwar so, daß jedes Stuck der Kurve k gerade so lang wie das entsprechende Stück der Abwicklung ist Demnach ist die Gesamtbreite des vollstandig abgewickelten Mantels eines Zylinders gleich der Lange einer zu allen Mantellinien senkrechten Querschnittkurve k. Im Falle eines Rotationszylinders ist der Querschnitt k ein Kreis, dagegen im Falle eines schiefen Kreiszylinders eine Ellipse Irgendeine auf dem Zylinder gezogene Kurve l liefert vermoge der Abwicklung eine ebene Kurve (l) von in entsprechenden Teilen gleicher Lange Die vorhin beim Prisma angestellte Betrachtung lehrt, da die dort mit A, B, C . bezeichneten Punkte nunmehr lauter unendlich nahe aufeinanderfolgende Punkte der Kurve l, also die Geraden AB, BC die Tangenten der Kurve l sind In jeder derjenigen Lage, in die der Zylinder beim Abrollen gelangt, beruhrt die Kurve l des Zylinders die Kurve (l) der Ebene.

Wir wenden uns zu einem besonders einfachen, aber wichtigen Fall Es liege ein Rotationszylinder vor, der durch eine Ebene, die mit seiner Achse 45° bildet, abgeschragt sei Der entstehende Zylinderstumpf ist in Fig 347 in lotrechter Stellung so gezeichnet, daß die begrenzende Ebene zur Aufrißtafel senkrecht ist Die in dieser Ebene gelegene Ellipse e erscheint im Aufriß als die doppelt zahlende Strecke $B''D''$ Als den senkrechten Querschnitt k wollen wir nicht den Grundkreis des Zylinders, sondern den Kreis in der Höhe des Mittelpunktes M der Ellipse e benutzen Sein Umfang ist gleich der Strecke $(A)(C)(A)$, der Breite des abgewickelten Mantels. Die Ellipsenscheitel A, B, C, D werden in der Abwicklung die Punkte (A), (B), (C), (D), von denen (A) schließlich noch einmal wiederkehrt Der hochste Punkt ist (B), der tiefste (D). Daher hat die aus e entstehende Kurve (e) in (B) und (D) wagerechte Tangenten Wenn der Zylinder den ausgebreiteten Mantel langs der Mantellinie von (A) berührt, liegt er so zur Ebene des Mantels wie der gezeichnete Zylinder zur Aufrißtafel, d h. in (A) hat dann die Ellipse (e) eine unter 45° ansteigende Tangente. Ebenso ergibt sich in (C) die Tangente unter 45° nach der anderen Seite hin. Ist P irgendein Punkt der Ellipse e, Q der Schnittpunkt seiner Mantellinie mit dem Kreis k, so muß in der Abwicklung die Strecke $(A)(Q)$ gleich dem Bogen AQ des Kreises k, d. h. gleich dem Bogen $A'P'$ im Grundriß sein. Er ist in Fig. 347 mittels des Punktes O nach voriger Nummer rektifiziert worden Die Höhe $(Q)(P)$ ist gleich $Q''P''$. Wir wollen $(A)(Q) = x$ und $(Q)(P) = y$ setzen. Dann ist x gleich dem Bogen $A'P'$ in der Grundrißprojektion. Nehmen wir den Radius des Zylinders

als Längeneinheit an, so ist also x zugleich das Bogenmaß des Zentriwinkels $A'M'P'$. Das Lot $P'R'$ von P' auf $M'A'$ ist der Sinus dieses Winkels Da es gleich $M''Q''$ und $M''Q'' = Q''P''$ ist, ergibt sich also

$$y = \sin x .$$

Aus diesem Grunde heißt die Kurve (e), in die sich die Ellipse e bei der Abwicklung verwandelt, die Sinuslinie Die Strecke $(A)(C)(A)$, die gleich dem Kreisumfang ist, heißt die Länge der Periode der Sinuslinie Man muß nämlich bedenken, daß man den Zylinder ohne Ende auf der Ebene abrollen lassen kann, so daß sich der Berg und das Tal $(A)(B)(C)(D)(A)$ der Sinuslinie beiderseits beliebig oft wiederholen. Die Sinuslinie ist also eine periodische Kurve, und Fig. 347 zeigt nur eine Periode der Kurve.

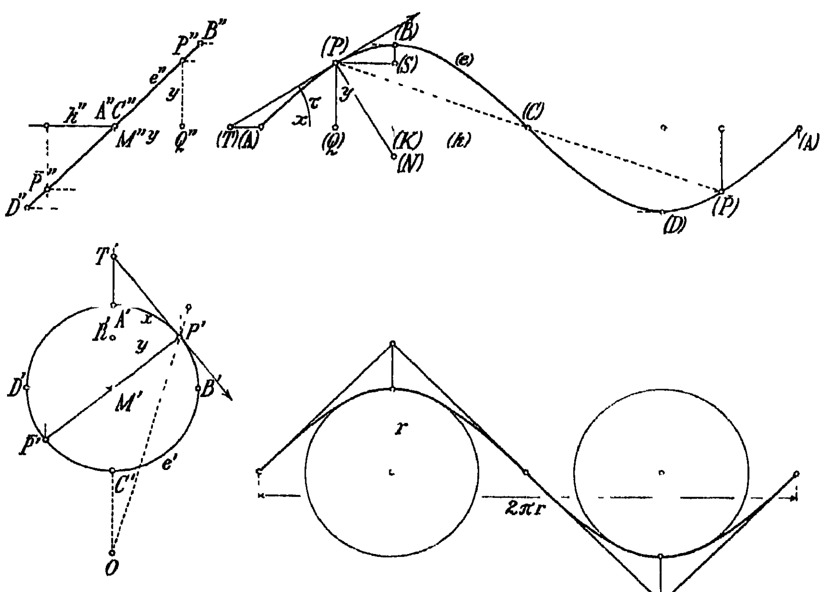


Fig. 347

Die Tangente des Punktes P von e fällt im Aufriß mit $M''P''$ zusammen, im Grundriß erscheint sie als Tangente des Grundkreises in P'. Da die Ellipsenebene die Ebene des Kreises k in dem Durchmesser AC schneidet, trifft die Tangente die Ebene des Kreises k in einem Punkt T, dessen Grundriß sich sofort ergibt. Die Steigung der Tangente ist gleich $QP : TQ$, und die Grundrißprojektion $T'P'$ hat die wahre Länge von TQ. Da die Ellipse e und die Sinuslinie (e) darin, wenn P mit (P) zusammenliegt, auch dort die Tangente gemein haben, bekommt man also die Tangente des Punktes (P), indem man $(Q)(T) = P'T'$ von (Q) aus auf (k) nach der richtigen Seite hin aufträgt; die Gerade $(T)(P)$ ist die Tangente.

Der Grundriß zeigt, daß $P'T' = \operatorname{tg} x$ ist, für den Tangentenwinkel $\tau = \sphericalangle (Q)(T)(P)$ ergibt sich also

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{(Q)(P)}{(T)(Q)} = \frac{y}{\operatorname{tg} x} = \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} = \cos x .$$

Aus den Symmetrien der Ellipse e hinsichtlich ihrer Achsen AC und BD ergeben sich sofort Symmetrien der Sinuslinie (e): Die auf dem abgewickelten Mantel durch die höchste und tiefste Stelle (B) und (D) gehenden Mantellinien sind Symmetriegeraden, und deshalb heißen (B) und (D) Scheitel der Kurve, wie man überhaupt die Punkte, in denen eine Symmetriegerade eine Kurve schneidet, Scheitel zu nennen pflegt. Außerdem ist (C) ein Symmetrie- oder Spiegelpunkt, d. h. zu jedem Punkt (P) der Sinuslinie gibt es einen zweiten Punkt $(\bar{P})$ der Kurve derart, daß (C) die Mitte von $(P)(\bar{P})$ ist, oder auch, was dasselbe besagt: Die eine Hälfte der Periode der Sinuslinie geht in die andere vermöge Drehung um (C) durch einen gestreckten Winkel hervor. Mithin treffen Berg und Tal der Sinuslinie in (C) so zusammen, daß sie die in (C) unter $45°$ ansteigende Tangente von verschiedenen Seiten berühren. Hier liegt also der besondere Fall vor, daß eine Kurventangente die Kurve im Berührungspunkte durchsetzt. Eine derartige Tangente heißt eine Wendetangente, ihr Berührungspunkt (C) ein Wendepunkt, siehe die untere Nebenfigur. Bedenkt man, daß die Tangente allgemein zwei unendlich benachbarte Punkte, also hier (C) mit einem unendlich benachbarten Punkte der Kurve verbindet, und stellt man sich vor, der unendlich benachbarte Punkt liege etwa links von (C), so folgt daraus, daß (C) Symmetriepunkt ist, daß ebenfalls rechts von (C) ein unendlich benachbarter Punkt der Kurve liegt, durch den die Wendetangente gehen muß. Demnach ist die Wendetangente so beschaffen, daß auf ihr drei unendlich benachbarte Kurvenpunkte liegen, d. h. die Wendetangente ist der in eine Gerade ausgeartete Krümmungskreis der Kurve in (C) (Nr. 80). Infolgedessen beobachtet man, daß sich die Sinuslinie besonders innig an ihre Wendetangente anschmiegt.

Wir können aber auch die Krümmungskreise der Scheitel (B) und (D) ermitteln. Zunächst muß der Krümmungskreis von (B) seinen Mittelpunkt auf der Normalen von (B) haben, d. h. auf der durch (B) gehenden abgewickelten Mantellinie. Die Normale eines anderen Punktes (P) der Kurve wird nun diese Mantellinie in einem Punkte (N) schneiden. Wird der Fußpunkt des Lotes von (P) auf die Mantellinie von (B) mit (S) bezeichnet, so ist.

$$\frac{(S)(P)}{(N)(S)} = \operatorname{tg}\tau = \cos x\,, \quad \text{d. h.} \quad (N)(S) = \frac{(S)(P)}{\cos x}\,.$$

Rückt (P) auf der Sinuslinie unendlich nahe an (B) heran, so strebt (S) nach (B) und (N) nach dem gesuchten Krümmungsmittelpunkt (K) von (B) (nach Nr. 80). Also ist $(K)(B)$ der Grenzwert von $(S)(P) : \cos x$. Nun ist aber die Strecke $(S)(P)$ gleich dem um $(A)(Q) = x$ verminderten Viertel der Strecke (k), deren Länge 2π ist. Mithin ist $(K)(B)$ der Grenzwert von $(\frac{1}{2}\pi - x)\cdot\cos x$, wenn x nach $\frac{1}{2}\pi$ strebt. Da $\frac{1}{2}\pi$ im Grundriß den rechten Winkel bedeutet, x den Winkel $A'M'P'$, so kommt, wenn der Komplementwinkel von x mit z bezeichnet wird: Die Strecke $(K)(B)$ ist der Grenzwert von $z : \sin z$ für den Fall, daß der Winkel z nach Null strebt. Aber z wird durch den Bogen $P'B'$ des Grundkreises dargestellt, und sein Verhältnis zu seinem Sinus strebt nach Eins, wenn der Bogen selbst unendlich klein wird. Mithin kommt $(K)(B) = 1$. Die Einheit war der Radius des Grundkreises, d. h. die

Höhe des Punktes (B) über (k). Daher liegt der Mittelpunkt (K) des Krümmungskreises von (B) auf (k). Mit anderen Worten: Der Krümmungskreis des Scheitels (B) und offenbar ebenso der des Scheitels (D) ist geradeso groß wie der Grundkreis des Zylinders. Die Krümmungskreise der Scheitel und die Wendetangenten reichen zum Zeichnen der Sinuslinie in nicht zu großem Maßstab aus, wie es die untere Nebenfigur zeigt

Als obere Begrenzung des Zylinderstumpfes nahmen wir eine Ellipse e an, die unter 45° zur Zylinderachse oder, was dasselbe ist, zur Grundrißtafel geneigt war Was sich ergibt, wenn man die Ebene der Ellipse steiler oder weniger steil wählt, ist leicht zu sehen Nimmt man die Ebene der Ellipse e so an, daß sie mit der Grundrißtafel irgendeinen Winkel α bildet, so verhalten sich die auf den Mantellinien vom Kreis k aus gemessenen Höhen der Ellipsenpunkte zu den Höhen der entsprechenden Punkte der unter 45° geneigten Ellipse wie $\operatorname{tg}\alpha : 1$, d. h sie stehen in einem konstanten Verhältnis. Mithin bekommt man in der Abwicklung die zu einer steileren oder weniger steilen Ellipse gehörige Kurve, wenn man alle Höhen der Sinuslinie, gemessen von der Geraden (k) an, in einem konstanten Verhältnis vergrößert oder verkleinert Dies bedeutet, nebenbei bemerkt, nach Nr. 125 Die neue Kurve ist affin zur Sinuslinie mit der Affinitätsachse (k) und der zu dieser Achse senkrechten Affinitätsrichtung. Indem man jene Vergrößerung oder Verkleinerung auch auf die Höhen der Punkte der Wendetangenten und Scheitelkrümmungskreise der Sinuslinie anwendet, bekommt man für die neue Kurve die Wendetangenten und solche Ellipsen, die mit der neuen Kurve in ihren Scheiteln eine besonders innige Berührung eingehen Man wird aber diese Ellipsen gar nicht zeichnen, sondern statt ihrer nur die Krümmungskreise der in Betracht kommenden Ellipsenscheitel Denn diese Kreise werden dort ebenfalls die neue Kurve besonders innig berühren. In Fig 348 ist die neue Kurve für die Annahmen $\operatorname{tg}\alpha = 2$ und $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ abgeleitet· Aus dem Quadrat, das dem Krümmungskreis des einen Sinuslinienscheitels umschrieben ist, wird vermöge der Vergrößerung oder Verkleinerung der Höhen ein der Ellipse umschriebenes Rechteck, das man benutzt, um nach Nr. 81 den Krümmungskreis der Ellipse in dem in Betracht kommenden Scheitel und damit zugleich den der neuen Kurve zu bestimmen.

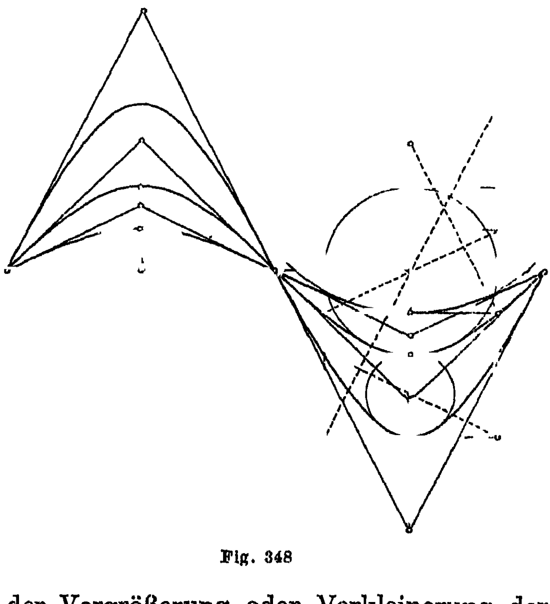


Fig. 348

Anmerkung: Die Sinuslinien und die zu ihnen affinen Kurven, die soeben betrachtet wurden, spielen in der Physik eine ganz hervorragende Rolle als Schwingungskurven bei akustischen, Licht- und elektrischen Schwingungen. Wir werden ihnen im zweiten Bande noch bei einer anderen Gelegenheit begegnen. Ihre Erzeugung durch Abrollen des abgeschrägten Rotationszylinders ist altbekannt, vgl. Gino Loria (Nr. 2), „Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte“, deutsch von Fritz Schütte, Leipzig 1902, S. 539. Unabhängig von dieser Art der Erzeugung wurde die Sinuslinie zuerst untersucht durch Giles Persone de Roberval (auch Personnier genannt, de Roberval nach seinem Geburtsort Roberval bei Beauvais, geb. 1602, Professor am Collège royal de France, gest. 1675 in Paris), und zwar in der Schrift: „De trochoide ejusque spatio“ (Über die Radlinie und ihre Fläche), verfaßt um 1636 herum, abgedruckt in den Mémoires de l'Académie des Sciences, 6. Bd. Paris 1730, S. 295—345. Die Benennung der Sinuslinie findet sich vielleicht zuerst bei Honoratus Fabri (1606 oder 1607—1688, franz. Jesuit) in einem „Opusculum geometricum de linea sinuum et cycloide“ (Geometrisches Werkchen über die Sinuslinie und Zykloide), Rom 1659.

250. Abwicklung des allgemeinen Kreiszylinders. Ein allgemeiner, also schiefer Kreiszylinder sei durch seine Grundkreisebene und eine dazu parallele Ebene begrenzt. Die Breite seines abgewickelten Mantels ist gleich dem Umfang derjenigen Ellipse e, die sich als zur Zylinderrichtung senkrechter Querschnitt ergibt.

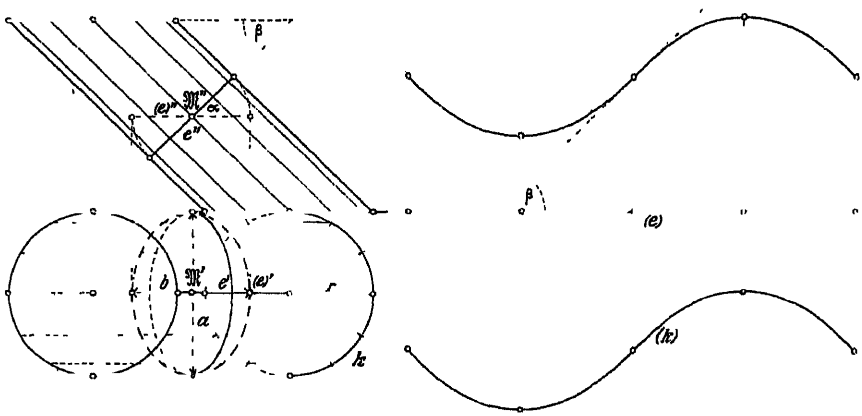


Fig. 340

Wir nehmen an, der Zylindergrundkreis k liege auf der Grundrißtafel und die Zylinderachse sei zur Aufrißtafel parallel, siehe Fig. 349. Den senkrechten Querschnitt legt man zweckmäßig durch den Mittelpunkt 𝔐 der Zylinderachse. Die Querschnittellipse e erscheint im Aufriß als doppelt zählende Strecke. Ihre wahre Gestalt geht im Grundriß durch Drehen in die zur Grundrißtafel parallele Lage (e) hervor. Wenn r der Radius des Grundkreises und α der Winkel ist, unter dem die Querschnittebene geneigt ist, sind $a = r$ und $b = r \cos\alpha$ die Halbachsen von (e). Um den Umfang dieser Ellipse als Strecke, nämlich als Breite des Mantels, darzustellen, bedient man sich des einfachsten Näherungsverfahrens: Man benutzt eine geringe Zirkelöffnung und stellt mit ihrer Hilfe fest, wie lang der Umfang ist, indem man die kurzen Sehnen, die durch den Zirkel gefaßt werden, statt der zugehörigen Bogen benutzt. Ohne Zweifel ist dies Verfahren unvollkommen. Aber die Ausmessung des Ellipsenumfanges erfordert Hilfsmittel, die wir hier nicht heran-

ziehen können. Immerhin wird es zur Prüfung der Ausmessung mittels des Zirkels willkommen sein, wenn wir Werte angeben, die durch genaue Berechnung hervorgehen Wenn die halbe Hauptachse a der Ellipse gleich Eins gesetzt wird, gelten für die Winkel $\alpha = 0°, 9°, 18°, 27° \ldots$ oder also für die zugehörigen halben Nebenachsen $b = \cos\alpha$ die folgenden Werte des Viertelumfanges $\frac{1}{4}u$ der Ellipse

α	b	$\frac{1}{4}u$	α	b	$\frac{1}{4}u$
0	1,0000	1,5708	45	0,7071	1,3506
9	0,9877	1,5611	54	0,5878	1,2681
18	0,9511	1,5326	63	0,4540	1,1826
27	0,8910	1,4864	72	0,3090	1,1011
36	0,8090	1,4248	81	0,1564	1,0338
45	0,7071	1,3506	90	0,0000	1,0000

In Fig. 350 ist diese Tafel graphisch wiedergegeben Darin bedeutet für einen beliebigen Winkel α die Strecke OX die halbe Nebenachse b und die Strecke OY den Viertelumfang der Ellipse, wenn die angegebene Strecke, der Durchmesser des Halbkreises, die halbe Hauptachse a vorstellt Man vermag mittels dieser Zeichnung leicht zu irgend zwei gegebenen Halbachsen a und b den zugehörigen Viertelumfang der Ellipse festzustellen

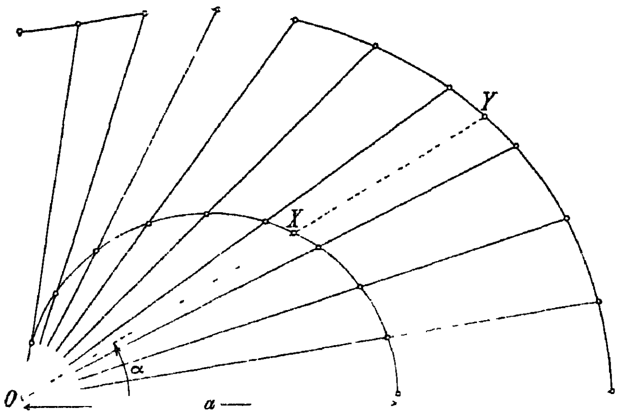


Fig 350

Man wird, um den Zylindermantel abzuwickeln, den Grundkreis in eine Anzahl gleicher Teile zerlegen und die Mantellinien durch die Teilpunkte ziehen Die Zeichnung ergibt dann, wie die wahre Querschnittellipse (e) durch diese Mantellinien in verschieden lange Bogenstücke zerlegt wird Diese Ellipsenteile sind möglichst genau auf die Strecke, die den Umfang darstellt zu übertragen Darauf zieht man durch ihre begrenzenden Punkte die abgewickelten Mantellinien und macht sie gleich den aus dem Aufriß zu entnehmenden wahren Längen Die Orte der Endpunkte der Mantellinien sind die abgewickelten Endkreise des Zylinders Sie haben Berg und Tal wie die Sinuslinie in der letzten Nummer, auch treten hier wie dort Wendepunkte auf. Übrigens sieht man leicht, wie sich die Wendetangenten zeichnen lassen. Es ist in Fig. 349 angedeutet. Auch jetzt stellt die Abwicklung nur eine Periode dar

Man darf die Abwicklungen in Fig. 347 der letzten Nummer und in Fig. 349 nicht verwechseln Dort sind die Wellenlinien Abwicklungen von Ellipsen und die zu den Mantellinien senkrechten Geraden Abwicklungen von Kreisen, hier dagegen sind die Wellenlinien Abwicklungen von Kreisen und die zu den Mantellinien senkrechten Geraden Abwick-

lungen von Ellipsen, nämlich von Querschnittellipsen. Wegen der Vergleichung zwischen beiden Figuren ist der Winkel α in Fig 349 wie in Fig. 347 gleich 45° angenommen worden.

251. Abwicklung des Rotationskegels. Auch die Kegel gehören zu den abwickelbaren Flächen (Nr. 231). Indem das Abwickeln des Kegels wie das des Zylinders durch ein Abrollen auf der Ebene bewirkt wird, tritt außer der Drehung des Kegels um seine eigene Achse auch eine Drehung des Kegels um das auf der Ebene in der Kegelspitze errichtete Lot auf, wobei die Spitze immer an derselben Stelle bleibt Auch jetzt darf mit dem Abrollen kein Schleifen auf der Ebene verbunden sein, d. h. jede Kurve auf dem Kegel muß beim Abrollen eine ebene Kurve liefern, die in entsprechenden Teilen dieselbe Länge wie die Kurve auf dem Kegel hat. In jedem Augenblick findet zwischen beiden Kurven Berührung statt

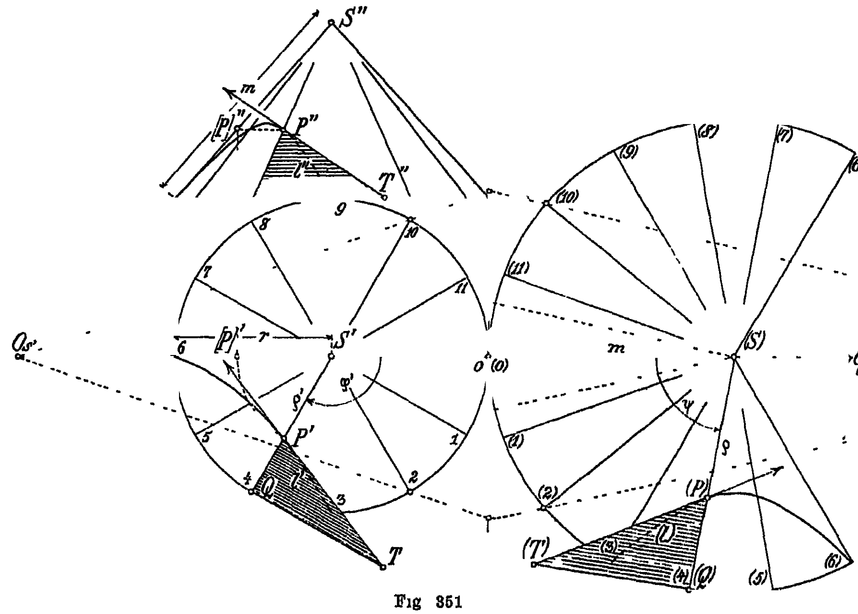


Fig 351

Der Mantel eines Rotationskegels, dessen Grundkreis den Radius r hat und dessen Mantellinien die Länge m haben, ist ein Ausschnitt (Sektor) eines Kreises vom Radius m. Der Kreisbogen des Ausschnittes ist gleich dem Umfang $2\pi r$ des Grundkreises. Man hat also zunächst die Aufgabe zu lösen, auf einem Kreis vom Radius m einen Bogen zu bestimmen, der gleich dem Umfang des Grundkreises ist Dies geschieht wie in Fig. 346 von Nr 248 Man überträgt auf diese Art einen Teil des Grundkreises, etwa ein Drittel, auf den Kreis vom Radius m, indem man die Hilfspunkte $O_{S'}$ und $O_{(S)}$ benutzt, siehe Fig 351, wobei $O_{S'}$ und $O_{(S)}$ vom Berührungspunkt beider Kreise die Entfernungen $3\,r$ und $3\,m$ haben. Da der Punkt $O_{(S)}$ zu weit entlegen ist, werden die nach ihm gehenden Geraden so gefunden, wie es in Nr. 248 auseinandergesetzt wurde. Wir haben den Kegel in Fig 351 in zwölf

gleiche Teile zerlegt, sie liefern bei der Abwicklung zwölf gleiche Ausschnitte des Kreises vom Radius m.

Jedem Punkt P auf dem Kegel entspricht ein Punkt (P) in der Abwicklung. Bei dieser Gelegenheit sei angemerkt: Man kann zwar zum gegebenen Grundriß P' (oder Aufriß P'') eines Punktes auf dem Kegel den zugehörigen Aufriß P'' (oder Grundriß P') dadurch bestimmen, daß man die durch P gehende Mantellinie in beiden Projektionen zeichnet und sie mit dem Lot von P' (oder P'') auf die Projektionsachse zum Schnitt bringt, aber der Schnitt kann zu spitzwinklig und daher zu ungenau werden. Man tut daher besser, den Kegel um seine Achse so weit zu drehen, bis der Punkt P auf eine der beiden Mantellinien rückt, die im Aufriß den Kegelumriß geben, siehe $[P]'$ und $[P]''$ in Fig. 351. Dann nämlich liegen P' und $[P]'$ auf einem Kreis um S', sowie P'' und $[P]''$ auf einer Parallelen zur Projektionsachse. Diese Hilfslinien haben genauer bestimmbare Schnitte mit den in Betracht kommenden Linien. Zugleich stellt $S''[P]''$ die wahre Länge der Strecke SP dar. Infolgedessen bekommt man den zu P gehörigen Punkt (P) in der Abwicklung, wenn man zunächst die Mantellinie SQ, auf der P liegt, in der Abwicklung bestimmt und dann auf dieser Linie $(S)(Q)$ von (S) aus die Strecke $S''[P]''$ bis (P) abträgt.

Die Beziehung, die zwischen entsprechenden Punkten P' und (P) im Grundriß des Kegels und in der Abwicklung besteht, läßt sich in folgender Art darstellen. Als Polarkoordinaten des Punktes P' bezeichnet man einerseits den Winkel φ', den der Radius $S'0$ beschreiben muß, um in die Lage $S'Q$ zu kommen, und andererseits die Strecke $\varrho' = S'P'$. Entsprechend sind die Polarkoordinaten des Punktes (P) der Winkel ψ, den der Radius $(S)(0)$ beschreiben muß, um in die Lage $(S)(Q)$ zu kommen, und die Strecke $\varrho = (S)(P)$. Die Winkel φ' und ψ nennt man die Amplituden (eigentlich Weiten) und die Strecken ϱ' und ϱ die Radienvektoren (d. h. Radienträger) der Punkte P' und (P). Ferner heißen die Punkte S' und (S) die Pole der Polarkoordinaten und die Strahlen von S' nach 0 und von (S) nach (0), von denen aus die Amplituden gemessen werden, die Anfangsstrahlen der Polarkoordinaten. Da die Bogen von 0 bis Q und von (0) bis (Q) einander gleich sind, verhalten sich die Winkel φ' und ψ umgekehrt wie die Radien r und m. Ferner ist $\varrho' = S'P' = S'[P]'$ und $\varrho = (S)(P) = S''[P]''$, also $\varrho' : \varrho = S'[P]' : S''[P]'' = r : m$. Mithin ist

$$\frac{\varphi'}{\psi} = \frac{m}{r}, \qquad \frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{r}{m},$$

d. h.

$$\psi = \frac{r}{m} \cdot \varphi', \qquad \varrho = \frac{m}{r} \cdot \varrho'.$$

Demnach ergibt sich aus der Amplitude φ' von P' die Amplitude ψ von (P) durch Multiplikation mit $r : m$, dagegen aus dem Radiusvektor ϱ' von P' der Radiusvektor ϱ von (P) durch Division mit $r : m$.

Deshalb geht aus der Grundrißprojektion l' irgendeiner auf dem Kegel gezogenen Linie l die zugehörige Kurve (l) in der Abwicklung dadurch hervor, daß man die Amplituden aller Punkte von l' in dem

konstanten Verhältnis $r : m$ verkleinert, während man die Radienvektoren aller dieser Punkte zugleich in dem umgekehrten Verhältnis $m : r$ vergrößert. (In Fig. 351 ist $r : m = 2 : 3$ gewählt worden.)

Die Tangente eines Punktes P der Kurve l liegt in derjenigen Ebene, die den Kegel längs der Mantellinie des Punktes P, also längs SQ berührt, und schneidet folglich die Grundebene des Kegels in einem Punkte T der Kreistangente von Q. Das Dreieck PQT ist an der Ecke Q rechtwinklig; die Kathete QT erscheint im Grundriß in wahrer Länge. Da nun die Kurven l und (l) einander bei der Abwicklung in (P) berühren, und da dasselbe von dem Grundkreis und seiner Abwicklung im Punkte (Q) gilt, ergibt sich die Tangente des Punktes (P) von (l), indem man $(Q)(T) = QT$ auf der Tangente von (Q) nach der richtigen Seite hin abträgt und (T) mit (P) geradlinig verbindet.

Auf zwei Umstände muß noch hingewiesen werden: Man muß beachten, daß der abgewickelte Mantel in Fig. 351 den Mantel von der Innenseite des Kegels her zeigt, weil der Drehsinn $(0)(1)(2)\ldots$ dem Drehsinn $0\;1\;2\ldots$ entgegen ist. Ferner stellt der Kreisausschnitt nur eine Periode der Abwicklung dar, denn man kann das Abrollen des Kegels ohne Ende fortsetzen.

252. Geodätische Linien auf dem Rotationskegel. Indem man alles wie in der letzten Nummer annimmt, kann man auch die umgekehrte Aufgabe lösen: Eine Kurve (l) sei in der Abwicklung des Rotationskegels gegeben, gesucht wird die Kurve l auf dem Kegel, aus der sie beim Abwickeln entsteht.

Insbesondere wollen wir eine hierzu gehörige besondere Aufgabe lösen: Auf dem Rotationskegel seien zwei Punkte A und B gegeben. Gesucht wird der kürzeste Weg, auf dem man von A nach B gelangen kann, ohne die Kegelfläche zu verlassen. In Fig. 352 sind die Punkte A und B durch ihre Grund- und Aufrisse gegeben. Man bestimmt dann die Punkte (A) und (B), in die sie bei der Abwicklung übergehen. Aus dem gesuchten Wege von A bis B auf der Kegelfläche wird bei der Abwicklung eine gleichlange Linie in der Ebene. Aber in der Ebene ist der kürzeste Weg die Gerade. Daher ist die gesuchte Kurve in der Abwicklung die (A) und (B) verbindende Gerade (g). Hierbei ist dafür Sorge zu tragen, daß diejenige Mantellinie des Kegels, längs deren man sich den Kegelmantel durchschnitten denkt, um ihn abwickeln zu können, nicht zwischen A und B hindurch geht. Dies ist in Fig. 352 beachtet. Da die Abwicklung periodisch ist, kann man sie über die Randradien $(S)(6)$ hinaus fortsetzen und dementsprechend auch (g) verlängern. Man sieht, daß (g) den abgewickelten Grundkreis zufällig gerade in den Teilpunkten (3) und (7) trifft. Um die Kurve g auf dem Kegel Punkt für Punkt zu bestimmen, trägt man die Strecken, die (g) auf den abgewickelten Mantellinien abschneidet, im Aufriß etwa auf der linken äußersten Mantellinie des Kegels ein, da diese Mantellinie im Aufriß in wahrer Länge erscheint. Von diesem Punkt ausgehend findet man dann wie vom Punkte $[P]''$ in Fig. 351 der letzten Nummer die zugehörigen Grund- und Aufrisse der Punkte, in denen die gesuchte Kurve g die Mantellinien des Kegels schneidet. Die Kurve g geht schleifenförmig um den Kegel herum. Ihr höchster Punkt H entspricht dem (S) am nächsten gelegenen Punkt (H) von (g).

Die Tangente des höchsten Punktes ist zur Grundrißtafel parallel. Da ferner $(S)(H)$ zu (g) senkrecht ist, also symmetrisch zu (g) liegt, hat die Kurve g auf dem Kegel die durch die Kegelachse und durch die Mantellinie von H gehende Ebene als Symmetrieebene Weil die Symmetrieebene zur Grundrißtafel senkrecht ist, hat daher die Grundrißprojektion g' von g die Gerade $S'H'$ als Symmetriegerade. Die Aufrißprojektion g'' von g wäre nur dann symmetrisch, wenn H gerade auf der vordersten oder hintersten Mantellinie des Kegels läge, was in Fig 352 nicht der Fall ist

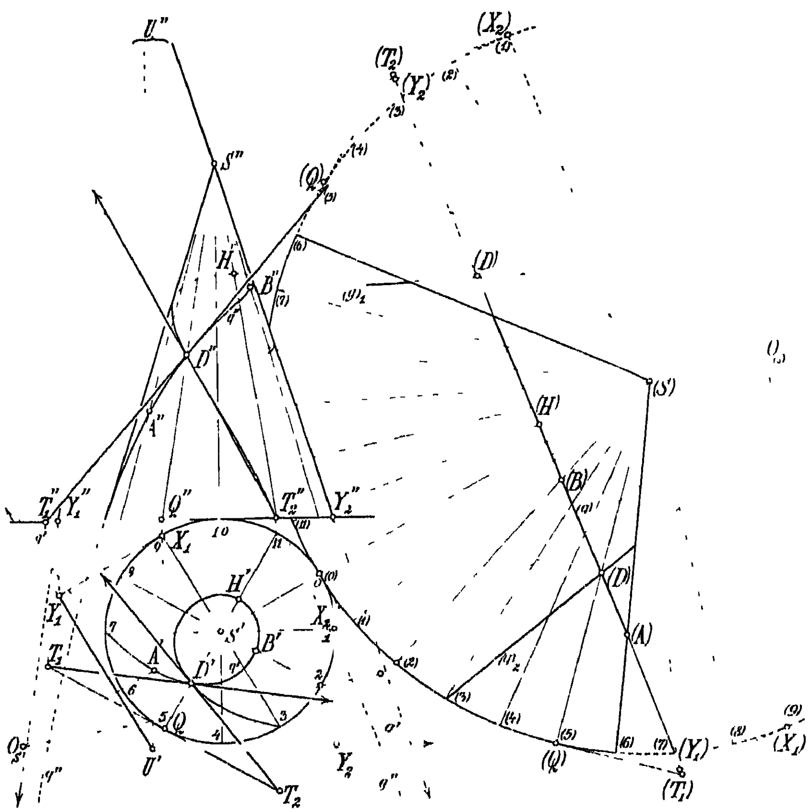


Fig 352.

Infolge der Symmetrie hat die Kurve g einen Doppelpunkt D, d. h. sie durchschneidet sich selbst. In der Tat, wenn man die Mantellinie $(S)(H)$ oder $(S)(11)$ der Abwicklung nach der einen und andern Seite hin um (S) durch den halben Winkel des Kreisausschnittes dreht, bekommt man beide Male die jener Mantellinie auf dem Kegel gegenüberliegende Mantellinie in der Abwicklung, nämlich $(S)(5)$, und auf beiden Geraden schneidet (g) gleichlange Strecken bis (D) ab. Übrigens können auch mehrere Doppelpunkte auftreten, wenn nämlich der Kegel noch spitzer ist. Alle Doppelpunkte liegen auf den Mantellinien $S\,5$ und $S\,11$

Indem man das Verfahren der vorigen Nummer rückwärts ausführt, bekommt man die Tangente irgendeines Punktes der Kurve g. Zu beachten ist dabei, daß die Tangente in der Abwicklung mit der Geraden (g) zusammenfällt. Hiernach findet man z. B. die Tangenten des Doppelpunktes D, indem man in den Endpunkten (5) oder (Q) der beiden Mantellinien $(S)(5)$ die Tangenten an den abgewickelten Grundkreis legt, sie mit (g) in (T_1) und (T_2) zum Schnitt bringt und dann die Strecken $(Q)(T_1)$ und $(Q)(T_2)$, die einander gleich sind, von Q aus im Grundriß tangential an den Grundkreis ansetzt, wodurch man zu den Grundriß-Spurpunkten T_1 und T_2 der gesuchten Tangenten gelangt. Da die Aufrisse von T_1 und T_2 auf der Projektionsachse liegen, bekommt man sowohl die Grundrisse als auch die Aufrisse der Tangenten von D.

Insbesondere kann man auch die Tangenten der unendlich fernen Punkte der Kurve g ermitteln. Man muß nämlich bedenken, daß der Kegelmantel endlos über den Grundkreis fortsetzbar ist, ebenso die Gerade (g). Laßt man nun einen Punkt auf (g) ins Unendlichferne wandern, so wird die abgewickelte Mantellinie zu (g) parallel. Es gibt zwei derartige Mantellinien, nämlich $(S)(9)$ und $(S)(1)$ mit den Endpunkten (X_1) und (X_2). Mithin tritt hier an die Stelle von (Q) der Punkt (X_1) oder (X_2). Die Tangenten des abgewickelten Grundkreises in (X_1) und (X_2) schneiden die Gerade (g) in (Y_1) und (Y_2). Diese Punkte treten also jetzt an die Stelle von (T_1) und (T_2), d. h. wenn man im Grundriß die gleichlangen Strecken $(X_1)(Y_1)$ und $(X_2)(Y_2)$ tangential in X_1 und X_2 an den Grundkreis ansetzt und zwar im richtigen Sinne, bekommt man die Grundriß-Spurpunkte Y_1 und Y_2 der Tangenten der beiden unendlich fernen Punkte der Kurve g. Da ferner diese beiden unendlich fernen Punkte auf den Mantellinien SX_1 und SX_2 liegen, sind die gesuchten Tangenten die Parallelen zu SX_1 und SX_2 durch Y_1 und Y_2. Man kann sie in beiden Projektionen zeichnen, da Y_1 und Y_2 ihre Aufrisse auf der Projektionsachse haben. Der Aufriß der einen Tangente fällt in Fig. 352 mit der äußersten rechten Mantellinie des Kegels zusammen.

Die Tangente eines unendlich fernen Punktes einer Kurve heißt eine Asymptote (eigentlich eine „Nichtzusammenfallende"). Wir haben demnach die Asymptoten der Kurve g bestimmt. Sie liegen symmetrisch zur Ebene durch die Kegelachse und die Mantellinie SDQ, treffen sich also in einem Punkte U dieser Ebene. Weil die Kurve g so ins Unendlichferne strebt, daß sie die Asymptoten erst im Unendlichfernen berührt, kommen ihre unterhalb der Grundrißtafel verlängerten (in Fig. 352 gestrichelten) Äste den ebenfalls dort verlängerten (und gestrichelten) Asymptoten immer näher. Die Asymptoten geben daher einen besonders guten Anhalt zur Feststellung des Gesamtverlaufes der Kurve g.

Wir haben den abgewickelten Kreisausschnitt in Fig. 352 beiderseits periodisch fortgesetzt (gestrichelt). Sollte der Platz dazu nicht ausreichen, so kann man das entbehren. Wenn man nämlich den beiderseits noch einmal angesetzten Kreisausschnitt mit den auf ihnen verlaufenden Stücken der Geraden (g) um (S) durch den Winkel des Ausschnittes zurückdreht, so daß der Ausschnitt mit dem ursprünglichen Ausschnitt zusammenfällt, kommen jene beiden Stücke der Geraden (g) in neue

Lagen $(g)_1$ und $(g)_2$. Diese beiden zusammen mit dem auf dem ursprünglichen Kreisausschnitt verlaufenden Stück von (g) stellen insgesamt die Abwicklung der Kurve g dar, soweit sie oberhalb der Grundrißtafel liegt. Man kann daher die vorhin angegebenen Tangentenkonstruktionen, wenn man will, durchweg mit Hilfe des ursprunglichen Kreisausschnittes allein, d. h. ohne seine periodischen Fortsetzungen, ausführen.

Wenn man die periodischen Fortsetzungen beliebig oft ansetzt, wird die Ebene der Abwicklung um (S) herum beliebig oft überdeckt Die beiden ursprünglich gegebenen Punkte A und B treten daher wiederholt als Punkte (A) und (B) in der Abwicklung in Erscheinung, und man kann deshalb auch andere gerade Linien zwischen diesen Punkten ziehen, wie es die verkleinerte Fig 353 zeigt, wo die beiden nachsten Perioden dargestellt sind Aber nur einer der geradlinigen Wege ist am kurzesten, und er liefert den kürzesten Weg von A nach B auf der Kegelflache. Eine in der Abwicklung gezeichnete Gerade (g) stellt deshalb, als Kurve g auf den Kegel ubertragen, nicht fur jedes Punktepaar A B auf g den kurzesten Weg auf der Kegelflache dar Demnach verlaufen alle kurzesten Wege auf der Kegelflache zwar langs derjenigen Kurven g, die aus in der Abwicklung gezeichneten Geraden (g) entstehen, aber nicht jedes Stuck einer solchen Kurve ist der kurzeste Weg zwischen ihren Endpunkten. Wie hier ohne Beweis hinzugefugt werden mag, gilt Entsprechendes bei beliebigen Flachen

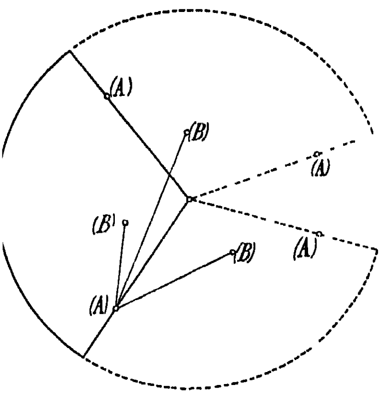


Fig 353

Die kurzesten Wege, die es auf einer Flache zwischen irgendzwei Punkten gibt, gehoren gewissen besonderen Kurven auf der Flache an, aber nicht jedes Stuck einer dieser Kurven ist der kürzeste Weg zwischen ihren Endpunkten. Besonders deutlich sieht man dies auf der Kugel, auf der die kürzesten Wege bekanntlich Teile von Großkreisen sind Ein Bogen AB eines Großkreises der Kugel ist nur dann auf der Kugel der kurzeste Weg von A nach B, wenn der Bogen nicht mehr als die Halfte des ganzen Großkreises betragt

Demnach liegt das Bedürfnis vor, diejenigen Kurven auf einer Flache, auf denen die kürzesten Wege zwischen je zwei Flachenpunkten verlaufen, mit einem besonderen Namen zu bezeichnen, weil nicht schlechtweg jedes Stück von ihnen ein kurzester Weg ist Man hat sie die geodatischen Linien auf der Flache genannt, weil sie zuerst bei der Ausmessung der Erdoberflache, in der Geodäsie, vorkamen.

Die geodatischen Linien eines Kegels sind demnach diejenigen Kurven auf dem Kegel, die bei der Abwicklung des Kegels in gerade Linien übergehen.

Anmerkung· Tangenten unendlich ferner Kurvenpunkte, d. h Asymptoten, traten zuerst bei der Hyperbel in Erscheinung, mit der wir uns weiter unten beschäftigen, siehe die Anmerkung zu Nr 257.

Was die geodätischen Linien betrifft, so stellte Joh. Bernoulli (Nr. 231) im Journal des Savans, S 304 der Pariser, S. 636 der hollandischen Ausgabe, sechs „Problèmes à résoudre", wovon das erste die Bestimmung der kurzesten Linie auf einer krummen

Fläche betraf (abgedruckt in Joh. Bernoullis „Opera omnia“, I. Bd. Lausanne und Genf 1742, Nr. XXXIX, S. 204/5). Damit beginnt die Geschichte der geodätischen Linien. Die Feldmessung wurde schon von Conrad von Ulm, Prediger zu Schaffhausen, als Geodasie bezeichnet in dem Buch „Geodaisia das ist Von gewisser und bewahrter Feldmessung eyn grundlicher Bericht“, Straßburg 1580. Von wem zuerst die Bezeichnung geodätische Linien eingeführt wurde, steht nicht fest. Sie wurde aber seit dem neunzehnten Jahrhundert zunächst für die kürzesten Linien auf dem Rotationsellipsoid angewandt, das durch Drehen einer Ellipse um eine ihrer Achsen entsteht. Die Erde ist angenähert ein Rotationsellipsoid. Ausführlicheres siehe in den „Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien“ von Paul Stäckel (geb. 1862 in Berlin, gest. 1919 als Professor an der Universität Heidelberg), Sitzungsberichte der Sächs. Ges. d. Wiss., math.-phys. Klasse, 45. Bd. 1893, S. 444—467.

253. Abwicklung des allgemeinen Kreiskegels. Wie schon die Aufgabe der Abwicklung eines allgemeinen Kreiszylinders (Nr. 250) eigentlich über den Rahmen der darstellenden Geometrie hinausgeht, gilt dasselbe in noch höherem Maße für die Aufgabe, einen allgemeinen Kreiskegel abzuwickeln. Ihre genaue Lösung erfordert Berechnungen, auf die wir nicht eingehen können. Zur angenäherten Abwicklung kann man so vorgehen: Man ersetzt den Kegel einerseits durch eine ihm umschriebene, andererseits durch eine ihm eingeschriebene Pyramide mit derselben Spitze, indem man als Grundvieleck der ersten Pyramide ein dem Grundkreis des Kegels umschriebenes regelmäßiges Vieleck und als Grundvieleck der zweiten ein diesem Kreis eingeschriebenes regelmäßiges Vieleck verwendet. Das erste Vieleck wählt man so, daß es den Kreis in den Ecken des zweiten berührt. Dabei berücksichtigt man auch die Symmetrie des Kegels: Die Ebene durch die Kegelachse, d. h. durch die Verbindende der Spitze mit der Mitte des Grundkreises, und durch die Kegelhöhe, d. h. das Lot von der Spitze auf die Grundebene, ist eine Symmetrieebene. Wir nennen sie die Hauptebene des Kegels. Sie schneidet den Grundkreis in zwei Gegenpunkten, und diese benutzt man mit als Ecken des eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks. Man braucht nämlich dann nur die Abwicklung der einen Hälfte des Kegelmantels zu bestimmen, indem die der anderen Hälfte dazu symmetrisch wird.

In Fig. 354 steht der Kegel auf der Grundrißtafel, und die Aufrißtafel ist parallel zur Hauptebene angenommen worden, so daß die Grundrißprojektion der Spitze S von der Projektionsachse denselben Abstand wie der Mittelpunkt des Grundkreises hat. Absichtlich sind in Fig. 354 Vielecke von nur sechs Seiten um- und eingeschrieben worden, damit die Unterschiede zwischen den Pyramidennetzen deutlich hervortreten. Die wahren Gestalten der Pyramidendreiecke findet man in bekannter Weise durch Umlegung. Die der umschriebenen Pyramide sind mit *1*, *2*, *3*, *4*, die der eingeschriebenen mit *1'*, *2'*, *3'* bezeichnet, indem wir nur die vorderen Hälften der Pyramiden berücksichtigen; von den Flächen *1* und *4* werden dabei nur Hälften gebraucht. Die Geraden von den Spitzen der Dreiecke *1*, *2*, *3*, *4* nach den Mitten ihrer Grundkanten sind Mantellinien des Kegels und als solche die von den Spitzen ausgehenden Kanten der Dreiecke *1'*, *2'*, *3'*, so daß man die Richtigkeit der Zeichnung nachprüfen kann. In Fig. 354 sind ferner die Halbnetze beider Pyramiden je für sich zusammengesetzt. Man vermittelt dann zwischen beiden Netzen: Die erwähnten vier Mantellinien des Kegels bilden im ersten Netz die Winkel α, β, γ, im zweiten die Winkel

α', β', γ' miteinander Die Winkel α, β, γ werden für den Kegelmantel zu groß, die Winkel α', β', γ' zu klein sein. Deshalb wird man etwa die Mittel aus α und α', aus β und β' und aus γ und γ' benutzen, die man leicht bestimmt, indem man um die Spitzen in der Abwicklung Kreise mit gleichem Radius schlagt und zwischen den auf ihnen bestimmten Bogenstucken vermittelt So kommt das zu unterst dargestellte Netz zustande, dessen Strahlen gleich den erwahnten vier Mantellinien des Kegels sind, und das durch den symmetrischen Teil erganzt worden ist Die Endpunkte der Strahlen wird man nun durch eine Kurve verbinden Wegen der symmetrischen Teilung muß diese Kurve da, wo sie auf den letzten Strahlen endet, zu diesen Strahlen senkrechte Tangenten haben

Selbstredend erfordert eine einigermaßen genaue Bestimmung der Abwicklung des Kegelmantels die Benutzung von Vielecken mit mehr als bloß sechs Ecken.

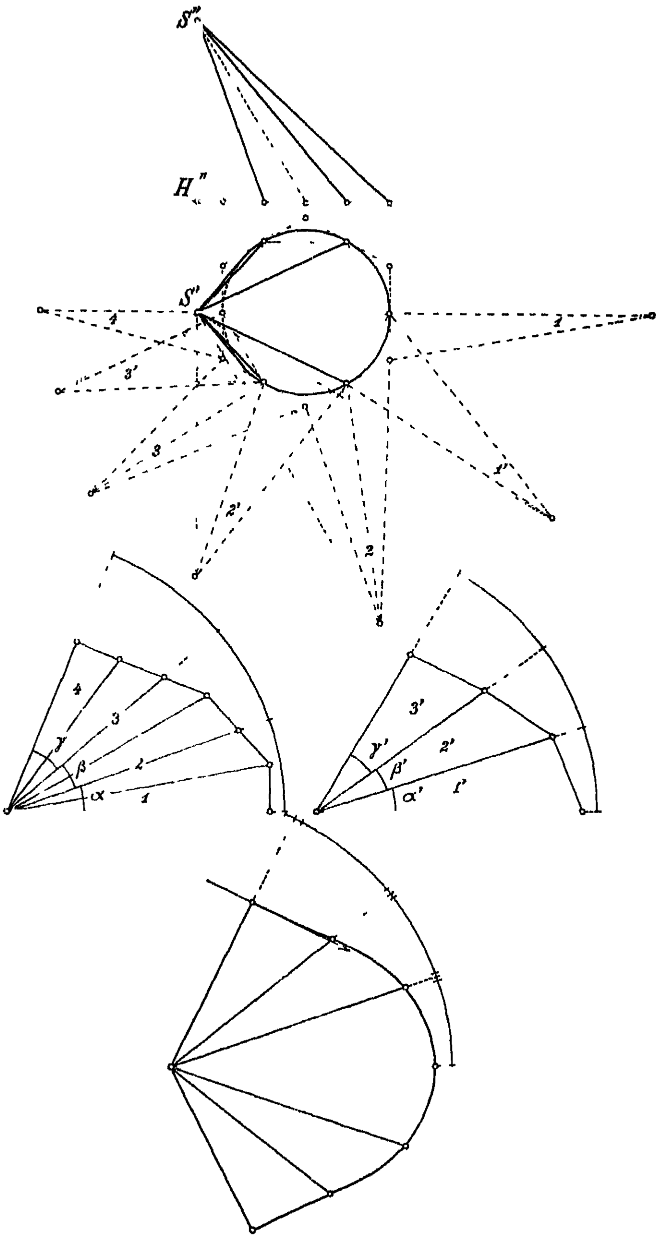


Fig. 354

254. Ebenen durch die Spitze eines Kegels. Die einfachsten Linien auf irgendeinem Kegel sind die geraden Mantellinien. Der Kegel kann von einer Ebene nur dann in

Mantellinien geschnitten werden, wenn die Ebene durch die Kegelspitze geht. Aber nicht jede Ebene durch die Spitze hat mit dem Kegel Mantellinien gemein. Es kann sein, daß die Ebene bloß die Spitze des Kegels enthalt.

Liegt insbesondere ein Kreiskegel vor, so sind drei Falle möglich Eine Ebene E durch die Kegelspitze hat entweder mit dem Kegel bloß diesen Punkt gemein, oder sie berührt den Kegel langs einer Mantellinie, oder sie schneidet den Kegel in zwei verschiedenen Mantellinien. Welcher der drei Falle eintritt, zeigt die Lage derjenigen Geraden s, in der die Ebene E die Grundkreisebene schneidet Im ersten Fall verlauft s ganz außerhalb des Grundkreises, im zweiten Fall berührt s ihn und im dritten schneidet s ihn.

Eine hierhergehorige Aufgabe, deren Losung spater gebraucht wird, besteht darin, festzustellen, welche Mantellinien eines Kreiskegels zu einer gegebenen Ebene parallel sind. Die fraglichen Mantellinien mussen in derjenigen Ebene E liegen, die zur gegebenen Ebene parallel ist und durch die Kegelspitze geht. Indem man die Schnittgerade s dieser Parallelebene mit der Grundkreisebene ermittelt, findet man die fraglichen Mantellinien als diejenigen, die nach den Schnittpunkten von s mit dem Grundkreis gehen.

Auch die Tangentialebenen des Kegels gehoren zu den Ebenen durch die Spitze. Deshalb mag hier erwähnt werden, daß man diejenigen Tangentialebenen, die durch einen gegebenen Punkt P gehen, dadurch bestimmt, daß man den Schnittpunkt Q der Geraden von der Kegelspitze S nach P mit der Grundkreisebene ermittelt und von Q aus die Tangenten an den Grundkreis zieht Die gesuchten Tangentialebenen sind die Ebenen durch SPQ und eine dieser Tangenten. Liegt statt des Kegels ein Zylinder vor, so zieht man durch P die Parallele zur Richtung des Zylinders und bringt sie in Q mit der Ebene des Grundkreises zum Schnitt, usw

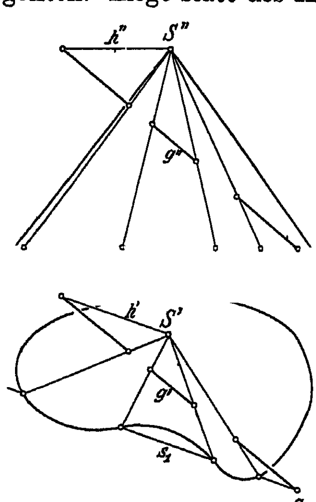


Fig 355

Die Durchbohrung des Kegels mit einer gegebenen Geraden g findet man, indem man durch g eine Hilfsebene E legt, die man mit dem Kegel zum Schnitt bringt (Nr 217). Die Hilfsebene wahlt man so, daß sie den Kegel in Mantellinien schneidet, d. h man legt sie durch die Kegelspitze Die Schnittpunkte der in dieser Hilfsebene gelegenen Mantellinien mit g sind die gesuchten Durchstoßungspunkte. In Fig 355 ist die Aufgabe für den Fall eines auf der Grundrißtafel stehenden Kegels mit beliebiger Grundlinie gelöst. Da die Hilfsebene E durch die Kegelspitze S geht, hat sie eine durch S gehende Höhenlinie h, namlich die Gerade von S nach dem ebenso hoch wie S gelegenen Punkt von g Die Grundriß-Spurgerade s_1 der Ebene E ist die Parallele zu h durch den Grundriß-Spurpunkt S_1 von g. In Fig. 356 ist die Durchbohrung eines Zylinders mit einer gegebenen Geraden g dargestellt,

und zwar ist angenommen, daß die Grundkurve des Zylinders eine beliebige Linie der Grundrißtafel sei. Als Hilfsebene E dient hier die zur Zylinderrichtung parallele Ebene durch g. Man nimmt also auf g irgendwo einen Punkt P an — möglichst weit von der Grundrißtafel entfernt — und zieht durch P die Parallele l zum Zylinder Die Grundriß-Spurgerade s_1 von E geht durch die Grundriß-Spurpunkte von g und l

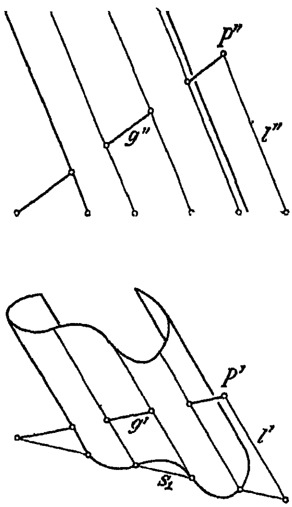


Fig 356

255. Übungen. Im Grundriß und Aufriß führe man die Lösung der in Nr. 91, 92, 93, 95 behandelten Aufgaben durch:

1) Zentrische Durchbohrung einer Kugel Die Achse des durchbohrenden Rotationszylinders sei als Gerade durch die Kugelmitte durch ihre beiden Projektionen gegeben, und der Radius des Zylinders sei nur wenig kleiner als der Kugelradius vorgeschrieben.

2) Hauptschnitte der Kugel für den Fall, wo der Nordpol N durch seinen Grundriß vorgeschrieben ist.

3) Schnitt zweier durch ihre Umrisse im Grundriß und Aufriß gegebener Kugeln.

4) Darstellung zweier einander berührender konischer Räder, wenn ihre Achsen durch zwei einander schneidende Geraden gegeben sind und das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten beider Räder vorgeschrieben ist

Auch die folgenden Aufgaben sind im Grundriß und Aufriß zu lösen

5) Darstellung eines die Grundrißtafel längs einer gegebenen Geraden SA berührenden Rotationskegels, von dem SA also eine von der Spitze S ausgehende Mantellinie sei. Der Winkel der Mantellinien mit der Kegelachse sei gegeben Man drehe den Kegel zunächst um das in S auf die Grundrißtafel errichtete Lot so weit, bis die Mantellinie SA zur Projektionsachse parallel wird, zeichne dann den Kegel in beiden Projektionen und drehe ihn zurück Oder so Man benutze eine neue Aufrißtafel parallel zu SA.

6) Darstellung des aus den beiden Stumpfen eines schräg durchschnittenen Rotationszylinders gebildeten Zylinderknies (Nr 247) für den Fall, wo die Achsen der beiden Stumpfe durch irgend zwei einander schneidende Geraden gegeben sind und der Radius vorgeschrieben ist. Man drehe die Ebene der Achsen zunächst in eine zur Grundrißtafel parallele Lage wie im Fall der konischen Räder in Nr 95.

7) Gegeben zwei einander schneidende Geraden a und m. Konstruktion des Kegels, der durch Rotation von m um a entsteht.

8) Die kleinste Kugel zu zeichnen, die zwei gegebene windschiefe Geraden berührt (Nr. 228).

9) Gegeben zwei auf der Grundrißtafel stehende schiefe Kreiskegel; festzustellen, ob es Mantellinien des einen gibt, die zu Mantellinien des anderen parallel sind. Man verschiebe den einen Kegel parallel mit sich

weit, bis seine Spitze die des anderen Kegels wird, und bestimme n den Kreis, in dem er die Grundrißtafel schneidet

10) Gegeben eine Ebene, z B. durch ein Paar Hauptlinien, ein Punkt S und ein Radius r. Es soll derjenige Rotationskegel konstruiert werden, der S als Spitze, r als Radius des Grundkreises hat und auf der gegebenen Ebene steht

§ 6. Die Kegelschnitte.

256. Über die ebenen Schnitte von Kreiskegeln. Liegt ein beliebiger Kreiskegel und eine nicht durch seine Spitze S gehende Ebene vor, so schneidet die Ebene den Kegel in einer krummen Linie Die Kegelfläche hat man sich dabei unbegrenzt vorzustellen, so daß die Mantellinien sowohl über den Grundkreis als auch über den Scheitel hinaus bis ins Unendliche fortgehen Die Schnittkurven heißen kurzweg die Kegelschnitte. Diese Bezeichnung ist eigentlich nicht erschöpfend, denn es fehlt darin die Angabe, daß es sich um Kreiskegel handelt, sowie die Angabe, daß es sich um ebene Schnitte handelt Trotzdem hat sich der Name Kegelschnitte eingebürgert, weil die ebenen Schnitte von Kreiskegeln eine ganz hervorragende Wichtigkeit haben. Hiernach sei verabredet, daß der Name Kegelschnitt nicht dann angewandt werden soll, wenn es sich nicht um einen Kreiskegel oder nicht um einen ebenen Schnitt handelt So z B. wollen wir den Schnitt eines Kegels mit einer Kugel nicht kurzweg einen Kegelschnitt nennen, vielmehr werden wir in derartigen Fällen immer die erforderlichen näheren Angaben machen

Es gibt drei wesentlich verschiedene Arten von Kegelschnitten. Da nämlich jeder Punkt der Schnittkurve der Schnittpunkt einer Mantellinie mit der schneidenden Ebene ist, kommen dem Kegelschnitt so viele unendlich ferne Punkte zu, als es zur gegebenen Ebene parallele Mantellinien gibt, und nach Nr. 254 sind in dieser Hinsicht drei Fälle möglich je nach der Lage der zur gegebenen Ebene parallelen Ebene durch die Kegelspitze S Erstens. Hat diese Parallelebene mit dem Kegel bloß den Punkt S gemein, so gibt es keine zur gegebenen Schnittebene parallele Mantellinie, so daß der Kegelschnitt vollständig im Endlichen verläuft Zweitens Wenn die Parallelebene durch die Kegelspitze eine Tangentialebene des Kegels ist, indem sie den Kegel längs einer Mantellinie m berührt, liegt auf dem Kegelschnitt der unendlich ferne Punkt von m. Drittens Wenn die Parallelebene durch die Kegelspitze den Kegel in zwei verschiedenen Mantellinien m_1 und m_2 schneidet, enthält der Kegelschnitt die unendlich fernen Punkte von m_1 und m_2. Ein Kegelschnitt hat demnach keinen, einen oder zwei verschiedene unendlich ferne Punkte. Im ersten Fall heißt er eine Ellipse, im zweiten eine Parabel, im dritten eine Hyperbel.

Wir hatten die Ellipse anders erklärt, nämlich als senkrechte Projektion eines Kreises (Nr. 72). Aber in Nr. 77 ergab sich, daß jeder völlig im Endlichen verlaufende ebene Schnitt eines Rotationskegels zu diesen Ellipsen gehört Demnach setzen wir uns nicht in Widerspruch mit dem Früheren, wenn wir nunmehr unter Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln die ebenen Schnitte von Rotationskegeln verstehen, je nachdem die Schnittebene zu

keiner Mantellinie oder zu einer Tangentialebene oder zu zwei verschiedenen Mantellinien parallel ist. Wohlbemerkt beschränken wir uns auf Rotationskegel, die schiefen Kreiskegel lassen wir bis auf weiteres beiseite

Diejenige Ebene, die durch die Achse des Rotationskegels geht und auf der Schnittebene senkrecht steht, ist sowohl für den Kegel als auch fur die Schnittebene eine Symmetrieebene; sie schneidet daher die Ebene in einer Symmetriegeraden des Kegelschnittes. Jedem Kegelschnitt kommt somit mindestens eine Symmetriegerade zu, d. h es gibt in seiner Ebene eine Gerade derart, daß jeder Punkt des Kegelschnittes durch Spiegelung an dieser Geraden wieder in einen Punkt des Kegelschnittes ubergeht.

Wenn dagegen ein schiefer Kreiskegel mit irgendeinei Ebene geschnitten wird, gibt es im allgemeinen keine Symmetrieebene, denn dem schiefen Kreiskegel kommt nur eine Symmetrieebene, seine Hauptebene (Nr. 253) zu, und sie wird im allgemeinen nicht zur Schnittebene senkrecht sein Man darf daher nicht erwarten, daß die ebenen Schnitte schiefer Kreiskegel Symmetriegeraden haben Dennoch gilt, wie wir spater (in Nr 267) beweisen werden, die merkwurdige Tatsache, daß auch jedem ebenen Schnitt eines schiefen Kreiskegels eine Symmetriegerade zukommt Es wird sich herausstellen, daß die ebenen Schnitte schiefer Kreiskegel keine anderen Kurven liefern als solche, die auch durch ebene Schnitte von Rotationskegeln entstehen Dies schon hier zu bemerken ist wichtig, weil daraus folgt, daß wir, obwohl wir uns vorerst auf die ebenen Schnitte von Rotationskegeln beschranken, trotzdem dadurch die Eigenschaften der ebenen Schnitte beliebiger Kreiskegel gewinnen

257. Hyperbolischer Schnitt des Rotationskegels. Die Grundkreisebene des geraden Kreiskegels sei als Grundrißtafel gewahlt, siehe Fig 357 Ein hyperbolischer Schnitt des Kegels geht hervor, wenn die Schnittebene zu zwei verschiedenen Mantellinien m_1 und m_2 parallel ist Demnach wahlen wir zunachst zwei Mantellinien m_1 und m_2 aus Die Aufrißtafel kann so angenommen werden, daß sie zur Ebene von m_1 und m_2 senkrecht ist, so daß m_1 und m_2 denselben Aufriß bekommen Die Mantellinien m_1 und m_2 mogen den Grundkreis in Y_1 und Y_2 schneiden Dann ist $Y_1 Y_2$ die Grundriß-Spurgerade der Ebene von m_1 und m_2, wahrend die Aufriß-Spurgerade dieser Ebene mit m_1'' und m_2'' zusammenfallt Als Ebene der Hyperbel ist nun eine zu dieser Ebene parallele Ebene zu nehmen, d h ihre Spurgeraden s_1 und s_2 werden parallel zu diesen Spurgeraden gewahlt Da die Hyperbelebene zur Aufrißtafel senkrecht ist, erscheint die Hyperbel im Aufriß geradlinig, und zwar bestehend aus zwei getrennten Stucken, von denen das eine auf dem eigentlichen Kegel, das andere auf dem Scheitelkegel liegt. Die Aufrisse P'' der Hyperbelpunkte P sind also bekannt; aus ihnen findet man entweder mit Hilfe der zugehörigen Mantellinien PQ oder mit Hilfe der durch sie gehenden Höhenkreise des Kegels die Grundrißprojektionen P' (Nr. 251). Um die wahre Gestalt der Hyperbel zu bekommen, legen wir ihre Ebene um die Spurgerade s_1 in die Grundrißtafel um. Dadurch gelangt der Hyperbelpunkt P in die mit (P) bezeichnete Lage Die Tangente des Hyperbelpunktes P fallt im

Aufriß mit s_2 zusammen Sie ist der Schnitt der Hyperbelebene mit derjenigen Ebene, die den Kegel längs der durch P gehenden Mantellinie SPQ berührt. Also ist der Grundriß-Spurpunkt T der Tangente der Schnittpunkt von s_1 mit der in Q an den Grundkreis gezogenen Tangente, und $T(P)$ ist die Tangente der umgelegten Hyperbel im Punkte (P). Dreht sich die Mantellinie SQ des Kegels um die Kegelachse herum, so wandert ihr Schnittpunkt P mit der Hyperbelebene auf der Hyperbel entlang. Sobald SQ dabei parallel zur Hyperbelebene wird, geht P in einen unendlich fernen Punkt der Hyperbel über Dies tritt ein, wenn SQ in die Lage m_1 oder m_2 kommt Der Punkt Q gelangt dabei nach Y_1 oder Y_2. Demnach sind die Grundriß-Spurpunkte X_1, X_2 der Tangenten der unendlich fernen Hyperbelpunkte, d. h die Grundriß-Spurpunkte der Asymptoten x_1, x_2 der Hyperbel (Nr 252), die Schnittpunkte von s_1 mit den in Y_1, Y_2 an den Grundkreis gelegten Tangenten Da ferner die Asymptoten nach den unendlich fern auf m_1 und m_2 gelegenen Punkten gehen, oder da die Asymptoten die Schnitte der Hyperbelebene mit den Tangentialebenen der Mantellinien m_1 und m_2 des Kegels sind, verlaufen sie parallel zu m_1 und m_2. Man bekommt demnach ihre Grundrißprojektionen x_1' und x_2' als die Parallelen zu m_1' und m_2' durch X_1 und X_2. Die Asymptoten schneiden sich, da sie in der Ebene der Hyperbel liegen, in einem Punkte M, dessen Aufriß aus seinem Grundriß M' zu bestimmen ist Man kann ihn auch in der Umlegung (M) darstellen, so daß die Geraden (x_1) und (x_2) von X_1 und X_2 nach (M) die Asymptoten der umgelegten Hyperbel sind. Ebenso wie man die Schnittpunkte der Asymptoten mit der Grundrißtafel findet, kann man auch ihre Schnittpunkte mit jeder Höhenebene ermitteln, z. B. mit derjenigen, worin der obere Begrenzungskreis des Scheitelkegels liegt. Dies ist in Fig. 357 angegeben.

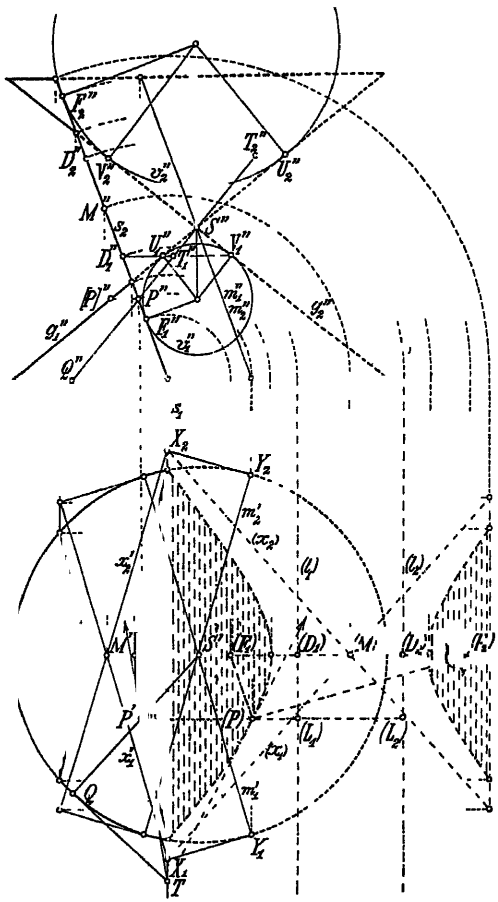


Fig 357

Die Hyperbel hat zwei getrennte Zweige, der eine gehört

dem Kegel unterhalb der Spitze S, der andere dem Scheitelkegel an Beide Zweige streben so ins Unendliche, daß sie sich den Asymptoten ohne Ende nähern. Man muß dabei im Auge behalten, daß die Kegelfläche nach unten und oben unbegrenzt fortgesetzt werden kann In Fig. 357 sind die Zweige nur bis zu den willkürlichen Begrenzungen gezogen, die durch den Grundkreis und den geradeso großen Kreis des Scheitelkegels gebildet werden Als das Innere der Hyperbel bezeichnet man diejenigen Teile ihrer Ebene, nach denen hin sie konkav ist Das sind die in der ursprünglichen Lage der Hyperbel im Innern des Kegels befindlichen Teile Sie sind in der Zeichnung mit Schraffen versehen.

Die Ebene durch die Kegelachse, die zur Hyperbelebene senkrecht, also zur Aufrißtafel parallel liegt, ist Symmetrieebene der Hyperbel. Sie schneidet somit die Hyperbelebene in einer Symmetriegeraden, die man die Hauptachse der Hyperbel nennt In ihr liegt der Schnittpunkt M der Asymptoten

Wie in Nr 77 legen wir nun in den Kegel solche Kugeln, die einerseits den Kegel je längs eines Höhenkreises berühren und andererseits die Hyperbelebene berühren Die Umrisse dieser Kugeln, deren es zwei gibt und zwar eine unterhalb, eine oberhalb der Spitze S, sind in der Aufrißprojektion diejenigen Kreise v_1'' und v_2'', die sowohl die äußersten Mantellinien g_1'' und g_2'' des Kegels als auch die Spurgerade s_2 berühren, und die Mittelpunkte der Kugeln liegen auf der Kegelachse In Fig 357 sind die Kugeln nur im Aufrisse dargestellt Sie berühren den Kegel in Kreisen, die im Aufriß als die Strecken $U_1''V_1''$ und $U_2''V_2''$ erscheinen Ferner berühren sie die Hyperbelebene auf der Hauptachse in Punkten F_1 und F_2, deren Aufrisse die Berührungspunkte der Umrisse v_1'' und v_2'' mit s_2 sind Diese beiden Punkte F_1 und F_2 lassen sich sofort in der Umlegung der Hyperbel als die Punkte (F_1) und (F_2) ausfindig machen

Die Mantellinie SQ durch einen beliebig gewählten Hyperbelpunkt P berührt die untere Kugel in einem Punkte T_1 und die obere Kugel in einem Punkte T_2. Diese Punkte haben ihre Aufrisse auf $U_1''V_1''$ und $U_2''V_2''$ Ferner berührt die Gerade, die in der Hyperbelebene von P nach F_1 geht, in F_1 die untere Kugel, und die Gerade, die in der Hyperbelebene von P nach F_2 geht, in F_2 die obere Kugel Demnach gehen von P aus an die untere Kugel die beiden Tangenten PT_1 und PF_1 und an die obere Kugel die beiden Tangenten PT_2 und PF_2. Da zwei von einem Punkt aus an eine Kugel gelegte Tangenten gleiche Längen haben, ist also

$$PF_1 = PT_1\,, \qquad PF_2 = PT_2$$

Die wahren Längen von PF_1 und PF_2 treten in der Umlegung der Hyperbel als die Strecken $(P)(F_1)$ und $(P)(F_2)$ auf Die Aufrißprojektionen von PT_1 und PT_2 sind kürzer als ihre wahren Längen. Wenn man aber die Mantellinie SP, die durch T_1 und T_2 geht, so weit dreht, bis sie diejenige wird, die im Aufriß als die äußerste Mantellinie g_1'' erscheint, gelangt P'' im Aufriß an eine Stelle $[P]''$ auf g_1'', während T_1'' und T_2'' nach U_1'' und U_2'' kommen, und dann zeigen die Strecken ihre wahren Längen. Demnach ist.

$$PT_1 = [P]''U_1''\,, \qquad PT_2 = [P]''U_2''\,.$$

Mithin ist die Differenz

$$PT_2 - PT_1 = [P]''U_2'' - [P]''U_1'' = U_1''U_2''.$$

Sie hat also eine Länge, die von der Wahl des Hyperbelpunktes P unabhängig ist. Wäre P nicht wie in Fig. 357 auf dem unteren, sondern auf dem oberen Hyperbelast gewählt worden, so hätte sich ergeben, daß $PT_1 - PT_2$ die von der Wahl des Punktes P unabhängige Länge $U_2''U_1''$, also wieder dieselbe Länge hätte. Da nun $PT_1 = PF_1$ und $PT_2 = PF_2$ ist, folgt:

Für jeden Punkt P der Hyperbel ist die Differenz der Abstände von den beiden auf ihrer Hauptachse gelegenen Punkte F_1 und F_2 konstant, nämlich gleich $U_1''U_2''$. Im Falle der Ellipse dagegen ergab sich, daß auf der Hauptachse zwei Punkte F_1 und F_2 so liegen, daß für jeden Punkt der Ellipse die Summe der Abstände von F_1 und F_2 konstant ist (Nr. 74 und 77). Die Punkte F_1 und F_2 heißen auch im Falle der Hyperbel die Brennpunkte.

Wir bringen nun die Ebenen derjenigen Kreise, in denen die Kugeln den Kegel berühren, mit der Hyperbelebene zum Schnitt. Die Schnittgeraden l_1 und l_2 sind zur Aufrißtafel, also auch zur Hauptachse der Hyperbel senkrecht. Sie treffen die Hauptachse in Punkten D_1 und D_2, deren Aufrisse sich sofort ergeben, so daß man l_1 und l_2 in der Umlegung als die Geraden (l_1) und (l_2) zeichnen kann. Die Entfernung des Hyperbelpunktes P von l_1 ist als Lot auf l_1 parallel zur Aufrißtafel, also gleich der Aufrißprojektion $P''D_1''$. Ebenso ist die Entfernung des Hyperbelpunktes P von l_2 gleich der Aufrißprojektion $P''D_2''$. Diese beiden Strecken sind auch in der Umlegung in ihren wahren Längen als die Strecken $(P)(L_1)$ und $(P)(L_2)$ zu sehen. Wir wissen nun, daß die Entfernungen des Hyperbelpunktes P von den Brennpunkten F_1 und F_2, die sogenannten Brennstrahlen, gleich $[P]''U_1''$ und $[P]''U_2''$ sind. Man bemerkt, daß die Strecken $P''D_1''$ und $[P]''U_1''$ sowie die Strecken $P''D_2''$ und $[P]''U_2''$ je zwischen zwei Parallelen zur Projektionsachse liegen. Wenn der Punkt P die Hyperbel durchläuft, bleiben daher die Verhältnisse $[P]''U_1'' : P''D_1''$ und $[P]''U_2'' : P''D_2''$ unverändert. Beide sind gleich $U_1''U_2'' : D_1''D_2''$, und dies Verhältnis ist größer als Eins. Daraus folgt:

In der Ebene der Hyperbel gibt es zwei zur Hauptachse senkrechte Geraden l_1, l_2, von denen jede einem der beiden Brennpunkte F_1, F_2 derart zugehört, daß für alle Punkte der Hyperbel das Verhältnis der Entfernung von einem Brennpunkt und der Entfernung von der zugehörigen Geraden konstant ist. Dies Verhältnis hat für beide Paare F_1, l_1 und F_2, l_2 denselben Wert und ist größer als Eins. Derselbe Satz gilt für die Ellipse (Nr. 74), aber in diesem Fall ist das Verhältnis kleiner als Eins. Es heißt auch jetzt die Exzentrizität, und auch jetzt heißen l_1 und l_2 die Leitlinien (Directrices).

In Nr. 262 wird sich ergeben, daß auch die Grundrißprojektion der Hyperbel in Fig. 357 eine Hyperbel ist; jedoch sind ihre Brennpunkte und Leitlinien keineswegs die Grundrisse der Brennpunkte und Leitlinien der Schnitthyperbel.

Anmerkung. Die Benennung der Asymptoten kommt zuerst bei Apollonius von Pergae (Nr. 77) vor (2. Buch, 1. Satz, a. a. O. S. 39).

258. Die Hyperbel als Schnitt eines Rotationskegels parallel zur Achse. Man ist nun imstande, ohne den Schnitt eines Rotationskegels herzustellen, eine Hyperbel Punkt für Punkt zu zeichnen Sind namlich in der Ebene die Brennpunkte F_1, F_2 gegeben und ist auch die konstante Differenz der Brennstrahlen vorgeschrieben — es sei dies in Fig 358 die unten angegebene Strecke $2a$ —, so schlagt man um F_1 und F_2 Kreise mit einem beliebig groß gewahlten Radius sowie diejenigen Kreise, deren Radien um jene Differenz größer sind Die kleineren Kreise schneiden die größeren in insgesamt vier Punkten P_1, P_2, P_3, P_4, die der Hyperbel angehören Diese Punkte liegen symmetrisch in bezug auf zwei Geraden, namlich in bezug auf die Gerade F_1F_2, die schon als die Hauptachse bezeichnet worden war, und in bezug auf die Mittelsenkrechte von F_1F_2, die man die Nebenachse der Hyperbel nennt Somit hat die Hyperbel ebenso wie die Ellipse zwei Symmetriegeraden, die aufeinandersenkrecht stehen Ihr Schnittpunkt, der Mittelpunkt M von F_1F_2, heißt der Mittelpunkt der Hyperbel, jede durch ihn gehende Sehne der Hyperbel heißt ein Durchmesser Die Berechtigung fur diese Bezeichnungen liegt darin, daß jede durch M gehende Sehne, wie z B P_1P_3 und P_2P_1, ihre Mitte in M hat

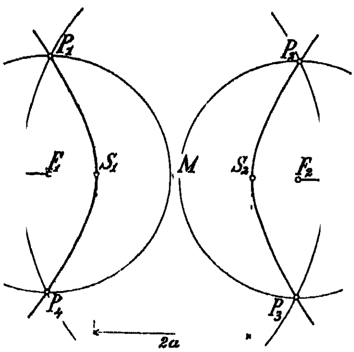


Fig 358

Übrigens muß man die konstante Differenz kleiner als F_1F_2 annehmen, denn fur irgendeinen Hyperbelpunkt P ist die Differenz der Brennstrahlen PF_1 und PF_2 immer kleiner als die dritte Seite F_1F_2 des Dreiecks F_1F_2P Auf der Hauptachse liegen zwei Hyperbelpunkte S_1 und S_2 Sie sind von M um die Halfte der konstanten Differenz entfernt und heißen die Scheitel (weil sie auf einer Symmetriegeraden liegen, vgl Nr 249) Man braucht sie nicht wie im Fall der Ellipse als Hauptscheitel zu bezeichnen, da es keine Scheitel auf der Nebenachse gibt Denn die Nebenachse trifft die Hyperbel uberhaupt nicht

Wenn man auf einer Geraden vier Punkte S_1, S_2 und F_1, F_2 so annimmt, daß S_1S_2 und F_1F_2 die Mitte M gemein haben und daß $S_1S_2 < F_1F_2$ ist, kann man nach dem Vorhergehenden immer eine, aber auch nur eine Hyperbel ermitteln, deren Brennpunkte F_1, F_2 und deren Scheitel S_1, S_2 sind Aber es muß noch gezeigt werden, daß die entstehende Kurve stets, wie auch jene vier Punkte in der angegebenen Art angenommen werden mögen, als Schnitt eines Rotationskegels erzeugt werden kann. Wir tun dies, indem wir sogar zeigen, daß die Kurve stets als Schnitt eines Rotationskegels parallel zu seiner Achse hergestellt werden kann. Zu diesem Zwecke stellen wir die Ebene der Kurve senkrecht zur Projektionsachse, und zwar so, daß die Hauptachse lotrecht wird, siehe Fig 359 linker Hand, worin s_1 und s_2 die Spurgeraden der Ebene bedeuten, die Kurve demnach im Grundriß und im Aufriß geradlinig erscheint. Ferner legen wir an die Ebene berührend zwei kongruente Kugeln, deren Berührungspunkte die gegebenen Brennpunkte F_1 und F_2 seien. Benutzen wir dann den inneren

Ähnlichkeitspunkt dieser Kugeln (Nr. 234) als Spitze M eines Rotationskegels, der beide Kugeln umhüllt, so schneidet die Kurvenebene den Kegel in einer Hyperbel, weil sie zu zwei Mantellinien, der vordersten und hintersten Mantellinie, parallel ist Diese Schnitthyperbel hat nach voriger Nummer die Brennpunkte F_1 und F_2, und augenscheinlich sind

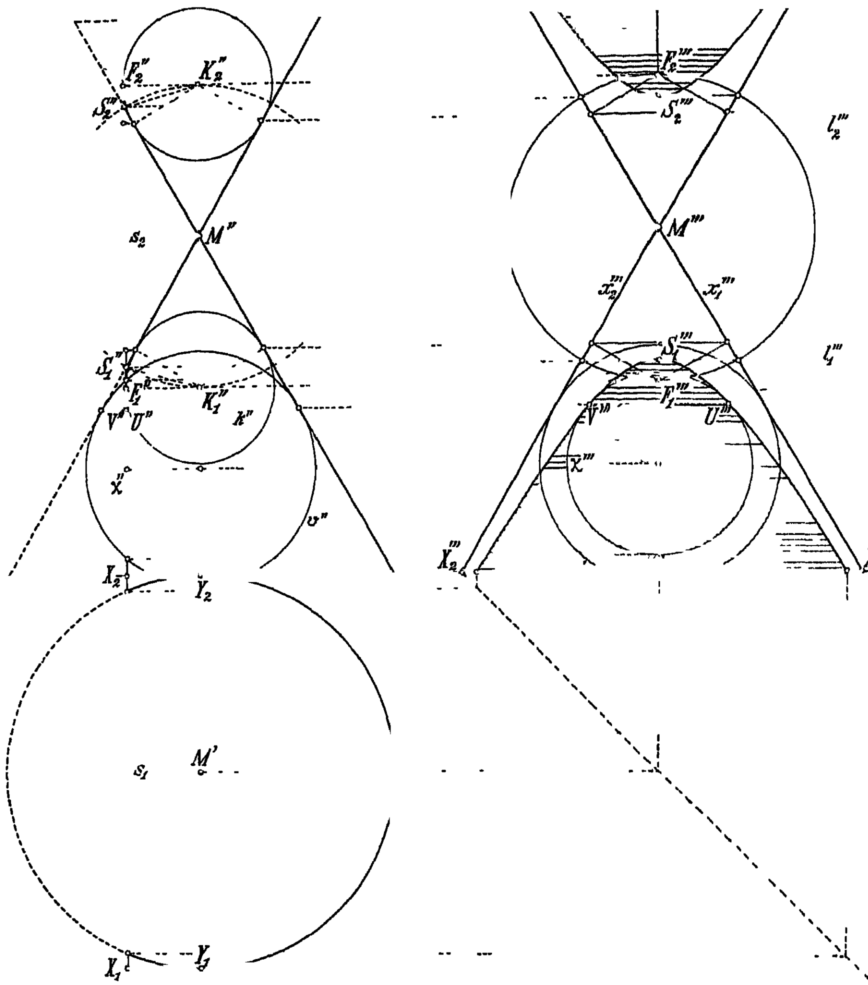


Fig 359

S_1 und S_2 ihre Scheitel, d. h die Schnitthyperbel ist gerade diejenige Kurve, von der wir soeben ausgingen Also gilt der Satz:

Jeder hyperbolische Schnitt eines Rotationskegels, d. h. jeder zu zwei verschiedenen Mantellinien eines Rotationskegels parallele ebene Schnitt liefert eine Hyperbel, die insbesondere als Schnitt eines gewissen Rotationskegels parallel zu seiner Achse erzeugt werden kann.

Deshalb können wir uns, um die Eigenschaften der Hyperbel noch

weiter zu erforschen, auf den besonderen Fall beschränken, wo die Hyperbelebene zur Achse des Rotationskegels parallel ist. Die wahre Gestalt der Hyperbel zeigt der Kreuzriß (Nr 209), weil er zur Hyperbelebene parallel ist, und darin liegt der Vorteil für die weitere Untersuchung der Gestalt der Hyperbel. Die Kreuzrißprojektionen der Scheitel, Brennpunkte, Asymptoten und Leitlinien sind ja hiernach zugleich die Scheitel, Brennpunkte, Asymptoten und Leitlinien der im Kreuzriß auftretenden Hyperbel. Nach voriger Nummer bekommt man die Asymptoten x_1, x_2, indem man in den Endpunkten Y_1 und Y_2 der zur Hyperbelebene parallelen Mantellinien die Tangenten an den Grundkreis legt, sie mit s_1 in X_1 und X_2 zum Schnitt bringt und durch X_1 und X_2 die Parallelen x_1 und x_2 zu jenen beiden Mantellinien legt. Im Kreuzriß decken sich x_1''' und x_2''' mit den äußersten Mantellinien des Kegels, so daß also hier die äußersten Mantellinien zugleich die Asymptoten darstellen Im Kreuzriß sind, wie gesagt, F_1''' und F_2''' die Brennpunkte, und an denselben Stellen liegen die Kreuzrisse der Mittelpunkte K_1, K_2 der beiden Kugeln Da K_1'' und K_2'' die Mittelpunkte derjenigen Kreise sind, die s_2 sowie die äußersten Mantellinien im Aufriß berühren, teilen $S_1''K_1''$ und $S_2''K_2''$ die Winkel zwischen s_2 und den äußersten Mantellinien im Aufriß in gleiche Teile, und weil $\sphericalangle F_1''S_1''K_1'' = \sphericalangle M''K_1''S_1''$ sowie $\sphericalangle F_2''S_2''K_2'' = \sphericalangle M''K_2''S_2''$ ist, sind $M''S_1''K_1''$ und $M''S_2''K_2''$ gleichschenklige Dreiecke mit der Spitze M'' Mithin ist $M''K_1'' = M''S_1'' = M''S_2'' = M''K_2''$ Gehen wir zum Kreuzriß über, so besagt dies Wenn man in den Scheiteln S_1''' und S_2''' der hier vorliegenden Hyperbel die Lote auf die Hauptachse errichtet, treffen sie die Asymptoten x_1''', x_2''' in Punkten desjenigen Kreises um den Hyperbelmittelpunkt M''', der durch die Brennpunkte F_1''', F_2''' geht

Nach voriger Nummer bestimmen wir die Leitlinien l_1, l_2, indem wir die Ebenen derjenigen Kreise, längs deren die Kugeln den Kegel berühren, mit der Hyperbelebene zum Schnitt bringen Die beiden Kreise erscheinen im Aufriß als Strecken, deren linke Endpunkte auf den äußersten Mantellinien die Fußpunkte der Lote von K_1'' und K_2'' auf die äußersten Mantellinien im Aufriß sind Da nun die Leitlinien im Kreuzriß, also l_1''' und l_2''', in den Höhen der beiden Kreise liegen, und die Brennpunkte F_1''', F_2''' in den Höhen der Kugelmitten, ergibt sich Die Leitlinien der Hyperbel im Kreuzriß gehen durch die Fußpunkte der Lote von den Brennpunkten F_1''', F_2''' auf die Asymptoten x_1''', x_2'''

An Stelle der bisher benutzten beiden Kugeln nehmen wir jetzt irgendeine größere, dem Kegel einbeschriebene Kugel an, etwa diejenige, deren Aufriß den Umriß v'' hat Diese Kugel berührt den Kegel längs eines Kreises k, der im Aufriß als Strecke k'' erscheint, und schneidet die Hyperbelebene in einem Kreis $\varkappa$, der ebenfalls im Aufriß als Strecke $\varkappa''$ erscheint Da die Kugel vollkommen innerhalb des Kegels liegt, die Hyperbel aber auf dem Kegel, wird der Schnittkreis $\varkappa$ von dem einen Zweig der Hyperbel umfaßt. Nur an zwei Stellen U und V kommt er bis an die Hyperbel heran, nämlich da, wo der Kreis k die Hyperbelebene schneidet Mithin berührt der im Innern der Hyperbel gelegene Kreis $\varkappa$ die Kurve in U und V Im Kreuzriß tritt dies in Erscheinung: Die Kreuzrißprojektion $\varkappa'''$ des Kreises $\varkappa$ berührt hier die

Hyperbel in U''', V'''. Lassen wir nun die soeben dem Kegel einbeschriebene Kugel kleiner werden, so wird auch der Kreis $\varkappa'''$ kleiner, indem seine Berührungspunkte U''' und V''' nach dem Scheitel S_1''' hinstreben. Schließlich kann man die Kugel so klein wählen, daß die Punkte U''' und V''' in S_1''' zusammenrücken. Dann wird aus $\varkappa'''$ ein Kreis, der die Hyperbel im Scheitel S_1''' doppelt berührt, also der **Krümmungskreis des Scheitels** (Nr. 80). Dieser Fall tritt ein, wenn k'' gerade durch S_1'' geht, d. h. wenn der Mittelpunkt der eingeschriebenen Kugel im Aufriß auf dem in S_1'' auf die äußerste Mantellinie errichteten Lote liegt. In derselben Höhe wie dieser Mittelpunkt liegt der des Kreises k. Demnach ergibt sich der Mittelpunkt desjenigen Kreises, der im Kreuzriß der Krümmungskreis des Scheitels S_1''' ist, wenn man in demjenigen Punkte, in dem die Asymptote x_1''' oder x_2''' den Kreis um M''' durch F_1''' schneidet, das Lot auf die Asymptote errichtet und mit der Hauptachse zum Schnitt bringt.

Da die Kreuzrißhyperbel mit der wahren Schnitthyperbel kongruent ist, gilt also zusammengefaßt für die Konstruktion der Asymptoten, Leitlinien und Mittelpunkte der Scheitelkrümmungskreise einer Hyperbel das Folgende, siehe Fig. 360.

Sind die Scheitel S_1, S_2 und die Brennpunkte F_1, F_2 einer Hyperbel gegeben, also so, daß alle vier auf einer Geraden, der Hauptachse, liegen, S_1S_2 und F_1F_2 die gemeinsame Mitte M haben und S_1S_2 F_1F_2 ist, so schlage man um den Mittelpunkt M der Hyperbel den Kreis, der durch die Brennpunkte F_1, F_2 geht. Er trifft die in den Scheiteln S_1, S_2 auf die Hauptachse errichteten Lote, d. h. die Scheiteltangenten, in Punkten der durch M gehenden Asymptoten x_1, x_2. Die in diesen Punkten auf die Asymptoten errichteten Lote treffen die Hauptachse in den Mittelpunkten K_1, K_2 der Krümmungskreise der Scheitel S_1, S_2. Die Leitlinien l_1, l_2 gehen durch die Fußpunkte der Lote von den Brennpunkten F_1, F_2 auf die Asymptoten x_1, x_2 und sind zur Hauptachse senkrecht. Ferner liegen die Fußpunkte der Lote von F_1, F_2 auf die Asymptoten auf dem Kreis um M durch die Scheitel S_1, S_2.

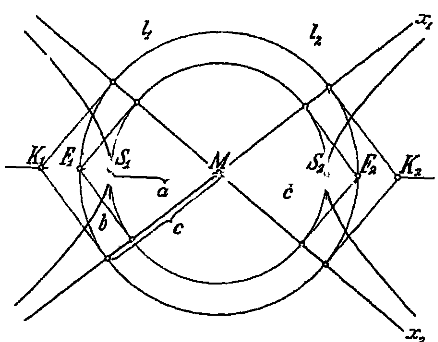


Fig. 360

Man pflegt die Strecke $MS_1 = MS_2$ wie bei der Ellipse mit a zu bezeichnen. Die Entfernungen MF_1, MF_2 der Brennpunkte von der Mitte bezeichnet man ebenfalls wie bei der Ellipse mit c. Während aber im Fall der Ellipse $a > c$ ist, hat man jetzt $c > a$. Die Scheiteltangenten werden durch die Asymptoten so begrenzt, daß die Scheitel die Mitten der Strecken sind. Die Hälften dieser Strecken, also von den Scheiteln bis zu den Asymptoten, bezeichnet man mit b. Es ist

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

Die Strecke $2a$ nennt man die Länge der Hauptachse der Hyperbel. Bei der Hyperbel kann eigentlich nicht von der Länge der Nebenachse die Rede sein, weil ja die in M auf die Hauptachse senkrecht errichtete Nebenachse die Hyperbel gar nicht trifft. Da aber bei der Ellipse zwischen a, c und der halben Nebenachse b die Beziehung $a^2 = b^2 + c^2$ besteht (Nr. 74), die an die soeben für die Hyperbel gefundene erinnert, nennt man die Strecke $2b$ die Länge der Nebenachse der Hyperbel. Das ist nur eine aus gewissen Gründen bequeme Redeweise. Die Strecke $2b$ ist die Länge der Scheiteltangenten, gemessen zwischen den Asymptoten. Offenbar ist b auch die Entfernung der Asymptoten von den Brennpunkten. Blickt man auf Fig. 359 zurück, so sieht man, daß die Strecke b die Entfernung der zur Kegelachse parallelen Hyperbelebene von dieser Achse angibt.

Die Entfernung der Leitlinien l_1 und l_2 von der Mitte sei mit d bezeichnet. Nach dem Vorhergehenden ist $cd = a^2$, also wie bei der Ellipse $d = a^2 : e$ (Nr. 74). Der Scheitel S_1 hat vom Brennpunkt F_1 die Entfernung $c - a$ und von der zugehörigen Leitlinie l_1 die Entfernung $a - d$. Das Verhältnis beider Strecken ist nach Nr. 257 die Exzentrizität der Hyperbel. Eine einfache Ausrechnung zeigt, daß die Exzentrizität wie im Fall der Ellipse gleich $c : a$ ist, aber im Fall der Ellipse ist $c < a$, hier dagegen $c > a$, also die Exzentrizität, wie wir schon früher sahen, größer als Eins.

259. Ermittlung der Hyperbel aus den Asymptoten und einem Punkt oder einer Tangente. Die in Fig. 361 vorliegende Hyperbel mit den Asymptoten x_1, x_2 und dem Mittelpunkt M kann nach voriger Nummer als Aufrißprojektion eines hyperbolischen Schnittes eines Rotationskegels parallel zur Kegelachse für den Fall aufgefaßt werden, wo die Aufrißtafel zur Schnittebene parallel ist. Die Tafel kann man sich insbesondere durch die Kegelachse gelegt denken. Der zugehörige Grundriß ist angedeutet. Da wir aus dieser Auffassung der Figur nur Eigenschaften der Hyperbel ableiten wollen, sehen wir davon ab, Doppelakzente bei der Bezeichnung der Punkte anzubringen. Wie in voriger Nummer bemerkt wurde, liegt der zu einem Punkt P der Hyperbel gehörige Grundriß in der Entfernung b von der Kegelachse, wenn b die halbe Nebenachse der Hyperbel ist. Die Höhenebene durch P schneidet den Kegel in einem Kreis vom Durchmesser UV, und der Grundriß zeigt, daß

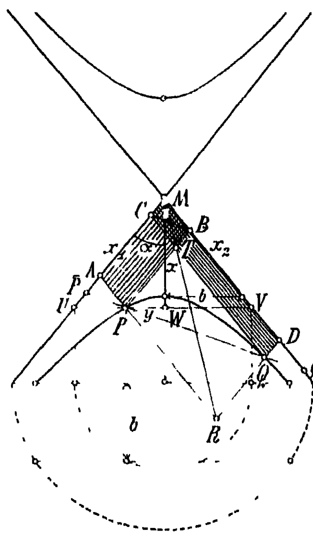


Fig. 361

$$UP \cdot PV = b^2$$

ist. Die Parallelen zu den Asymptoten x_2 und x_1 durch P mögen x_1 und x_2 in A und B schneiden. Das Verhältnis $UP : AP$ und das Verhältnis $PV : PB$ ist für alle Punkte P der Hyperbel dasselbe, weil es nur vom Winkel 2α der Asymptoten abhängt. Demnach folgt aus der

vorstehenden Formel, daß auch das Produkt $AP \cdot PB$ für alle Hyperbelpunkte konstant ist. Wird es mit $\sin 2\alpha$ multipliziert, so ergibt sich der Flächeninhalt des Parallelogramms $MAPB$. Daher gilt der Satz:

Die Parallelen zu den Asymptoten durch einen Hyperbelpunkt schließen zusammen mit den Asymptoten ein Parallelogramm ein, dessen Flächeninhalt konstant ist, wie auch der Hyperbelpunkt gewählt sein mag.

Ist also Q irgendein anderer Punkt der Hyperbel und treffen die durch ihn gezogenen Parallelen zu den Asymptoten in C und D statt A und B ein, so hat das Parallelogramm $MCQD$ denselben Inhalt wie das Parallelogramm $MAPB$. Daraus folgt nach einem bekannten Satz über flächengleiche Parallelogramme mit einem gemeinsamen Winkel 2α: Bringt man AP mit DQ in R zum Schnitt, so entsteht ein Parallelogramm $MARD$, auf dessen Diagonale MR der Schnittpunkt T von PB und CQ liegt. Nun möge die Gerade PQ die Asymptoten x_1, x_2 in $\bar{P}$ und $\bar{Q}$ treffen. Dann ist $\bar{P}P$ ebenso wie $Q\bar{Q}$ parallel und gleich CB. Fassen wir also die Gerade $\bar{P}PQ\bar{Q}$ allein ins Auge, so haben wir den Satz bekommen: *Eine Sekante der Hyperbel hat mit der Kurve eine Sehne PQ gemein, deren Mittelpunkt zugleich der Mittelpunkt derjenigen Strecke $\bar{P}\bar{Q}$ der Sekante ist, die von den Asymptoten der Hyperbel begrenzt wird.*

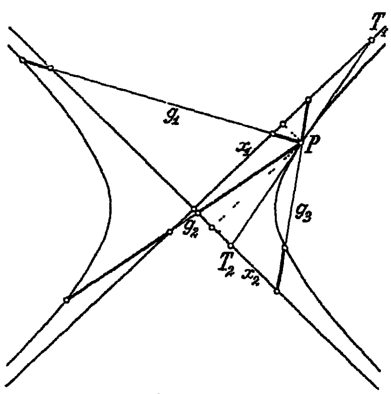


Fig 362

Hierauf beruht eine ungemein einfache Konstruktion der Punkte einer Hyperbel für den Fall, wo die Asymptoten x_1, x_2 gegeben sind und außerdem ein Punkt P der Hyperbel bekannt ist, nämlich die *Papierstreifen-Konstruktion*, so genannt, weil sie mit einem Papierstreifen bequem ausgeführt wird. Man zieht durch P beliebige Geraden g_1, g_2, g_3 ..., siehe Fig 362, und trägt diejenigen Strecken, die sich auf den Geraden von P an bis zu einer Asymptote erstrecken, von den Schnittpunkten der Geraden mit der anderen Asymptote aus im entgegengesetzten Sinn ab. Die Endpunkte sind dann Punkte der Hyperbel. *Eine Hyperbel ist demnach vollständig bestimmt, sobald ihre Asymptoten gegeben sind und ein Punkt der Kurve bekannt ist.*

Macht man die Sekante $\bar{P}PQ\bar{Q}$ in der vorigen Fig. 361 zur Tangente der Hyperbel, so rücken P und Q zusammen, d. h.: *Der Berührungspunkt der Tangente ist der Mittelpunkt derjenigen Strecke, die von den Asymptoten auf der Tangente abgeschnitten wird.* Man bekommt demnach die Tangente eines Hyperbelpunktes P wie in Fig. 362: Man zieht durch P die Parallele zu einer Asymptote, sie schneidet auf der anderen Asymptote eine Strecke ab, die man über den Schnittpunkt hinaus verdoppelt. Der Endpunkt T_1 oder T_2 gehört dann der Tangente an.

Man sieht ferner: Eine Hyperbel ist vollkommen bestimmt, sobald ihre Asymptoten gegeben sind und eine Tangente der Kurve bekannt ist. Denn dann kennt man den Berührungspunkt als Mittelpunkt der von den Asymptoten auf der Tangente abgeschnittenen Strecke.

Anmerkung. Die oben aufgestellte Formel $UP \cdot PV = b^2$ führt leicht zur Gleichung der Hyperbel in der analytischen Geometrie. Ist nämlich W der Mittelpunkt der Strecke UV in Fig. 361 und wird $MW = x$, $WP = y$ gesetzt, so ist $UP = UW - y$ und $PV = WV + y = UW + y$, also $UP \cdot PV = UW^2 - y^2$. Ferner ist $UW = x \operatorname{tg}\alpha$. Also kommt für alle Punkte der Hyperbel

$$x^2 \operatorname{tg}^2\alpha - y^2 = b^2.$$

Da b die Hälfte der Strecke ist, die von den Asymptoten auf den Scheiteltangenten ausgeschnitten wird (Nr. 258), hat man ferner $\operatorname{tg}\alpha = b : a$. Mithin ergibt sich durch Division mit b^2

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

die Gleichung der Hyperbel, bezogen auf die Haupt- und Nebenachse als Koordinatenachsen. In der Anmerkung zu Nr. 73 ergab sich als Gleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Auch dies Entsprechen ist ein Grund dafür, daß man b die halbe Nebenachse der Hyperbel nennt.

260. Zeichnung der Hyperbel. Will man eine Hyperbel zeichnen, so muß man vorher ihre Asymptoten herstellen, denn durch sie wird der Verlauf der Kurve im ganzen gekennzeichnet. Nach Nr. 257 findet man die Asymptoten, indem man zunächst den Kegel mit der zur Hyperbelebene parallelen Ebene durch die Kegelspitze in den Mantellinien m_1 und m_2 zum Schnitt bringt. Die Asymptoten sind nämlich die Schnitte der Hyperbelebene mit den Tangentialebenen der Mantellinien m_1 und m_2 und verlaufen in denselben Richtungen wie m_1 und m_2.

Nachdem man die Asymptoten festgestellt hat, wird man meistens in der Lage sein, wenigstens einen Punkt oder eine Tangente der Hyperbel zu bestimmen. Kennt man eine Tangente, so ist die Mitte der von den Asymptoten auf ihr abgeschnittenen Strecke nach voriger Nummer der Berührungspunkt. Nicht immer ergeben sich dagegen unmittelbar auch die Scheitel der Hyperbel. Vielmehr hat man meistens die Aufgabe zu lösen, die Scheitel zu bestimmen, falls die Asymptoten x_1, x_2 sowie ein Hyperbelpunkt P gegeben sind. Indem man denjenigen Winkel der Asymptoten, dem der Punkt P angehört, in zwei gleiche Teile zerlegt, bekommt man zunächst die Gerade der Hauptachse. Aus Fig. 361 der letzten Nummer erhellt nun sofort: Wird das Lot von P auf die Hauptachse gefällt und das zwischen den Asymptoten gelegene Stück dieses Lotes als Durchmesser eines Halbkreises benutzt, so ist die Höhe des Halbkreises über P die Länge b der halben Nebenachse, siehe Fig. 363. Demnach trägt man diese Strecke b von der Kreismitte aus auf dem Durchmesser ab; dann zieht man durch den Endpunkt die Parallele zur Hauptachse. Sie schneidet die Asymptoten in Punkten, von denen aus man nur noch die Lote auf die Hauptachse zu fällen braucht, um in den Fußpunkten die Scheitel S_1 und S_2 zu bekommen.

Diese Bestimmung der Scheitel ist um so genauer, je genauer die Höhe b des Halbkreises uber dem Punkt P ermittelt werden kann, d h. je näher P an der Hauptachse liegt, weil der Endpunkt dieser Höhe sonst als spitzwinkliger Schnitt mit dem Kreis weniger scharf bestimmt wird Dies liegt in der Natur der Sache Die Schar aller Hyperbeln, denen dieselben Asymptoten x_1 und x_2 zukommen, verlauft namlich so, daß sich die Hyperbeln in der Nahe der Hauptachse am weitesten voneinander entfernen, wahrend sie in der Nahe der Asymptoten eng zusammenrücken Man sollte daher zur Bestimmung der Scheitel der Hyperbel auf Grund von Fig. 363 immer einen möglichst nahe bei der Hauptachse, d. h möglichst nahe bei einem Scheitel gelegenen Hyperbelpunkt P benutzen.

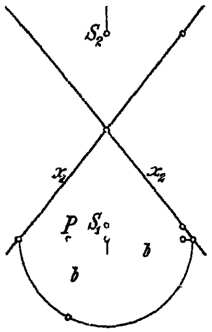


Fig 363

Man errichtet ferner in den Punkten, in denen die in Fig 363 parallel zur Hauptachse gezogene Gerade die Asymptoten trifft, die Lote auf den Asymptoten. Sie schneiden die Hauptachse nach Nr. 258 in den Mittelpunkten der Krummungskreise der Scheitel S_1 und S_2. Da die Krummung der Hyperbelaste von den Scheiteln an rasch abnimmt, darf man aber nur verhältnismaßig viel kurzere Bogenstucke der Krummungskreise in der Nahe der Scheitel als im Falle der Ellipse (Nr 82) verwenden

Weiterhin bestimmt man noch die drei zu dem bekannten Hyperbelpunkt P hinsichtlich der Hyperbelachse und des Hyperbelmittelpunktes symmetrisch gelegenen Hyperbelpunkte Außerdem kann man, falls es nötig sein sollte, mittels der Papierstreifenkonstruktion (Nr. 259) noch einige Punkte der Kurve ausfindig machen Auch tut man gut, außerdem ihre Tangenten nach Nr 258 zu zeichnen Alsdann ist es leicht, die Hyperbelaste mit Hilfe des Kurvenlineals auszuziehen

261. Konjugierte Durchmesser der Hyperbel. Zieht man lauter parallele Geraden, so bestimmen die Asymptoten der Hyperbel auf ihnen Strecken, deren Mittelpunkte auf einer Geraden durch den Mittelpunkt der Hyperbel, also auf einem Durchmesser liegen. Nach Nr 259 sind nun die Mittelpunkte der Strecken zugleich die Mittelpunkte der auf jenen Geraden gelegenen Sehnen der Hyperbel Daher gilt wie bei der Ellipse (Nr 72) der Satz Der Ort der Mitten paralleler Sehnen einer Hyperbel ist ein Durchmesser der Kurve Indem man wieder die Asymptoten statt der Hyperbel benutzt, erkennt man weiterhin: Zu jedem Durchmesser der Hyperbel gibt es einen zweiten derart, daß jede Hyperbelsehne, die zu einem von beiden parallel ist, vom anderen in ihrer Mitte getroffen wird. Derartige Durchmesserpaare heißen wie im Fall der Ellipse konjugierte Durchmesser Insbesondere leuchtet ein, daß die Punkte, in denen ein Durchmesser die Hyperbel trifft, Tangenten haben, die zum konjugierten Durchmesser parallel sind

Jedes konjugierte Durchmesserpaar der Hyperbel wird durch die Asymptoten getrennt, d. h. wenn der eine Durchmesser die Hyperbel schneidet, tut es der andere nicht. Zur Hauptachse ist

die Nebenachse konjugiert. Nach Nr 186 ergibt sich sofort Die konjugierten Durchmesserpaare einer Hyperbel bilden eine hyperbolische Strahleninvolution, ihre Doppelstrahlen sind die Asymptoten. Jede der beiden Asymptoten ist also zu sich selbst konjugiert. Die hyperbolischen Strahleninvolutionen haben gerade daher ihren Namen, daß sie bei den konjugierten Durchmessern der Hyperbel auftreten, ebenso wie die konjugierten Durchmesser einer Ellipse eine elliptische Involution ausmachen (Nr 182)

262. Parallelprojektion der Hyperbel. Nach Nr 259 wird eine Hyperbel vollkommen durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß jede Sehne PQ der Kurve ihre Mitte im Mittelpunkt der Strecke $\bar{P}\bar{Q}$ hat, die von den Asymptoten auf der Sekante PQ abgeschnitten ist, denn man kann die Hyperbel auf Grund dieses Satzes mittels der Papierstreifenkonstruktion Punkt fur Punkt gewinnen Da nun jede Parallelprojektion so beschaffen ist, daß die Projektion der Mitte einer Strecke die Mitte der Projektion der Strecke ist, folgt sofort, daß jede Parallelprojektion einer Hyperbel ebenfalls eine Hyperbel ist und daß dabei die Asymptoten der Hyperbel wieder als Asymptoten projiziert werden

Mithin ist die Grundrißprojektion der Schnitthyperbel in Fig 357 von Nr 257 ebenfalls eine Hyperbel Wie schon dort betont wurde, sei nochmals hervorgehoben, daß die Brennpunkte und Leitlinien vermoge der Parallelprojektion nicht in die Brennpunkte und Leitlinien der Bildhyperbel verwandelt werden Auch liefert die Hauptachse der Hyperbel vermoge der Projektion im allgemeinen nicht die des Bildes, weil die Bildgerade im allgemeinen nicht den Winkel der Bildasymptoten in gleiche Teile zerlegt In Fig 357 von Nr 257 ist es allerdings im Grundriß der Fall

Man kann den gewonnenen Satz auch so aussprechen Jede zu einer Hyperbel affine Kurve ist eine Hyperbel, und die Asymptoten beider Hyperbeln sind ebenfalls zueinander affin

Ein hyperbolischer Zylinder ist ein Zylinder, dessen Mantellinien eine Hyperbel treffen Es ergibt sich nun sofort Jeder ebene Schnitt eines hyperbolischen Zylinders ist eine Hyperbel Schließlich kann man auch sagen Der Schlagschatten, den eine Hyperbel bei Parallelbeleuchtung auf eine Ebene wirft, ist ebenfalls eine Hyperbel, und zwar sind die Asymptoten dieser Schattenhyperbel die Schlagschatten der Asymptoten der ursprunglichen Hyperbel

263. Parabolischer Schnitt des Rotationskegels. Abermals sei ein auf der Grundrißtafel stehender gerader Kreiskegel gegeben, siehe Fig 364 Ein parabolischer Schnitt des Kegels entsteht nach Nr 256, wenn die Schnittebene zu einer Tangentialebene des Kegels parallel ist Wird die Aufrißtafel senkrecht zu dieser Tangentialebene angenommen, so erscheint diejenige Mantellinie m, längs deren die Tangentialebene den Kegel berührt, im Aufriß als eine Umrißmantellinie, und die Aufrißspurgerade s_2 der Parallelebene muß parallel zu m'' gewählt werden, während ihre Grundrißspurgerade s_1 zur Projektionsachse senkrecht ist.

Wie im Fall des hyperbolischen Schnittes (Nr 257) werden wir die Schnittebene um ihre Spur s_1 in die Grundrißtafel umlegen Die Parabel erscheint im Aufriß geradlinig, und aus der Aufrißprojektion P'' irgendeines ihrer Punkte P findet man wie damals die Grundrißprojektion P' sowie die Umlegung (P), auch wird wie damals die Tangente PT des Punktes P gewonnen Dreht sich die Mantellinie des Punktes P um die Kegelachse, so beschreibt ihr Grundkreispunkt Q den Grundkreis Wenn die Mantellinie in m übergeht, gelangt Q nach der Stelle Y, so daß der Spurpunkt T der zugehörigen Parabeltangente als Schnittpunkt von s_1 mit der Tangente des Grundkreispunktes Y ins Unendlichferne rückt Da auch der Parabelpunkt P beim Übergang zur Mantellinie m ins Unendlichferne gelangt, kommt daher der Parabel ein unendlich ferner Punkt zu, dessen Tangente noch einen zweiten unendlich fernen Punkt, nämlich den von s_1, hat, so daß die Tangente des unendlich fernen Punktes der Parabel ebenfalls unendlich fern ist Die Parabel berührt daher die unendlich ferne Gerade ihrer Ebene Während die Hyperbel zwei unendlich ferne Punkte hat, deren Tangenten (Asymptoten) im Endlichen verlaufen, kommt also der Parabel nur ein unendlich ferner Punkt zu, dessen Tangente ebenfalls unendlich fern liegt Hier ist somit keine im Endlichen verlaufende Asymptote vorhanden Die Richtung, nach der sich die Parabel ins Unendlichferne erstreckt, wird durch die Mantellinie m des Kegels angegeben Die Ebene durch die Kegelachse und durch m ist Symmetrieebene (Nr 256) und schneidet die Parabelebene in einer Symmetriegeraden der Parabel, der Achse der Parabel Es ist nicht nötig, sie als Hauptachse zu bezeichnen, weil die Parabel keine zweite im Endlichen verlaufende Symmetriegerade hat, die man sonst die Nebenachse nennen würde Der auf der Achse gelegene Punkt S der Parabel heißt ihr Scheitel (Nr 249) Die Parabel hat sonst keinen Scheitel Die Parabelebene trifft nämlich den Scheitelkegel des vorgelegten Kegels erst im Unendlichfernen. Deshalb bedarf man auch des Scheitelkegels nicht zur Zeichnung der Parabel.

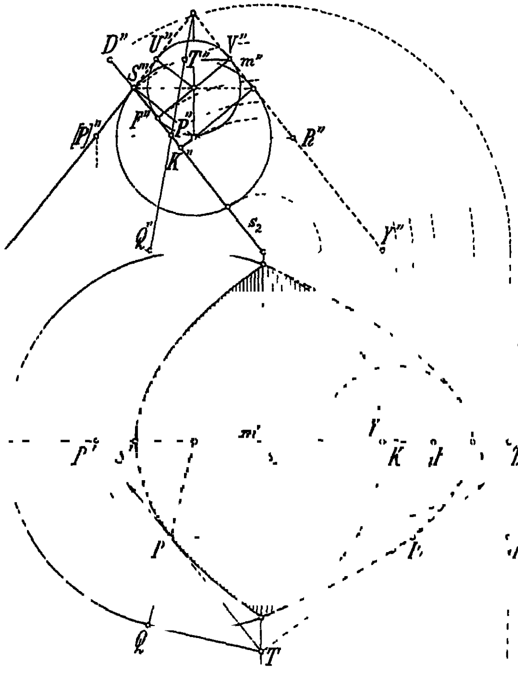


Fig 364

Hieraus folgt auch, daß es im Fall der Parabel nur eine Kugel gibt, die dem Kegel eingeschrieben ist und zugleich die Parabelebene in einem

Punkt F berührt Der Umriß dieser Kugel ist im Aufriß derjenige Kreis, der die Umrißmantellinien und die Spurgerade s_2 berührt Die Kugel berührt den Kegel längs eines Kreises, der im Aufriß als Strecke $U''V''$ erscheint. Die Schnittgerade der Parabelebene und der Ebene dieses Kreises, die vom Punkte D der Parabelachse ausgeht und auf der Aufrißtafel, also auch auf der Parabelachse senkrecht steht, heißt die **Leitlinie** l der Parabel, der Punkt F der **Brennpunkt** der Parabel. Der Brennpunkt liegt auf der Parabelachse Die Gerade in der Parabelebene von einem Punkte P der Kurve nach dem Brennpunkt F ist eine Tangente der Kugel Ferner berührt die durch P gehende Mantellinie die Kugel in einem Punkt T des vorhin erwähnten Kreises Da die beiden Tangenten von P an die Kugel gleichlang sind, ist $PF = PT$ Die wahre Länge von PF tritt in der Umlegung der Parabel als die Strecke $(P)(F)$ auf Die wahre Länge von PT ist gleich der Strecke $[P]''U''$ im Aufriß Demnach ist $(P)(F) = [P]''U''$ Nun aber haben die Strecken $[P]''U''$ und $P''D''$ gleiche Neigung zur Projektionsachse Außerdem liegen sie zwischen Parallelen zur Projektionsachse Daher ist $[P]''U'' = P''D''$ Somit kommt $(P)(F) = P''D''$ Die Strecke $P''D''$ aber ist weiterhin gleich der Entfernung PL des Parabelpunktes P von der durch D gehenden und zur Aufrißtafel senkrechten Leitlinie l In der Umlegung ist dies die Strecke $(P)(L)$. Somit folgt

$$(P)(F) = (P)(L)\,,$$

d. h **Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, die von einem Punkt, dem Brennpunkt** F, **und von einer Geraden, der Leitlinie** l, **gleiche Entfernungen haben** Man kann auch sagen Für alle Punkte P der Parabel ist das Verhältnis $PF : PL$ der Entfernungen von F und l gleich Eins Dies Verhältnis nennt man wie im Fall der Ellipse und Hyperbel die **Exzentrizität** Während die Exzentrizität der Ellipse kleiner als Eins (Nr 74) und die der Hyperbel größer als Eins (Nr 257) ist, **hat also die Parabel die Exzentrizität Eins** Als das **Innere der Parabel** bezeichnet man diejenige Fläche, die im Innern des Kegels liegt, d h in der sich der Brennpunkt F befindet Nach ihr hin ist die Kurve **konkav**

Der Krümmungskreis des Parabelscheitels S geht durch eine Betrachtung hervor, die ganz der Betrachtung im Fall der Hyperbel entspricht Wie in Fig 359 von Nr 258 wird dem Kegel irgendeine die Parabelebene schneidende Kugel eingeschrieben Sie schneidet die Parabelebene in einem Kreis, der von der Parabel umfaßt wird und die Parabel in zwei zur Parabelachse symmetrisch gelegenen Punkten berührt Laßt man nun die Kugel so weit zusammenschrumpfen, daß diese beiden Berührungsstellen im Scheitel S zusammenkommen, so wird der Schnittkreis der Krümmungskreis des Scheitels. Dieser Fall tritt ein, wenn die dem Kegel eingeschriebene Kugel durch S geht. Der Aufriß des Mittelpunktes dieser Kugel, der in Fig. 364 angegeben ist, liegt auf dem in S'' auf die äußerste linke Mantellinie errichteten Lot Das Lot, das man in dem gerade so hoch wie S'' auf der äußersten rechten Mantellinie gelegenen Punkt auf diese Mantellinie errichten kann, trifft die Kegelachse in demselben Punkt. Der Aufriß des Mittelpunktes K des Kreises, in dem die Kugel die Parabelebene schneidet,

liegt auf diesem zweiten Lot. Daraus folgt, daß $S''K''$ das Doppelte von $S''F''$ ist. Da nun, wie gesagt, K der Mittelpunkt des Krümmungskreises des Scheitels S ist, findet man den Krümmungsmittelpunkt (K) in der Umlegung, indem man $(S)(F)$ über (F) hinaus auf der Hauptachse noch einmal aufträgt. Somit ist der Krümmungsradius des Parabelscheitels doppelt so groß wie die Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel.

Anmerkung. Unter x und y seien die rechtwinkligen Koordinaten des Parabelpunktes P, bezogen auf die Parabelachse und die zu ihr senkrechte Tangente des Scheitels S verstanden, d. h. x sei die Entfernung des Punktes P von der Scheiteltangente, also gleich $S''P''$ in Fig. 364, und y sei die Entfernung des Punktes P von der Parabelachse. Diese Strecke y ist die Höhe des Halbkreises mit dem Durchmesser $[P]''R''$ an der Stelle P'', daher y^2 gleich dem Produkt von $[P]''P''$ mit $P''R''$. Weil $P''R''$ für alle Parabelpunkte dieselbe Länge, nämlich die von $D''V''$, hat und weil $[P]''P''$ zu $S''P''$ oder x in einem Verhältnis steht, das augenscheinlich für alle Parabelpunkte denselben Wert hat, folgt, daß y^2 gleich x, multipliziert mit einer konstanten Strecke, ist. Wird die konstante Strecke $2p$ genannt, so ergibt sich mithin

$$y^2 = 2px$$

als Gleichung der Parabel, bezogen auf die Parabelachse und Scheiteltangente als x- und y-Achse. Weil die Parabelpunkte vom Brennpunkt F dieselbe Entfernung wie von der Leitlinie l haben und weil die Scheiteltangente in der Mitte zwischen F und l verläuft, erhellt, daß die durch den Brennpunkt gehende Parallele zur Leitlinie diejenigen Punkte der Parabel enthält, für die $x = \pm \frac{1}{2} y$ ist, so daß die Gleichung für sie $y = \pm p$ liefert, d. h. die Strecke p ist die Hälfte derjenigen Sehne der Parabel, die durch den Brennpunkt geht und auf der Achse senkrecht steht. Man nennt p den Parameter der Parabel.

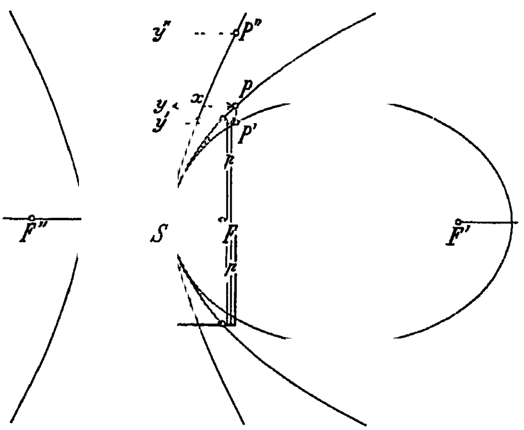


Fig. 365

In Fig. 365 sind außer der Parabel mit dem Brennpunkt F und dem Scheitel S noch eine Ellipse und eine Hyperbel dargestellt, denen derselbe Brennpunkt F und derselbe Scheitel S zukommt. Der zweite Brennpunkt F' der Ellipse ist irgendwo rechts von S und der zweite Brennpunkt F'' der Hyperbel irgendwo links von S auf der Parabelachse gelegen. Man kann leicht beweisen, daß dann die Parabel die Ellipse umschließt, die Parabel aber ihrerseits von dem einen Zweig der Hyperbel umschlossen wird. Wählt man also ein bestimmtes x, d. h. zieht man eine Parallele zur Scheiteltangente im Abstand x, so wird diese Gerade die Ellipse, Parabel und Hyperbel oberhalb der Achse in Punkten P', P, P'' derart treffen, daß P zwischen P' und P'' liegt, d. h. die Höhen y', y, y'' dieser drei Punkte sind so beschaffen, daß $y' < y < y''$ ist. Für den Parabelpunkt P ist nun, wie wir sahen, $y^2 = 2px$, also das Quadrat der Höhe y gleich der Fläche des geschrafften Rechtecks mit der Mittellinie x und der Höhe $2p$. Dagegen ist für den Ellipsenpunkt P' das Quadrat der Höhe y' kleiner und für den Hyperbelpunkt P'' das Quadrat der Höhe y'' größer als die Fläche dieses Rechtecks. Aus diesem Grunde haben die Alten die Kegelschnitte benannt. Die Ellipse hat ihren Namen von ἐλλείπειν (übriglassen), die Parabel von παραβάλλειν (anlegen, im Sinne von gleichen) und die Hyperbel von ὑπερβάλλειν (darüber hinausreichen). Zwar findet sich der Name der Ellipse schon bei Archimedes (Nr. 73), es ist aber wahrscheinlich, daß er erst durch Spätere in die Handschriften eingefügt worden ist. Alle drei Namen kommen sicher vor in den „Vier Büchern der Kegelschnitte" von Apollonius von Pergae (Nr. 77), siehe die Ausgabe von J. L. Heiberg, 1. Bd. Leipzig 1890, S. 38, 42 und 48.

Hiermit soll nicht gesagt sein, daß die drei Arten von Kegelschnitten vor Archimedes

unbekannt gewesen waren Denn schon Menachmus, der vermutlich in der zweiten Hälfte des 4 Jahrhunderts v Chr lebte, hat nach einem Bericht des Eutokius von Askalon, eines Auslegers der Schriften des Archimedes, Kegelschnitte zur Lösung der im Altertum berühmten Aufgabe der Würfelverdopplung verwendet, siehe die Heibergsche Ausgabe des Archimedes, 3 Bd S 92. — Die Geschichte der Kegelschnitte bei den griechischen Mathematikern findet man bei Karl Anton Bretschneider (geb 1808 zu Schneeberg in Schlesien, Gymnasiallehrer in Gotha, dort gest 1878) „Die Geometrie und die Geometer vor Euklides“, Leipzig 1870, bei Moritz Cantor (Nr 248) in der 3 Auflage des 1 Bandes der „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“, Leipzig 1907, S 244—350, und bei Johannes Tropfke (geb 1866 in Berlin). „Geschichte der Elementarmathematik“, 2 Bd Leipzig 1903, S. 429—456

Daß die Ableitung der schon den Alten bekannten Fokaleigenschaften (Nr 74) der Kegelschnitte mittels der dem Rotationskegel eingeschriebenen und die Kegelschnittebene berührenden Kugeln von Dandelin und Quetelet herrührt, wurde schon in der Anmerkung zu Nr 77 gesagt

264. Zeichnung der Parabel. Der Parabel kommt im Gegensatz zur Ellipse und Hyperbel nur ein im Endlichen gelegener Brennpunkt und entsprechend nur eine im Endlichen gelegene Leitlinie zu. Ist ein Brennpunkt F und die zugehörige Leitlinie l gegeben, so sind die Ellipse, Parabel und Hyperbel gleicherweise durch die Eigenschaft festgelegt, daß für alle ihre Punkte das Verhältnis der Entfernungen von F und l konstant ist, und zwar im Falle der Ellipse kleiner als Eins, im Falle der Parabel gleich Eins und im Falle der Hyperbel größer als Eins. Auf Grund dieser Eigenschaft kann man, wenn dies Verhältnis, die Exzentrizität, gegeben ist, jede dieser Kurven Punkt für Punkt ermitteln

Insbesondere beschäftigen wir uns hier mit der Parabel, bei der jene Eigenschaft, wie schon gesagt, auch so ausgesprochen werden kann Alle Punkte der Parabel haben gleiche Entfernungen vom Brennpunkt F und von der Leitlinie l. Das Lot von F auf l ist die Parabelachse Sie schneide l in D, siehe Fig 366 Die Mitte von DF ist der Scheitel S Schlagt man um F einen Kreis mit einem beliebigen Radius, der größer als SF ist, und zieht man die Parallele zur Leitlinie l in dem diesem Radius gleichen Abstand, und zwar auf derjenigen Seite, auf der F liegt, so schneidet der Kreis diese Parallele in zwei symmetrisch zur Achse gelegenen Punkten der Parabel, von denen in Fig 366 nur der eine Punkt P dargestellt ist

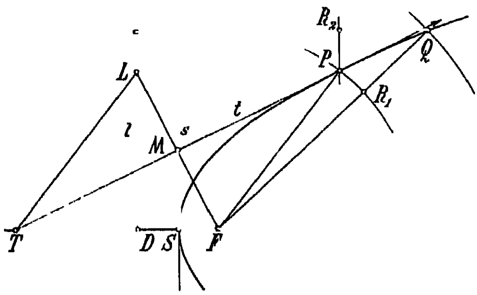


Fig 366

Laßt man den Radius und dementsprechend jenen Abstand um eine beliebige Strecke wachsen, so bekommt man einen anderen Parabelpunkt Q In Fig. 366 ist also $R_1Q = R_2Q$ Die Dreiecke PQR_1 und PQR_2 haben ferner die Seite PQ gemein, und ihnen kommen rechte Winkel bei R_1 und R_2 zu. Aber das Dreieck PQR_1 hat eine krumme Seite PR_1. Wenn nun Q ein dem Punkt P unendlich benachbarter Punkt der Parabel ist, kann man die krumme Seite PR_1 als gerade auffassen, d. h. dann wird $\triangle PQR_1 \cong \triangle PQR_2$, und zugleich wird PQ die Tangente t des Parabelpunktes P. **Demnach teilt die Tangente t des Parabelpunktes P den Winkel des Brenn-**

strahls PF und des geradeso langen Lotes PL auf die Leitlinie in gleiche Teile. Daher steht die Tangente in dem Schnittpunkt M mit der Tangente s des Scheitels auf FM senkrecht Bewegt sich also ein rechter Winkel so, daß sein Scheitel M die feste Gerade s durchlauft und sein einer Schenkel durch den festen Punkt F geht, so umhullt sein anderer Schenkel t die Parabel mit der Scheiteltangente s und dem Brennpunkt F. Ferner ist $FM = ML$, außerdem schneidet t die Achse in einem Punkte T derart, daß $TM = MP$ ist, d. h $TFPL$ ist ein Rhombus

Um den Parabelbogen in der Nahe des Scheitels zu zeichnen, benutzt man einige auf Grund des Vorhergehenden besonders leicht zu ermittelnde Punkte und Tangenten der Kurve, siehe Fig. 367 Auf der Achse ist $AB = BD = DS = SF = FK$, durch A werden diejenigen Geraden gezogen, die mit der Achse Winkel von 30° bilden, durch D diejenigen, die mit ihr Winkel von 45° bilden, durch F diejenigen, die mit ihr Winkel von 60° und 90° bilden Die beiden letzten Geraden schneiden die beiden ersten in Punkten Q und P der Parabel mit dem Brennpunkt F und Scheitel S, und AQ sowie DP sind ihre Tangenten, außerdem ergeben sich symmetrisch gelegene Punkte und Tangenten auf der anderen Seite der Achse Man zieht die Parabel aus, indem man in der Nahe des Scheitels S den Krummungskreis mit dem Mittelpunkt K und im übrigen das Kurvenlineal benutzt

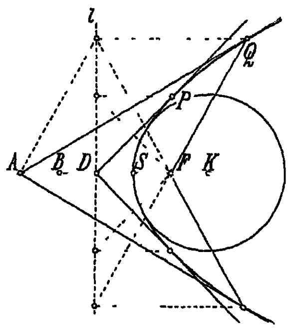
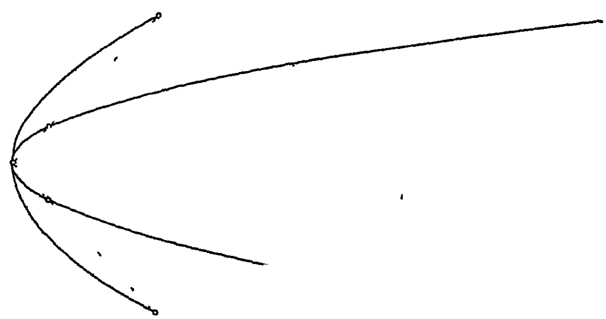


Fig 367

Da die Parabel vollstandig bestimmt ist, sobald ihr Brennpunkt und ihre Leitlinie oder — was auf dasselbe hinauskommt — ihre Scheiteltangente gegeben sind, erhellt, daß die Parabel, abgesehen von ihrer Lage, nur von einer Strecke, namlich der Entfernung des Brennpunktes von der Scheiteltangente, abhangt Deshalb haben alle Parabeln dieselbe Gestalt, genauer gesagt alle Parabeln sind einander ahnlich Wie dies zu verstehen ist, erlautert Fig 368, worin zwei Parabeln mit derselben Achse und demselben Scheitel dargestellt sind. Diese beiden Parabeln sind nicht nur ahnlich, sondern auch ahnlich gelegen, indem der gemeinsame Scheitel der Ähnlichkeitspunkt ist Von der umfassenderen Parabel ist das Stück gezeichnet, das dem abgegrenzten Stuck der schmaleren Parabel ahnlich ist. Diese schmalere Parabel, deren Brennpunkt sehr nahe beim Scheitel liegt, zeigt auch, wie die


Fig 368.

Parabel in größerer Ferne vom Scheitel verlauft Sie entfernt sich beiderseits immer weiter von der Achse, ebenso wie es ein Hyperbelzweig hinsichtlich seiner Hauptachse tut Da aber der Parabel keine im Endlichen gelegene Asymptote zukommt, strebt sie nicht wie die Hyperbel nach gewissen Geraden hin. Die Tangente eines Parabelpunktes entfernt sich vom Scheitel, je weiter sich der Beruhrungspunkt vom Scheitel entfernt, und zwar bis ins Unendliche.

Anmerkung Will man eine Parabel wie die langgestreckte in Fig 368 zeichnen, so empfiehlt es sich, die in der Anmerkung zu voriger Nummer aufgestellte Gleichung $y^2 = 2px$ zu benutzen Ist z B $p = \frac{1}{2}$ gesetzt worden, so kann man die zu $x = 1, 4, 9, 16, 25, 36$ gehorigen Punkte leicht zeichnen, da fur sie $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ist Dabei sind die x die vom Scheitel aus auf der Achse abzutragenden Strecken, die y die in ihre Endpunkten nach beiden Seiten hin zu errichtenden Lote

265. Ermittlung der Parabel aus zwei Punkten und ihren Tangenten. Die Parabel entsteht nach Nr 256, wenn man einen geraden Kreiskegel mit einer Ebene parallel zu einer Tangentialebene schneidet Dabei wird man, wenn der Kegel und die Schnittebene nicht so bequem wie in Fig 364 von Nr 263 liegen, im allgemeinen nicht in der Lage sein, geradezu die Parabelachse, den Brennpunkt und den Scheitel zu finden Dagegen wird man immer imstande sein, einige Parabelpunkte und ihre Tangenten zu ermitteln, namlich die Punkte als Schnitte von Mantellinien des Kegels mit der Parabelebene und die Tangenten als die Schnitte der zugehorigen Tangentialebenen des Kegels mit der Parabelebene Wir konnen nun ein Verfahren angeben, die Achse, den Brennpunkt und den Scheitel einer Parabel zu bestimmen, sobald zwei Parabelpunkte und ihre Tangenten bekannt sind

Zu diesem Zwecke gehen wir von einem zunachst elliptischen Schnitt eines Rotationskegels aus (Nr. 77), d h wir benutzen eine Schnittebene, die zu keiner Mantellinie des Kegels parallel ist Dann andern wir die Stellung der Ebene stetig, bis sie zu einer Tangentialebene des Kegels parallel wird Dadurch geht der ursprunglich elliptische Schnitt in einen parabolischen uber Die Parabel kann daher als eine Ausartung der Ellipse fur den Fall betrachtet werden, wo der zweite Brennpunkt der Ellipse oder, was auf dasselbe hinauskommt, der Mittelpunkt der Ellipse ins Unendlichferne ruckt Die Parabel ist also als eine Ellipse zu betrachten, die, obwohl ihr Mittelpunkt ins Unendlichferne geruckt ist, doch noch selbst im Endlichen verlauft, sich aber auch bis ins Unendliche erstreckt In Nr 138 wurde nun eine Punktkonstruktion der Ellipse fur den Fall gefunden, daß ein Durchmesser $\mathfrak{AB}$ der Ellipse, die Tangenten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ seiner Endpunkte und noch ein Punkt $\mathfrak{C}$ der Ellipse gegeben ist, siehe Fig 190 ebenda Daraus geht eine Konstruktion der Parabel hervor, wenn wir die Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ und die Tangente $\mathfrak{a}$ beibehalten, dagegen den Gegenpunkt $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ nebst seiner Tangente $\mathfrak{b}$ ins Unendlichferne rücken lassen.

In Fig 369 sei demnach A ein gegebener Parabelpunkt, a seine gegebene Tangente Ferner sei C ein gegebener Parabelpunkt Außerdem sei angenommen, daß in der durch den Pfeil angegebenen Richtung der ins Unendlichferne geruckte Punkt B der Parabel liege, so daß also der Pfeil die Richtung der Parabelachse ngibt. Genau so wie in Fig 190 von Nr 138 ziehen wir die Geraden AC und BC; die Gerade BC ist die durch C in der Pfeilrichtung. Nun wird eine beliebige Parallele zu a

mit AC und BC in X und Y zum Schnitt gebracht. Die X mit B und Y mit A verbindenden Geraden treffen sich dann in einem Punkte Z der Parabel, dabei ist die Gerade XB die durch X in der Pfeilrichtung. Indem man die Gerade XY parallel zu a verschiebt, kann man auf diese Art beliebig viele Punkte Z der Parabel finden.

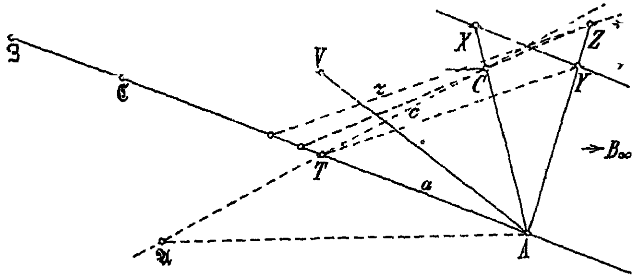


Fig 369

Da C und Z Parabelpunkte sind, ist CZ eine Sekante der Parabel Sie wird zur Tangente c von C, wenn Z unendlich nahe an C heranrückt Dies ist der Fall, wenn die zu a parallele Gerade XY unendlich nahe bei C gewahlt wird Das Viereck $CXZY$ hat zwei parallele Seiten CY und XZ. Rückt XY unendlich nahe an C heran, so strebt AYZ nach der Richtung von ACX, d. h. das Viereck $CXZY$ strebt nach der Form eines Parallelogramms, und die Diagonale CZ nach der Tangente von C. Diese Diagonale trifft XY beim Grenzubergang als Diagonale eines Parallelogramms die Strecke XY in ihrer Mitte. Also schneidet sie, weil $XY \parallel a$ ist, in ihrer Verlangerung die Tangente a in einem Punkte, der nach der Mitte T der Strecke $A\mathfrak{C}$ strebt, die auf a von der durch C in der Pfeilrichtung gezogenen Geraden abgeschnitten wird

Somit sind die Tangenten a und c irgend zweier Parabelpunkte A und C so beschaffen, daß sie sich in einem Punkte T treffen, der in der Mitte derjenigen Strecke $A\mathfrak{C}$ liegt, die auf der Tangente a von A durch die in der Achsenrichtung gezogene Gerade $C\mathfrak{C}$ durch C abgeschnitten wird Vertauscht man die Rollen der Punkte A und C, so folgt Die durch A in der Achsenrichtung gezogene Gerade $A\mathfrak{A}$ schneidet von der Tangente c des Punktes C eine Strecke $C\mathfrak{A}$ ab, deren Mitte der gemeinsame Punkt T der beiden Tangenten a und c ist.

Wenn also zwei Parabelpunkte A und C und ihre Tangenten a und c gegeben sind, kann man die Achsenrichtung so finden. Ist T der Schnittpunkt von a und c, so verdoppelt man TA und TC über T hinaus bis $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}$ Dann haben die beiden parallelen Geraden $A\mathfrak{A}$ und $C\mathfrak{C}$ die Richtung der Parabelachse.

Wir betrachten nun einen beliebigen Punkt der Parabel, z. B. den in Fig. 369 ermittelten Punkt Z. Nach dem, was sich soeben ergab, findet man die Tangente z von Z, indem man durch Z die Gerade in der Richtung der Achse zieht, sie in $\mathfrak{Z}$ mit a zum Schnitt bringt und den Mittelpunkt von $A\mathfrak{Z}$ mit Z verbindet. Da nun T die Mitte von $A\mathfrak{C}$ ist, sieht man sofort, daß die Tangente z zu TY parallel ist. Diese Bemerkung gestattet die Auffindung des Scheitels S. Denn der Scheitel hat die besondere Eigenschaft, daß seine Tangente zur Achse senkrecht ist. Der Parabelpunkt Z wäre daher der Scheitel, wenn z zur Achsenrichtung senkrecht wäre, d. h. wenn TY zur Scheitelrichtung senkrecht

wäre. Um den Scheitel zu finden, muß man also die Parallele XY zu a so ziehen, daß ihr Punkt Y auf $C\mathfrak{C}$ der Fußpunkt V des Lotes von T auf $C\mathfrak{C}$ wird. Da der Parabelpunkt Z auf AY liegt, muß der Scheitel S auf AV liegen.

Somit hat sich ergeben: Sind A, C Punkte der Parabel und a, c ihre Tangenten und ist T der Schnittpunkt von a und c, siehe Fig. 370, so verdopple man AT und CT über T hinaus bis $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}$. Dann haben $A\mathfrak{A}$ und $C\mathfrak{C}$ die Richtung der Parabelachse. Das Lot von T auf $C\mathfrak{C}$ treffe in V ein, der Scheitel liegt dann auf AV. Indem man die Rollen der Punkte A, C und ihrer Tangenten a, c vertauscht, ergibt sich ebenso: Das Lot von T auf $A\mathfrak{A}$, d. h. die Gerade TV, treffe $A\mathfrak{A}$ in W, der Scheitel liegt dann auf CW. Demnach ist der Scheitel der Schnittpunkt S von AV und CW. Die Parallele zu $A\mathfrak{A}$ oder $C\mathfrak{C}$ durch ihn ist somit die Achse der Parabel und das von S auf $A\mathfrak{A}$ oder $C\mathfrak{C}$ gefällte Lot die Scheiteltangente s. Nach Nr 264 ergibt sich der Brennpunkt F, indem man in den Schnittpunkten der Tangenten a und c mit der Scheiteltangente s die Lote auf a und c errichtet; als Schnittpunkt dieser beiden Lote. Selbstverständlich liegt er auf der schon ermittelten Achse. Nunmehr ist alles bekannt, was man braucht, um die Parabel nach Nr 264 zu zeichnen.

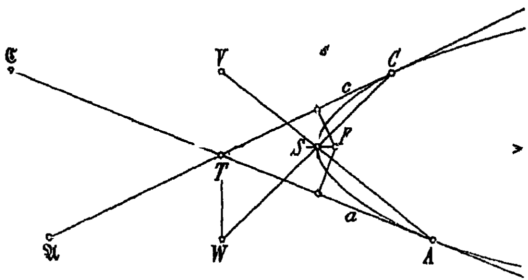


Fig. 370

266. Parallelprojektion der Parabel. Die in Fig 369 der letzten Nummer gewonnene Konstruktion beliebiger Parabelpunkte Z aus der gegebenen Achsenrichtung, zwei gegebenen Punkten A und C der Parabel und der gegebenen Tangente a des Punktes A erfordert nur das Verbinden von Punkten durch Geraden und das Ziehen von Parallelen. Dies aber sind Verrichtungen, die durch eine beliebige Parallelprojektion nicht gestört werden. Demnach gilt der Satz: Jede Parallelprojektion einer Parabel ist ebenfalls eine Parabel, oder, was dasselbe besagt: Jede zu einer Parabel affine Kurve ist eine Parabel.

Nach Nr. 139, 262 und dem soeben Gefundenen können wir mithin sagen: Vermöge Parallelprojektion oder Affinität wird jede Ellipse in eine Ellipse, jede Parabel in eine Parabel und jede Hyperbel in eine Hyperbel verwandelt. Insbesondere liefert der Mittelpunkt der Ellipse oder Hyperbel dabei den Mittelpunkt der neuen Kurve. Bei der Parabel tritt an die Stelle des Mittelpunktes, der ja in diesem Fall unendlich fern liegt, die Richtung nach ihm, d. h. die Achsenrichtung. Demnach führt die Parallelprojektion oder Affinität die Achsenrichtung der Parabel (nicht die Achse selbst) in die Achsenrichtung der Bildparabel über. Im Falle der Hyperbel ergab sich noch in Nr. 262, daß die Asymptoten vermöge der Parallelprojektion oder Affinität in die Asymptoten der Bildhyperbel verwandelt werden.

Weil der geometrische Ort der Mitten paralleler Sehnen der Ellipse ein Durchmesser ist (Nr. 72) und weil die Parabel als Ellipse mit unendlich fernem Mittelpunkte betrachtet werden kann, ergibt sich noch: Der geometrische Ort der Mitten paralleler Sehnen der Parabel ist eine zur Parabelachse parallele Gerade. Wenn man will, kann man alle diese Parallelen zur Achse als Durchmesser der Parabel bezeichnen, indem sie den unendlich fernen Mittelpunkt gemein haben. Will man den Begriff konjugierter Durchmesser von der Ellipse auf die Parabel übertragen, so sind also alle Durchmesser als zur Parabelachse konjugiert zu bezeichnen. Daraus ergibt sich nach Nr. 182 der Grund für die Benennung der parabolischen Involutionen (Nr. 171 und 174).

Nochmals sei betont, daß vermöge einer Parallelprojektion oder Affinität die Haupt- und Nebenachse einer Ellipse oder Hyperbel, die Achse einer Parabel und die Brennpunkte und Leitlinien eines der drei Kegelschnitte im allgemeinen nicht in die entsprechenden Gebilde der neuen Kurve übergehen. In Fig. 364 von Nr. 263 ist zwar die Grundrißprojektion der Parabel ebenfalls eine Parabel, aber die Grundrißprojektion des Brennpunktes F nicht der Brennpunkt der Grundrißparabel. Der Brennpunkt dieser Parabel ist vielmehr der Mittelpunkt des Grundkreises, wie sich in der nächsten Nummer zeigen wird.

267. Ebener Schnitt eines allgemeinen Kreiskegels. Nachdem die ebenen Schnitte der Rotationskegel untersucht worden sind, fragt es sich, wie die ebenen Schnitte allgemeiner, also schiefer Kreiskegel beschaffen sind. Nach Nr. 256 gehen drei verschiedene Arten solcher Schnitte hervor, je nachdem die Schnittebene zu keiner Mantellinie oder zu einer Tangentialebene oder zu zwei verschiedenen Mantellinien parallel ist, d. h. die Schnittkurve ist entweder geschlossen im Endlichen gelegen oder sie hat eine oder zwei verschiedene unendlich ferne Stellen. Aber deshalb, weil es im allgemeinen keine den Kegel symmetrisch teilende und zugleich auf der Schnittebene senkrechte Ebene gibt, wird man, wie schon in Nr. 256 bemerkt wurde, von vornherein geneigt sein anzunehmen, daß dieser Schnittkurve nicht wie denen des Rotationskegels Symmetriegeraden zukommen. Die folgenden Betrachtungen werden nun ergeben, daß diese Annahme falsch ist.

Wird ein allgemeiner Kreiskegel durch eine Ebene E geschnitten, so mag die Ebene des Grundkreises als Grundrißtafel und eine zu ihr und der Ebene E senkrechte Ebene als Aufrißtafel dienen, so daß von den Spurgeraden s_1, s_2 der Ebene E die erste zur Projektionsachse senkrecht ist, siehe Fig. 371. Die Schnittkurve k kann man Punkt für Punkt ermitteln, denn sie erscheint im Aufriß als Strecke $A''B''$. Man wählt also die Aufrißprojektion P'' eines Punktes der Schnittkurve k beliebig auf $A''B''$. Der zugehörige Grundriß P' ergibt sich mit Hilfe des durch P gehenden Höhenkreises $\varkappa$ des Kegels. Die Aufrißprojektion $\varkappa''$ ist eine zur Projektionsachse parallele Strecke; der Mittelpunkt K von $\varkappa$ liegt auf der Achse SM des Kegels, und der Radius von $\varkappa$ ist die aus dem Aufriß zu entnehmende Strecke $K''R''$. Der Grundriß $\varkappa'$ von $\varkappa$ berührt die äußersten Mantellinien des Kegels, falls überhaupt solche vorhanden sind. Nun ist P' einer der beiden Schnittpunkte von $\varkappa'$ mit dem von P'' auf die Projektionsachse gefällten Lot. Unser Ziel ist, zu beweisen,

daß die Kurve k im Fall der Fig 371 eine Ellipse ist. Wenn die schneidende Ebene E zu einer Tangentialebene oder zu zwei verschiedenen Mantellinien parallel wäre, würden wir als Ziel den Nachweis der Kurve k als Parabel oder Hyperbel haben. Das Beweisverfahren ist in allen drei Fallen dasselbe, namlich wie folgt:

Wir projizieren das Dargestellte durch Strahlen, die zur Kegelachse SM parallel sind, auf die Grundrißtafel. Diese schiefe Parallelprojektion verwandelt k in eine Kurve $\mathfrak{k}$ der Grundrißtafel und P in einen Punkt $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{k}$. Die Parallelprojektion des Kreises $\varkappa$ liefert einen mit $\varkappa$ kongruenten Kreis um M, der durch $\mathfrak{P}$ geht Also ist $\mathfrak{P}M$ gleich dem Radius von $\varkappa$, d. h. gleich $K''R''$ im Aufriß Die durch die Kegelspitze S gelegte Höhenebene schneidet die Ebene E in einer Hohenlinie l, die auf der Aufrißtafel in X senkrecht steht Indem wir nun auf l dieselbe schiefe Parallelprojektion anwenden, kommen wir zu einer Geraden $\mathfrak{l} \parallel s_1$ der Grundrißtafel Das Lot von $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{l}$ habe den Fußpunkt $\mathfrak{L}$ Es ist $\mathfrak{P}\mathfrak{L} = \mathfrak{P}''\mathfrak{L}''$ Ferner ist $P''X$ gleich der parallelen Strecke $K''Y$ zwischen denselben beiden Parallelen $P''K''$ und $S''X$ Wenn P'' die Strecke $A''B''$ durchlauft, geht das Viereck $S''YK''R''$ bestandig in ein ahnliches und ahnlich gelegenes Viereck mit dem Ähnlichkeitspunkt S'' uber, so daß das Verhaltnis $K''R'' . K''Y$ ungeandert bleibt, demnach auch das Verhaltnis $K''R''$ $P''X$ Da ferner immer $\mathfrak{P}''P'' \parallel \mathfrak{L}''X$ ist, andert sich auch das Verhaltnis $\mathfrak{P}''\mathfrak{L}'' . P''X$ nicht Mithin bleibt das Verhältnis $K''R'' . \mathfrak{P}''\mathfrak{L}''$ ebenfalls ungeandert. Da, wie gesagt, $K''R'' = \mathfrak{P}M$ und $\mathfrak{P}''\mathfrak{L}'' = \mathfrak{P}\mathfrak{L}$ ist, folgt also. Das Verhaltnis der Entfernungen $\mathfrak{P}M$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{L}$ des Punktes $\mathfrak{P}$ vom Punkt M und von der Geraden $\mathfrak{l}$ ist konstant. Mithin ist der Ort von $\mathfrak{P}$, d. h die Kurve $\mathfrak{k}$, eine Ellipse (Nr. 74), Parabel (Nr. 263) oder Hyperbel (Nr. 257), je nachdem dies Verhaltnis kleiner als Eins, gleich

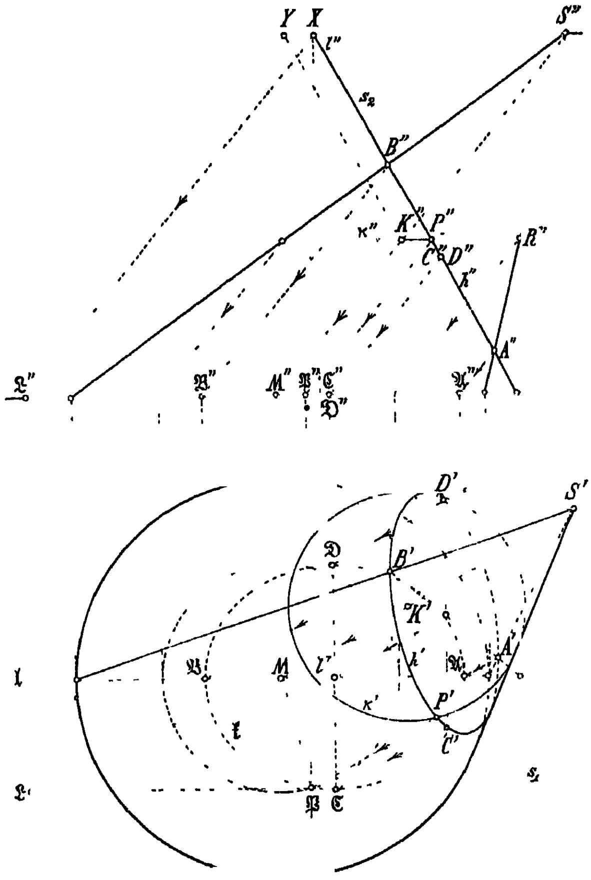


Fig 371

Eins oder größer als Eins ist. In Fig. 371 liegt der Fall einer Ellipse vor. Rückwärts können wir nun die Kurve k, den Schnitt des Kegels mit der Ebene E, aus der Kurve 𝔨 durch Parallelprojektion in der Richtung von M nach S erzeugen. Da 𝔨 eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist und jede Ellipse, Parabel oder Hyperbel durch Parallelprojektion in eine ebensolche Kurve übergeht (Nr. 266), ergibt sich dadurch, daß auch k selbst eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist.

Bedenkt man, daß wir als Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln die ebenen Schnitte der Rotationskegel bezeichnet hatten (Nr. 256), so gelangt man also zu dem wichtigen Satz

Jeder ebene Schnitt eines allgemeinen Kreiskegels ist eine Kurve, die auch durch Schnitt eines Rotationskegels mit einer Ebene erzeugt werden kann. Demnach liegt der merkwürdige Fall vor, daß die ebenen Schnitte der allgemeinen Kreiskegel keine umfassendere Gattung von Kurven liefern als die ebenen Schnitte der Rotationskegel Infolge davon gelten die im vorhergehenden gefundenen Eigenschaften der Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln auch für die ebenen Schnitte beliebiger Kreiskegel Insbesondere folgt daraus, daß die Schnittkurve stets wenigstens eine Symmetriegerade, die Hauptachse der Ellipse oder Hyperbel bzw die Achse der Parabel, hat, obwohl der allgemeine Kegel keine zur Schnittebene senkrechte Symmetrieebene aufweist.

Die in Nr 256 gemachte Beschränkung auf Rotationskegel können wir deshalb jetzt fallen lassen. Dann sind die Ergebnisse so auszusprechen Nennt man einen ebenen Schnitt eines beliebigen Kreiskegels eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem die Schnittebene zu keiner Mantellinie oder zu einer Tangentialebene des Kegels oder zu zwei verschiedenen Mantellinien parallel ist, so gilt der Satz· Jede Ellipse, Parabel oder Hyperbel läßt sich insbesondere dadurch herstellen, daß man einen Rotationskegel mit einer Ebene schneidet. Ja noch mehr Jede Ellipse läßt sich als ebener Schnitt eines Rotationszylinders (Nr 73), jede Parabel als ebener Schnitt eines Rotationskegels parallel zu einer Tangentialebene und jede Hyperbel als ebener Schnitt eines Rotationskegels parallel zu seiner Achse (Nr. 258) erzeugen

Schließlich sei bezüglich der Herstellung der Fig. 371 noch bemerkt Jeder auf $A''B''$ gewählte Punkt P'' liefert im Grundriß zwei Punkte P' von k', in der Figur ist nur einer gezeichnet. Die Verbindende beider Punkte ist eine zu s_1 parallele Sehne der Ellipse k', d. h. die Mittelpunkte aller dieser Sehnen bilden den Durchmesser $A'B'$. Der konjugierte Durchmesser $C'D'$ ist also parallel zu s_1, und er stellt sich im Aufriß als die Mitte von $A''B''$ dar, so daß man $C'D'$ leicht findet. Aus den konjugierten Durchmessern $A'B'$ und $C'D'$ kann man die Achsen der Ellipse k' nach Nr 85 bestimmen Vermöge der vorhin angewandten Parallelprojektion in der Richtung der Kegelachse SM geht k in die Ellipse 𝔨 über, und die Haupt- und Nebenachse dieser Ellipse sind die Parallelprojektionen 𝔄𝔅 und ℭ𝔇 von AB und CD.

Es ist nützlich, noch eines der gewonnenen Ergebnisse herauszuheben· Die Kurve 𝔨 im Grundriß hat, wie wir sahen, die Eigenschaft, daß ihre Punkte 𝔓 in bezug auf den Punkt M und die Gerade 𝔩 ein konstantes

Abstandsverhältnis bewahren, d. h. M ist einer der Brennpunkte des Kegelschnittes $\mathfrak{k}$, so daß wir den Satz erhalten: Wird ein Kegelschnitt in der Richtung der Kegelachse auf die Grundkreisebene projiziert, so ist der Mittelpunkt des Grundkreises einer der Brennpunkte des durch die Projektion hervorgehenden Kegelschnittes. Somit ist der Mittelpunkt des Grundkreises in Fig. 357 von Nr. 257 und in Fig. 364 von Nr. 263 Brennpunkt der Grundrißhyperbel bzw. -parabel. Diese Bemerkung dient zum bequemeren Zeichnen dieser Grundrisse.

268. Zeichnung der Kegelschnitte. Zwar ist schon erörtert worden, wie man eine Ellipse (Nr. 82), Parabel (Nr. 264) oder Hyperbel (Nr. 260) zeichnet. Hier soll jedoch noch in Kürze angegeben werden, wie man zweckmäßig vorgeht, um einen elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen Schnitt eines beliebigen Kreiskegels darzustellen. Wir entwerfen die Zeichnung der Einfachheit halber in freier Parallelprojektion (Nr. 145, 157). Man kann aber genau so im Grundriß und Aufriß vorgehen, ja man kann, wenn man will, die drei folgenden Figuren geradezu als Grundriß oder Aufrißzeichnungen auffassen, die dann noch durch die zugehörigen Aufrisse oder Grundrisse zu ergänzen wären. Deshalb bezeichnen wir die Punkte in den Figuren ohne Akzente.

In jedem der drei Fälle gehen wir vom Bild eines beliebigen Kreiskegels mit der Spitze S und dem Mittelpunkt M des Grundkreises aus. Der Grundkreis stellt sich als Ellipse dar, siehe Fig. 372. Um nun einen elliptischen Schnitt zu bekommen, ziehen wir in der Ebene des Grundkreises eine Gerade s, die den Grundkreis nicht schneidet, und wählen einen Punkt $\mathfrak{M}$ auf der Kegelachse SM. Die Ellipsenebene sei die Ebene von s und $\mathfrak{M}$. Wie schon bei Fig. 371 der letzten Nummer erörtert wurde, erhalten wir konjugierte Durchmesser der Ellipse auf folgende Art. In der Ebene des Grundkreises wird die Senkrechte zu s durch M gezogen. Sie stellt sich in der Zeichnung als ein Durchmesser AB des elliptischen Bildes des Grundkreises dar, und zwar als derjenige, der zu dem Durchmesser in der Richtung von s konjugiert ist. Die Gerade AB schneide s in N. Dann sind die Schnittpunkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der Mantellinien SA und SB mit den Geraden $N\mathfrak{M}$ die Endpunkte eines Durchmessers der Ellipse. Die Ellipsenmitte $\mathfrak{E}$ ist also der Mittelpunkt von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, und der zu $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ konjugierte Durchmesser $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, den wir noch bestimmen wollen, ist nach Fig. 371 der letzten Nummer zur Geraden s parallel. Deshalb schneidet die Ebene durch S und $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ die Grundkreisebene in einer leicht zu ermittelnden Parallelen CD zu s. Diese Gerade muß nämlich durch den Punkt E

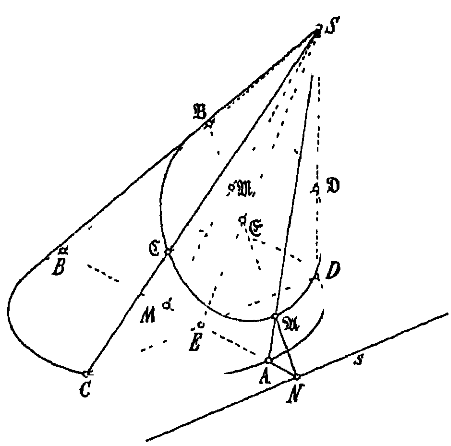


Fig. 372

B gehen, in dem $S\mathfrak{E}$ die Grundkreisebene schneidet. Aus der CD des Grundkreises geht der gesuchte konjugierte Durchmesser $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ r, wie es die Figur zeigt. Da somit konjugierte Durchmesser $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ der Ellipse gefunden sind, vermag man ihre Achsen ebenfalls bestimmen (Nr. 85), so daß die Ellipse nach Nr. 82 gezeichnet werden kann.

Jetzt handle es sich um einen parabolischen Schnitt des Kegels. Zunachst sei irgendeine Tangentialebene gewahlt, dies geschieht durch Annahme eines Punktes T auf dem Grundkreis, siehe Fig 373 Seine Tangente t ist die Gerade, in der die längs der Mantellinie ST oder m den Kegel berührende Ebene die Grundkreisebene schneidet Die Parabelebene wird parallel zu dieser Tangentialebene angenommen Ihre Schnittgerade s mit der Grundkreisebene ist also irgendeine zu t parallele Gerade s, die den Grundkreis in A und B schneide Die Punkte A und B gehoren der Parabel an. Ihre Tangenten a und b liegen einerseits in den Tangentialebenen des Kegels langs der Mantellinien SA und SB, andererseits in der Parabelebene und sind daher parallel zu denjenigen Geraden SU und SV, in denen die Tangentialebene langs ST von den Tangentialebenen langs SA und SB geschnitten wird Somit sind zwei Parabelpunkte und ihre Tangenten bekannt, und deshalb laßt sich der Scheitel nach Nr 265 finden. Aber es ist wohl moglich (und dieser Fall liegt in Fig 373 vor), daß der Schnittpunkt von a und b unerreichbar wird. Auch ist es zur Erzielung einer großeren Genauigkeit besser, noch einen Parabelpunkt in großerer Nähe des Scheitels zu benutzen Man kann leicht beliebige Punkte der Parabel ermitteln, aber es empfiehlt sich insbesondere ein gewisser Punkt P Die Ebene durch die Kegelspitze S, den Punkt T und den Mittelpunkt M des Grundkreises hat mit dem Kegel außer der Mantellinie ST noch eine Mantellinie SQ gemein, indem Q der Gegenpunkt von T auf dem Grundkreis ist Diese Mantellinie trifft die Parabel in dem Schnittpunkt P mit der Parallelen zu ST durch N. Da ferner die Tangentialebene der Mantellinie SPQ die Grundkreisebene in einer zu s parallelen Tangente des Grundkreises schneidet, muß die Tangente p des Parabelpunktes P ebenfalls zu s parallel sein Die Richtung der Parabelachse ist die der Mantellinie ST Man kann nun nach Nr. 265 auf mehrere Arten mit Benutzung der Punkte P, A, B und ihrer Tangenten p, a, b den Scheitel, die Parabelachse und den Brennpunkt, also auch den Krummungsmittelpunkt des Scheitels usw bestimmen, ist also imstande, die Parabel nach Nr 264 zu zeichnen

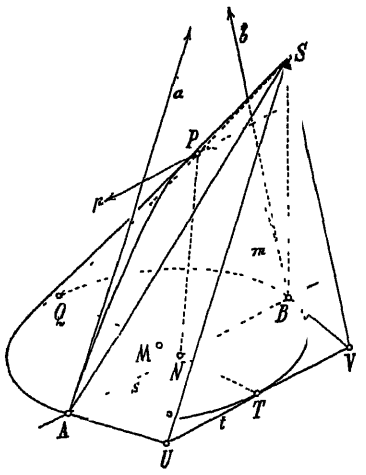


Fig 373

Schließlich nehmen wir, um einen hyperbolischen Schnitt des Kegels zu bekommen, zwei Mantellinien m_1 und m_2 oder SY_1 und SY_2 beliebig an und legen die Hyperbelebene parallel zur Ebene dieser Mantellinien, so daß sie also die Grundkreisebene in einer Parallelen s zu Y_1Y_2

schneidet, siehe Fig 374. Nach Nr 257 werden in Y_1 und Y_2 die Tangenten an den Grundkreis gelegt. Treffen sie s in X_1 und X_2, so sind die Parallelen x_1 und x_2 zu m_1 und m_2 durch X_1 und X_2 die Asymptoten x_1 und x_2 der Hyperbel. Ihr Schnittpunkt ist der Hyperbelmittelpunkt $\mathfrak{H}$. Schneidet s den Grundkreis in U und V, so sind U und V Hyperbelpunkte, mit deren Hilfe die Hyperbel aus ihren Asymptoten x_1, x_2 nach Nr. 260 konstruiert werden kann.

Aber zur genaueren Bestimmung der Hyperbel ist es besser, weniger nahe bei den Asymptoten gelegene Punkte zu benutzen. Es ist selbstverständlich leicht, beliebige Punkte der Kurve zu ermitteln, meistens aber empfiehlt es sich, wie folgt vorzugehen: Wenn der Kegel in der Zeichnung so erscheint, daß er äußerste Mantellinien hat, wie es in Fig 374 der Fall ist, sind diese Mantellinien Tangenten der Hyperbel in der Zeichnung. Dies folgt einfach daraus, daß die Hyperbel alle Mantellinien trifft und die äußersten in der Zeichnung nicht überschreiten darf.

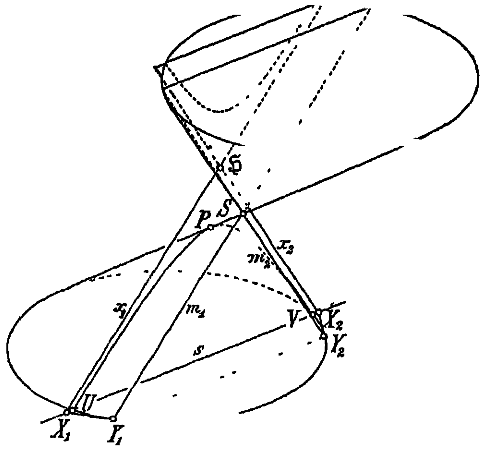


Fig 374

In Wahrheit, d. h im Raume, sind diese äußersten Mantellinien im allgemeinen keine Tangenten, wohl aber im Bilde. Nun kann man nach Nr 259 die Berührungspunkte finden, nämlich die Mitten der zwischen den Asymptoten enthaltenen Strecken der äußersten Mantellinien. So ist z B der Punkt P in Fig 374 bestimmt worden. Aus ihm und den Asymptoten kann man nach Nr 260 die vollständige Zeichnung der Hyperbel mit ihrer Hauptachse, ihren Scheiteln und den Krümmungskreisen der Scheitel gewinnen.

Zum Schlusse sei noch einmal hervorgehoben, daß die Achsen der Kegelschnitte in der Zeichnung im allgemeinen nicht die Projektionen der wahren Achsen der Kegelschnitte im Raume sind, insbesondere auch nicht die Scheitel und Brennpunkte der Bilder die Projektionen der wahren Scheitel und Brennpunkte. Wohl aber sind die Projektionen der Asymptoten einer Hyperbel stets die Asymptoten der Bildhyperbel.

269. Übungen. In den folgenden Aufgaben sollen jedesmal die Kegelschnitte vollkommen bestimmt, d. h. ihre Achsen, Asymptoten usw. ermittelt werden.

1) Auf der Grundrißtafel stehe ein Rotationskegel, seinem Grundkreis sei ein Quadrat umschrieben, und ein Punkt auf der Kegelachse, der tiefer als die Kegelspitze liegt, sei die Spitze einer Pyramide, die dies Quadrat als Grundfläche hat. Gesucht die Durchdringung der Pyramide mit dem Kegel. Es ergeben sich vier Ellipsenbogen.

2) Auf der Grundrißtafel stehe lotrecht eine Säule, deren Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck ist. Die Säule soll konisch abgedreht werden,

d. h. auf die Säule wird ein Rotationskegel gesetzt, dessen Achse mit der Säulenachse zusammenfällt und dessen Mantellinien einen gegebenen Winkel mit der Achse bilden und gesucht wird die Durchdringung der Säulenflächen mit dem Körper. Es ergeben sich sechs Hyperbelbogen (Nr. 258). Beispiel hierzu ein mittels der Maschine zugespitzter sechskantiger Bleistift.

3) Auf der Grundrißtafel liege ein Rotationskegel, so daß also die Grundrißtafel eine Tangentialebene des Kegels sei. Vgl die 5. Aufgabe in Nr. 255. Angenommen, daß sich über der wagerecht gedachten Grundrißtafel Wasser befinde, und zwar in solcher Höhe, daß der Kegel nur zum Teil benetzt wird; die Benetzungslinie soll ermittelt werden. Sie ist eine Parabel.

4) Die Sonne dreht sich im Laufe des Tages scheinbar um diejenige Gerade w, die zur Erdachse parallel ist, also in der Nord-Süd-Ebene liegt und mit der wagerecht gedachten Grundrißtafel den Winkel β bildet, wo β die geographische Breite des Ortes ist (Nr. 39), also etwa 52° für Berlin An jedem Tage des Jahres bilden die Sonnenstrahlen mit diesem sogenannten Weiser einen gewissen Winkel α Dieser Winkel schwankt zwischen $90° - \varepsilon$ und $90° + \varepsilon$, wenn ε den Winkel der Ekliptik (Nr 46) bedeutet, der etwa $23^1/_2$° beträgt. Man nehme also einen dementsprechenden Wert von α an und ermittle den Lauf des Schattens, den ein auf dem Weiser w angebrachter Punkt P im Laufe des Tages auf eine wagerechte Ebene wirft Diese Schattenbahn ist eine Hyperbel Zur Zeit der Nachtgleichen (Nr. 40) ist $\alpha = 90°$, und dann, aber auch nur dann, ergibt sich eine Gerade. Am längsten oder kürzesten Tag ist $\alpha = 90° - \varepsilon$ bzw $90° + \varepsilon$, und dann hat die Hyperbel die stärkste Krümmung. Daß sich stets eine Hyperbel ergibt, gilt allerdings nur dann, wenn der Ort nicht in einer der kalten Zonen der Erde liegt, d h. wenn die geographische Breite β nicht größer als $90° - \varepsilon$ ist. Wie stellt sich die Lösung der Aufgabe für einen Ort in einer der kalten Zonen dar?

§ 7. Schattenkonstruktionen im Grundriß und Aufriß[1]).

270. Schlagschatten von Punkt, Gerade und Ebene. Wie in § 2 des zweiten Kapitels nehmen wir an, daß die Gegenstände durch parallele Strahlen beleuchtet werden. Wenn die Tafeln undurchsichtig sind, werfen die Gegenstände darauf Schatten, sobald sie sich im Hauptquadranten befinden (Nr 194) und die Lichtrichtung so gewählt worden ist, daß die Oberseite der Grundrißtafel sowie die Vorderseite der Aufrißtafel beleuchtet wird. Diese Annahmen wollen wir im folgenden machen. Die Lichtrichtung ist gegeben, sobald die Projektionen irgendeines Lichtstrahls l gegeben sind. Diese Projektionen sind also derart anzunehmen, daß sie entweder beide von links nach rechts oder beide von rechts nach links auf die Projektionsachse in dem durch Pfeile zu kennzeichnenden Sinne der Beleuchtung zustreben

Um technische Zeichnungen (Nr. 1) anschaulicher zu machen, liebt man es, die in ihnen dargestellten Gegenstände insbesondere einer Beleuchtung auszusetzen, bei der die Projektionen l' und l'' eines Licht-

[1]) In diesem Paragraphen wird der Inhalt der § 2 bis 5 des 2 Kapitels als bekannt vorausgesetzt, in Nr. 279 auch Einiges aus § 8 des 2 Kapitels

strahls l mit der Projektionsachse je 45° bilden, weil diese Annahme besonders bequem ist. Bei dieser Annahme bildet zwar der Lichtstrahl l mit beiden Tafeln denselben Winkel α, aber dieser Winkel beträgt nicht 45° In Fig. 375 ist er nach Nr 238 bestimmt worden Hiernach ist $\operatorname{tg}\alpha = 1 : \sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, also $\alpha = 35^\circ\ 15'\ 52''$. Auch ist der Winkel β bestimmt worden, den der Lichtstrahl mit der Projektionsachse bildet (Nr. 240) Für ihn ist $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{2}$, also $\beta = 54^\circ\ 44'\ 8''$, der Komplement von α. In diesem Sonderfall haben die Schatten besondere Eigenschaften, die im allgemeinen nicht auftreten Sich von vornherein auf diesen Sonderfall beschranken heißt, sich der Gefahr aussetzen, solche Konstruktionen, die nur dann gelten, ohne Recht zu verallgemeinern Wir werden beiden Projektionen l' und l'' des Lichtstrahls beliebige Richtungen geben

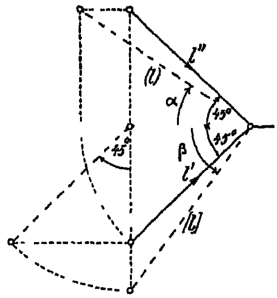


Fig 375

Der Schlagschatten eines Punktes P ist einer der beiden Spurpunkte des durch P gehenden Lichtstrahls Wenn sich P im Hauptquadranten befindet, liegt entweder der Grundriß-Spurpunkt vor der Aufrißtafel und der Aufriß-Spurpunkt unter der Grundrißtafel, siehe Fig 376 a, oder der Aufriß-Spurpunkt uber der Grundrißtafel und der Grundriß - Spurpunkt hinter der Aufrißtafel, siehe Fig 376 b Also ist im ersten Fall der Grundriß-Spurpunkt der Schlagschatten 𝔓 von P, im zweiten der Aufriß-Spurpunkt Der andere, in Fig 376 mit (𝔓) bezeichnete Spurpunkt ware nur dann der Schlagschatten, wenn die Grundrißtafel bzw Aufrißtafel durchsichtig ware. Er ist also ein bloß geometrischer Schatten (Nr. 110) Obgleich er nicht in Erscheinung tritt, bedient man sich seiner oft mit Nutzen bei der Ermittlung der wirklichen Schatten, wie sich im folgenden zeigen wird. Insbesondere kann es vorkommen, daß der Schlagschatten des Punktes P gerade auf der Projektionsachse liegt, indem 𝔓 mit (𝔓) zusammenrückt Da im Fall a der Punkt 𝔓 der Grundrißtafel und der Punkt (𝔓) der Aufrißtafel angehört, liegt der Aufriß 𝔓″ von 𝔓 und der Grundriß (𝔓)′ von (𝔓) auf der Projektionsachse. Im Fall b dagegen liegt der Grundriß 𝔓′ von 𝔓 und der Aufriß (𝔓)″ von (𝔓) auf der Projektionsachse.

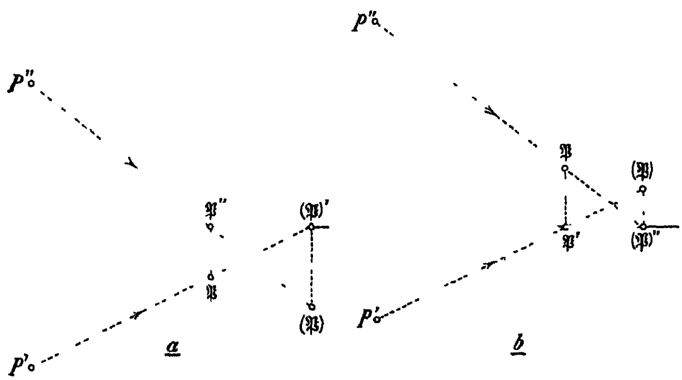


Fig 376

Da man sich bei Schattenkonstruktionen im Grund- und Aufriß gelegentlich einer Seitenrißtafel bedient, werde noch erörtert, wie man die Projektion des Lichtstrahls auf eine neue Aufrißtafel

findet, die längs einer Geraden s auf der Grundrißtafel senkrecht steht. Der Punkt P wirft in Fig. 377 seinen Schatten $\mathfrak{P}$ auf die Aufrißtafel. Der Grundriß $\mathfrak{P}'$ von $\mathfrak{P}$ liegt hier also auf der Projektionsachse, während der Aufriß $\mathfrak{P}''$ der Punkt $\mathfrak{P}$ selbst ist. Man bestimmt daher in bekannter Weise die Projektion $\mathfrak{P}'''$ von $\mathfrak{P}$ auf die um s umgelegte neue Aufrißtafel ebenso, wie man die Projektion P''' von P aus P' und P'' ermittelt. Dann gibt $P'''\mathfrak{P}'''$ die Lichtrichtung in der neuen Aufrißtafel an. Man kann auch den geometrischen Schatten $(\mathfrak{P})$ von $\mathfrak{P}$ auf der Grundrißtafel benutzen, wie es die Figur zeigt.

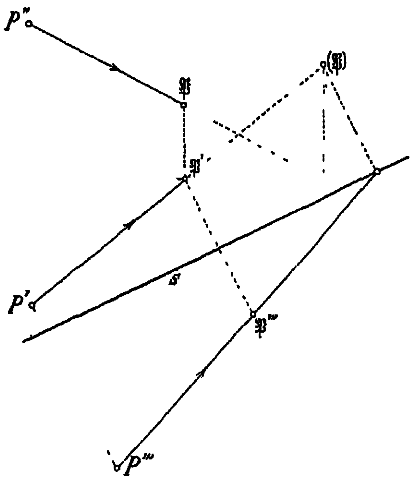


Fig. 377

Eine durch den Hauptquadranten gehende Gerade g liegt entweder so, daß sich sowohl ihr Grundriß-Spurpunkt S_1 vor der Aufrißtafel als auch ihr Aufriß-Spurpunkt S_2 über der Grundrißtafel befindet, oder so, daß dies nur für einen der beiden Punkte zutrifft, siehe Fig. 273 von Nr. 196 in den Fällen a, b, c. Die Spurpunkte sind ihre eigenen Schlagschatten. Um den **Schlagschatten** $\mathfrak{g}$ **der Geraden** g zu ermitteln, braucht man daher nur noch den Schlagschatten $\mathfrak{P}$ eines ihrer Punkte P zu bestimmen, siehe Fig. 378. Nur im Fall a besteht der

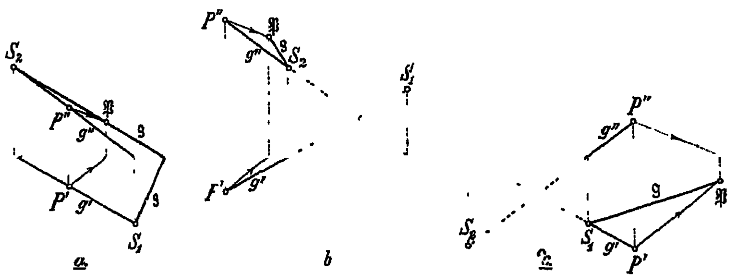


Fig. 378

Schlagschatten aus zwei Strecken. **Beide müssen sich auf der Projektionsachse treffen**, denn die Strecken sind die Schnitte der durch g gelegten Lichtebene mit den Tafeln, und alle drei Ebenen haben einen Punkt gemein.

Der **Schlagschatten einer Strecke** AB ist entweder eine Strecke der Grundrißtafel oder er besteht aus je einer Strecke im Grundriß und Aufriß, die sich auf der Projektionsachse treffen, oder er ist eine Strecke der Aufrißtafel, siehe Fig. 379. Im Fall b tut man gut, auch die bloß geometrischen Schlagschatten $(\mathfrak{A})$ und $(\mathfrak{B})$ zu bestimmen, die beiden Strecken sind Teile von $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ und $(\mathfrak{A})\mathfrak{B}$.

Der **Schlagschatten eines Dreiecks** liegt ebenfalls entweder nur auf der Grundrißtafel oder auf beiden Tafeln oder nur auf der Aufrißtafel, siehe Fig. 380. Im Fall b müssen wieder die Grenzen der

Schlagschatten auf der Projektionsachse zusammentreffen. N dann, wenn vielerlei Schattenkonstruktionen auszuführen s empfehlen, im Fall b die vollständigen geometrischen Schlagschatten beiden Tafeln herzustellen, soweit nicht unerreichbare Punkte auftreten.

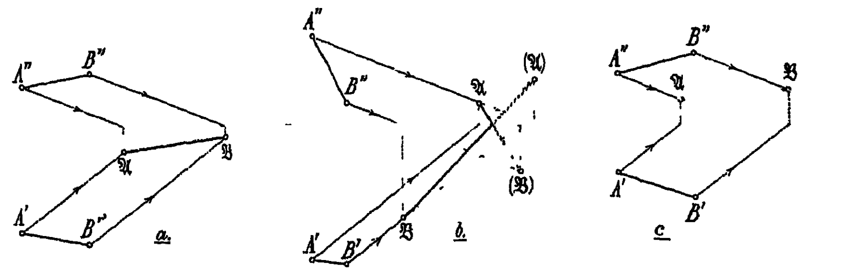


Fig. 379

Nach der Regel von Nr. 111 stellt man fest, welche Seite des gegebenen Dreiecks Eigenschatten hat. Es ist diejenige, die in ihrer Projektion entgegengesetzten Umlaufsinn wie der Schlagschatten hat. Eine Prüfung der Richtigkeit ergibt sich, indem man nach Nr 198 feststellt, ob man im Grundriß und Aufriß dieselbe Dreieckseite oder verschiedene Dreieckseiten sieht In unserer Figur sind es in den Fallen a und b verschiedene Seiten, so daß die eine hell und die andere dunkel sein muß Im Fall c

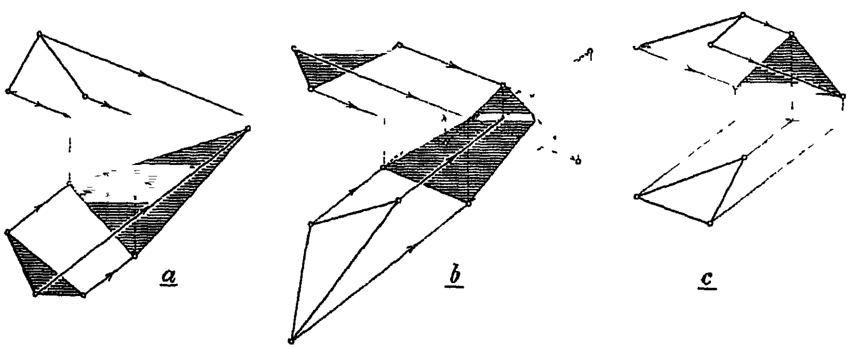


Fig 380

dagegen zeigt der Grundriß dieselbe Seite wie der Aufriß, und zwar die helle Seite Hiermit sind nicht alle Möglichkeiten erschopft Bei anderer Wahl des Dreiecks können die Eigenschatten gerade umgekehrt wie in Fig. 380 a, b, c auftreten. Auch ist es möglich, daß in den Fallen a und b beide Projektionen des Dreiecks hell oder beide dunkel sind, sowie daß im Fall c die eine hell und die andere dunkel ist.

271. Affinität zwischen den Schlagschatten im Grundriß und Aufriß. Liegt irgendein Gegenstand im Raume vor, so kann man von seinen Punkten A, B, C, D . . sowohl die wirklich in Erscheinung tretenden Schlagschatten als auch die nur geometrischen Schlagschatten bestimmen, also die Punkte 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 . . und die Punkte (𝔄), (𝔅), (ℭ), (𝔇) . . ., siehe Fig. 381. Da diese Punkte die Schnittpunkte paralleler Lichtstrahlen mit der Grundriß- und Aufrißtafel sind, ist die von den

ẓschatten im Grundriß gebildete Figur affin zu der en Schlagschatten im Aufriß gebildeten Figur (Nr. 120) ist die Affinitatsrichtung die der Lichtstrahlen und die Affinitats- die Projektionsachse Nach Nr 124 bleibt zwischen beiden Figuren auch dann eine Affinität bestehen, wenn man die Ebenen der Figuren um ihre Schnittgerade dreht, indem man die Grundriß- und Aufrißtafel in eine Doppelebene umlegt (Nr. 196). Nach wie vor ist dann die Projektionsachse die Affinitatsachse. Dagegen hat sich die Richtung der Affinitat geandert Es ist jetzt die Richtung der in Fig. 381 durch Strich-Punkt-Linien gekennzeichneten Strekken 𝔄(𝔄), 𝔅(𝔅) usw. Zur Vermeidung von Mißverstandnissen sei ausdrucklich bemerkt, daß nicht 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 . . ohne Ausnahme zu der einen und (𝔄), (𝔅), (ℭ), (𝔇) . zu der affinen Figur gehoren, denn je nach der Lage der Punkte A, B, C, D . im Raum kommt der wirkliche Schatten auf der einen oder anderen Tafel zustande In Fig 381 gehören z. B (𝔄), 𝔅, (ℭ), 𝔇 der Grundrißtafel und 𝔄, (𝔅), ℭ, (𝔇) der Aufrißtafel an.

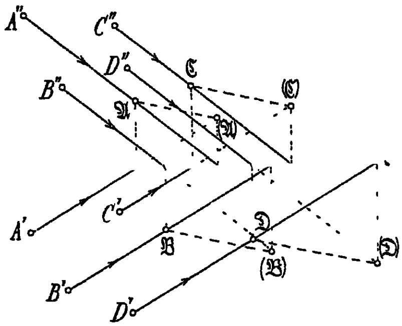


Fig 381

Nur in dem besonderen Fall, wo die Lichtrichtung zu beiden Tafeln gleiche Neigung hat (Nr 270), sind 𝔄(𝔄), 𝔅(𝔅) usw zur Projektionsachse parallel Also nur in diesem Fall ist die Richtung der Affinitat zur Achse der Affinitat parallel.

Kennt man die Schlagschatten, die alle Punkte A, B, C, D . . eines Gegenstandes auf eine Tafel, z. B. auf die Grundrißtafel werfen, und zwar sowohl die wirklich zustande kommenden, wie 𝔄 und ℭ, als auch die nur geometrischen Schatten, wie (𝔅) und (𝔇), so kann man die Schlagschatten, die vom Gegenstand auf die andere Tafel, also auf die Aufrißtafel, geworfen werden, ohne Benutzung der Projektionen des Gegenstandes selbst bestimmen Das einzuschlagende Verfahren erhellt am deutlichsten, wenn man auf Fig. 376 der letzten Nummer zuruckblickt Nehmen wir an, es sei z B im Fall b von Fig. 376 nur der geometrische Schlagschatten (𝔓) auf der Grundrißtafel bekannt Der Aufriß (𝔓)″ dieses Punktes ist der Fußpunkt des Lotes von (𝔓) auf die Achse, demnach ist 𝔓 auf der nach diesem Fußpunkt gehenden Aufrißprojektion eines Lichtstrahls zu suchen. Da weiterhin 𝔓 als Punkt der Aufrißtafel seinen Grundriß 𝔓′ auf der Achse hat, ist 𝔓′ der Schnittpunkt der nach (𝔓) gehenden Grundrißprojektion eines Lichtstrahls mit der Achse. Also liegt 𝔓 auf dem in diesem Schnittpunkt auf der Achse errichteten Lot Man ermittelt demnach den Punkt 𝔓 aus dem als bekannt angenommenen Punkt (𝔓) durch ein Überkreuzziehen von Lichtstrahlen, und deshalb heißt diese Konstruktion das Ü b e r k r e u z v e r f a h r e n.

Nur in dem besonderen Fall, wo die Lichtrichtung zu beiden Tafeln gleiche Neigung hat, liegen 𝔓 und (𝔓) auf einer Parallelen zur Projektionsachse. In diesem Fall, aber auch nur dann, laßt sich daher das Überkreuzverfahren vereinfachen.

Man verwendet das Überkreuzverfahren namentlich dann, wenn der

wirkliche Schlagschatten eines Gegenstandes nahezu vollständig auf nur eine Tafel fällt und also nur durch ein kleines Stück Schlagschatten auf der anderen Tafel zu ergänzen ist Ein Beispiel zeigt Fig 382. Hier ist angenommen worden, daß ein Gegenstand auf die Grundrißtafel einen Schlagschatten werfe, dessen Rand eine krumme Linie 𝔩 ist, von der ein kleines Stück 𝔄𝔅 über die Projektionsachse übergreift, so daß der Bogen 𝔄(ℭ)𝔇 nicht zur wirklichen, sondern nur zur geometrischen Grenze des Schlagschattens gehört An die Stelle dieses Bogens tritt ein Bogen, der in der Aufrißtafel gelegen ist. Um seine Form zu bekommen, genügt es, falls der Bogen nicht zu groß ist, zu den Tangenten 𝔞 und 𝔟 von 𝔩 in 𝔄 und 𝔅 sowie zu der mit der Projektionsachse parallelen Tangente (𝔠) von (ℭ) die affinen Geraden in der Aufrißtafel zu bestimmen und auch den zu (ℭ) affinen Punkt ℭ zu ermitteln Der Punkt ℭ geht durch das Überkreuzverfahren aus ℭ hervor, und da (𝔠) zur Achse parallel ist, muß auch die Tangente 𝔠 von ℭ zur Achse parallel sein Was 𝔞 und 𝔟 betrifft, so haben sie einen Punkt (𝔇) der Grundrißtafel gemein Man bestimmt daher durch das Überkreuzverfahren den zu (𝔇) affinen Punkt 𝔇 der Aufrißtafel und bekommt dadurch die Geraden 𝔇𝔄 und 𝔇𝔅, die den gesuchten Bogen auf der Aufrißtafel in 𝔄 und 𝔅 berühren

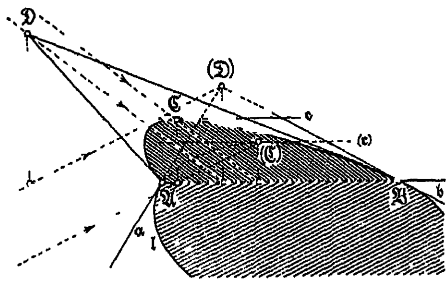


Fig 382

272. Schatten ebenflächiger Gebilde. Alles Wesentliche über die Herstellung der Schlag- und Eigenschatten ebenflächiger Gebilde ist schon in Nr 110 bis 116 erörtert worden Nach Nr 114, 115 ermittelt man die Eigenschatten aus den Schlagschatten, da der Schlagschatten der Grenze des Eigenschattens die Grenze des Schlagschattens ist Dabei bedient man sich wie damals des Zurückgehens in der Lichtrichtung einerseits, um aus der Grenze der auf die Tafel fallenden Schlagschatten die Grenze des Eigenschattens der Körper zu finden, andererseits um auch noch diejenigen Schlagschatten zu bestimmen, die ein Körper auf seine eigene Oberfläche oder auf die Oberfläche eines anderen Körpers wirft

Es wird genügen, dies durch ein Beispiel zu erläutern In Fig 383 ist ein Vierflach $ABCD$ dargestellt, von dem eine Fläche ABC weggenommen ist, so daß nur drei Flächen übrigbleiben und man in das Innere blicken kann Aus den Schlagschatten, die von den Dreiecken ABD, BCD, CAD auf die Tafeln geworfen werden, erkennt man, welche Seiten dieser Dreiecke Eigenschatten aufweisen: Von den drei im Grundriß sichtbaren Seiten der Dreiecke haben zwei, nämlich $A'B'D'$ und $C'A'D'$ entgegengesetzten Umlaufsinn wie ihre Schlagschatten 𝔄𝔅𝔇 und ℭ𝔄𝔇 Sie sind daher dunkel, während die Fläche $B'C'D'$ an sich hell ist. Ebenso stellt man fest, daß im Aufriß die Fläche $C''A''D''$ dunkel ist, während die Flächen $A''B''D''$ und $B''C''D''$ an sich hell sind. Nun aber fällt auf das Dreieck BCD, das man in beiden Projek-

tionen von derselben, und zwar von der hellen Seite sieht, seitens der Flächen *ABD* und *ACD* Schlagschatten. Man sieht dies daran, daß der Schlagschatten, den das Dreieck *BCD* auf die Tafeln wirft, zum Teil durch die Schlagschatten von *ABD* und *ACD* überdeckt wird. Das Zurückgehen in der Lichtrichtung ist hier mit Hilfe eines Punktes (𝔈), des Schnittpunktes der verlängerten Geraden 𝔈𝔄 mit (𝔅)(𝔇), ausgeführt worden.

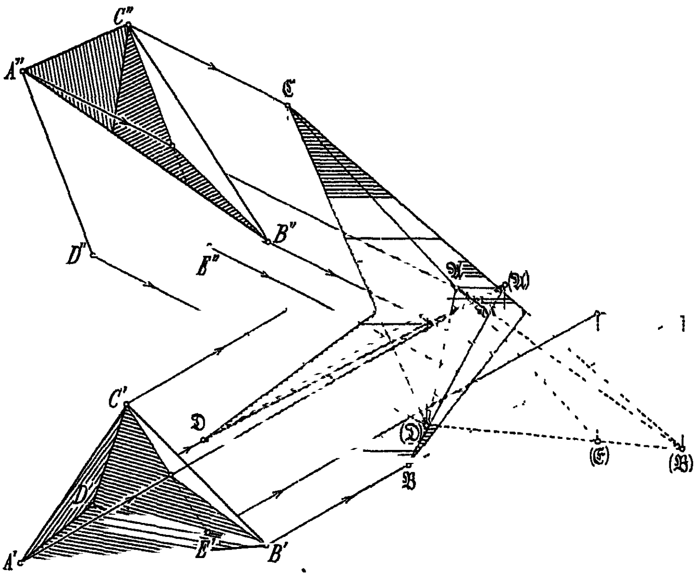


Fig 383

Handelt es sich um Schlagschatten, die auf wagerechte, d h zur Grundrißtafel parallele, oder auf lotrechte Ebenen fallen, so bedarf es des Zurückgehens in der Lichtrichtung nicht, weil man diese Schatten ohne weiteres geradeso bestimmt wie die auf die Grundrißtafel und Aufrißtafel fallenden Schatten.

Als Beispiel diene Fig. 384, wo das Licht durch eine Tür und ein darüber befindliches Fenster auf eine Treppe und Türnische fällt. Man sieht, daß die mit *a*, *b*, *c* bezeichneten wagerechten Kanten sowie die mit *e*, *f* bezeichneten lotrechten Kanten von Tür und Fenster durch ihre Schlagschatten den dunklen Teil des ganzen Raumes begrenzen. Der Fußboden und die wagerechten Ebenen der Treppenstufen seien mit *0*, *I*, *II*, *III*, *IV* bezeichnet, die lotrechten Ebenen der Treppenstufen mit *1*, *2*, *3*, *4*, die dahinter befindliche Wand mit *5*, die Ebene der Türnische dahinter mit *6*, schließlich noch die sichtbare Innenwand der offenen Tür und des Fensters mit *7*. Die auf diese Ebenen fallenden Schatten sind durch die entsprechenden angehängten Ziffern kenntlich gemacht. Nur zur Vermeidung einer Überladung mit Bezeichnungen sind die Schlagschatten a_0, a_I', a_{II}' c_0, c_{III}', c_{IV}' weit nach vorn durchgezogen worden. Die auf die Treppenebenen *1*, *2*, *3*, *4* und auf die Wand *5* und Türebene *6* fallenden Schlagschatten sind mit Hilfe derjenigen Punkte ermittelt worden, in denen diese nach links

fortgesetzt gedachten Ebenen die nach hinten fortgesetzt gedachten schattenwerfenden Kanten a, b, c schneiden. Die Schlagschatten $\mathfrak{a}_7$ und $\mathfrak{b}_7$ auf der Tür- und Fensterwand 7 ergeben sich mit Hilfe der Schatten $\mathfrak{A}_7$ und $\mathfrak{B}_7$, die von den Eckpunkten A und B auf diese nach rechts

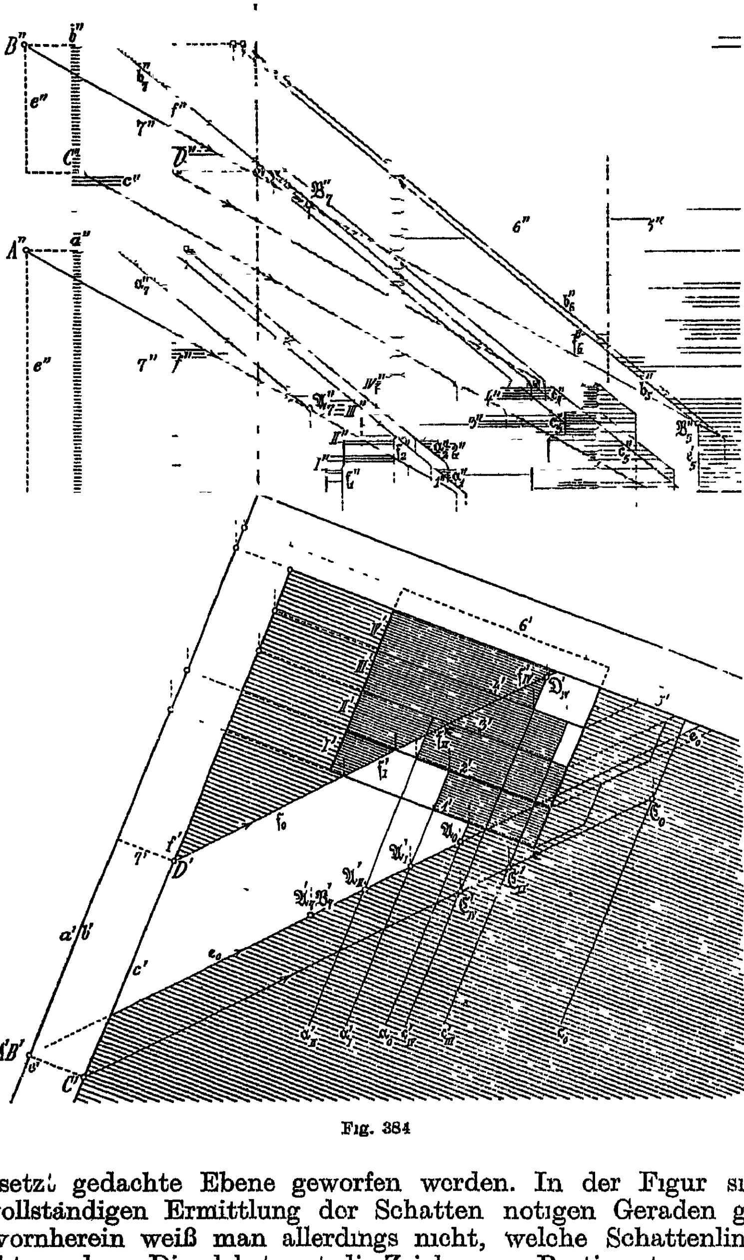


Fig. 384

fortgesetzt gedachte Ebene geworfen werden. In der Figur sind alle zur vollständigen Ermittlung der Schatten nötigen Geraden gezogen. Von vornherein weiß man allerdings nicht, welche Schattenlinien gebraucht werden. Dies lehrt erst die Zeichnung. Bestimmt man z. B. die

Schatten $\mathfrak{a}_{III}$ und $\mathfrak{a}_{IV}$, die a auf die Treppenebenen III und IV wirft, so findet man, daß die Schattenlinien nur auf den jenseits des Schlagschattens von f, also im Dunkeln gelegenen Teilen dieser Treppenstufen verlaufen und daher nicht gebraucht werden. Zwei Einzelheiten in der Figur seien besonders erwähnt: Das Fenster beleuchtet auch ein allerdings sehr kleines dreieckiges Stück des Fußbodens zwischen der Wand 5 und den Schatten $\mathfrak{c}_0$ und $\mathfrak{e}_0$ von c und e. Ferner fällt noch auf die allerdings nicht sichtbare rechte Türnischenwand zum Teil Licht. Die Grenzlinie verbindet dabei die Punkte, in denen die Schatten $\mathfrak{b}_5$ und $\mathfrak{b}_6$ auf diese Ebene treffen.

273. Kreisschatten. Die Schlagschatten, die ein durch seine Projektionen gegebener Kreis (Nr. 245) auf die Tafeln wirft, kann man nach Nr. 134 mittels Affinität bestimmen. So ist in Fig 385 der Schlagschatten im Grundriß ermittelt worden. Die Affinitätsachse ist dabei die Grundriß-Spurgerade s der Kreisebene, sie geht durch den Grundriß-Spurpunkt S von k und ist zu h parallel. Indem man die Kreisebene um s in die Grundrißtafel umlegt, gelangt der Mittelpunkt nach (M) Bei der Affinitat entspricht diesem Mittelpunkt (M) der Mittelpunkt $(\mathfrak{M})$ der Schattenellipse im Grundriß. Zur Bestimmung der Achsenrichtungen dieser Ellipse, also desjenigen rechten Winkels, der sich vermöge der Affinität wieder als rechter Winkel darstellt, ist nach Nr. 127 der Spiegelpunkt N von (M) hinsichtlich der Affinitatsachse s konstruiert und $\sphericalangle(M)(\mathfrak{M})N$ in zwei gleiche Teile zerlegt worden. In derselben Weise kann man den Schlagschatten des Kreises auf der Aufrißtafel finden. Man braucht dann als Affinitätsachse die Aufrißspur der Kreisebene.

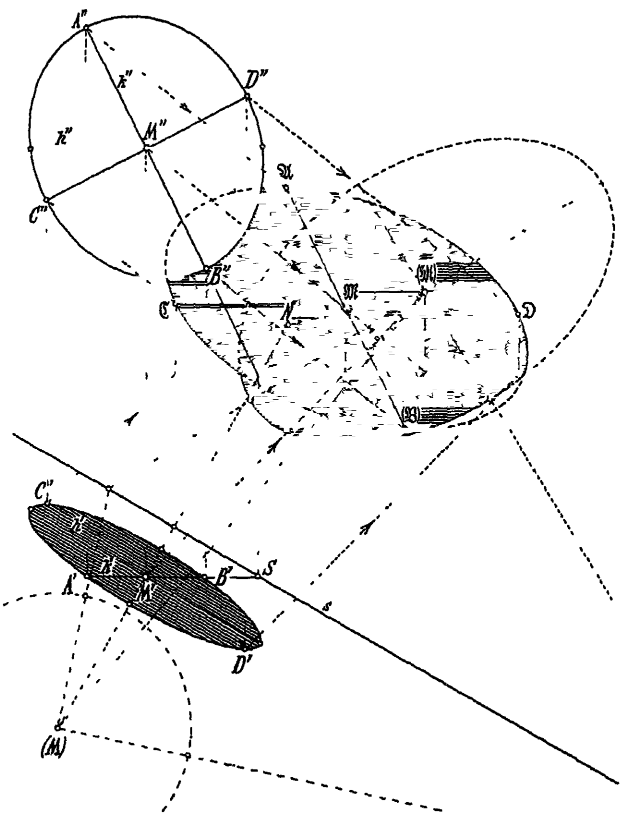


Fig 385.

S p e r r: Sind die Spurgeraden unerreichbar, so kann man, um z. B. die

Schatten im Grundriß zu bestimmen, zunachst die Grundrißtafel durch eine Hohenebene ersetzen, deren Schnitt mit der Kreisebene erreichbar ist. Der Schatten, den der Kreis auf diese Höhenebene wirft, geht durch Verschieben in der Lichtrichtung in den gesuchten Grundrißschatten uber.

Hat man den Schlagschatten im Grundriß gefunden, so kann man den Schlagschatten im Aufriß auch dadurch herstellen, daß man die in Nr. 271 besprochene Affinität zwischen den Schatten auf beiden Tafeln verwendet. Man geht also von zwei konjugierten Durchmessern der Schattenellipse im Grundriß, z. B von ihrer Haupt- und Nebenachse, aus und bestimmt die zu ihnen affinen und daher konjugierten Durchmesser der Schattenellipse im Aufriß, aus denen man dann nach Nr 85 die Achsen dieser Ellipse ableiten kann.

Man kann die Achsen der beiden Schattenellipsen im Grundriß und Aufriß noch auf eine andere Art finden, und dies ist das in Fig 385 fur die Schattenellipse im Aufriß benutzte Verfahren Die Schlagschatten, die irgendein in Wahrheit rechtwinkliges Durchmesserpaar des Kreises auf eine Tafel wirft, sind konjugierte Durchmesser der Schattenellipse, aus denen man also wieder nach Nr. 85 die Achsen der Schattenellipse ermitteln kann In Fig. 385 ist insbesondere dasjenige Paar von rechtwinkligen Kreisdurchmessern benutzt worden, das im Aufriß die Hauptachse $A''B''$ und Nebenachse $C''D''$ der Kreisprojektion gibt Wie man $C''D'$ genau ermittelt, wurde in Nr 245 erortert Der Schlagschatten 𝔄(𝔅) von AB ist zu $A''B''$ parallel und ebenso lang

Welche Seite der in Fig. 385 dargestellten Kreisscheibe hell ist, erkennt man daran, daß ihr Umlaufsinn mit dem des Schlagschattens ubereinstimmt Die beiden Schattenellipsen mussen sich auf der Projektionsachse treffen. Es kann aber auch vorkommen, daß sie diese Achse nicht schneiden Dann kommt nur eine von beiden Ellipsen als wirklicher Schatten in Betracht.

Um den Schlagschatten zu bestimmen, den ein Kreis auf eine irgendwie gegebene Ebene wirft, kann man wieder so verfahren, daß man die Schlagschatten eines in Wahrheit rechtwinkligen Durchmesserpaares ermittelt Sie sind in beiden Projektionen konjugierte Durchmesser der Ellipse, als die sich die gesuchte Schattenellipse im Grundriß und Aufriß darstellt.

274. Kugelschatten. Die Schlagschatten, die eine Kugel auf die Tafeln wirft, sind nach Nr 136 durch Ellipsen begrenzt, deren Mittelpunkte, Nebenachsen und Brennpunkte man leicht findet Die Mittelpunkte sind die Schlagschatten 𝔐 und (𝔐) der Kugelmitte, die Nebenachsen sind dem Kugeldurchmesser gleich und zu den Projektionen der Lichtstrahlen senkrecht Die Brennpunkte der Ellipse im Grundriß sind die Schlagschatten der höchsten und tiefsten Stelle A und B der Kugel, also in Fig. 386 die Punkte (𝔄) und 𝔅. Ganz entsprechend sind die Brennpunkte der Ellipse im Aufriß die Schlagschatten der vordersten und hintersten Stelle C und D der Kugel, also die Punkte (ℭ) und 𝔇 Aus den Nebenachsen und Brennpunkten ergeben sich nach Nr. 74 ohne weiteres die Langen der halben Hauptachsen und dadurch auch die Hauptscheitel der Ellipsen. Die beiden Schlagschattenellipsen müssen

sich, falls sie wie in Fig. 386 überhaupt die Projektionsachse schneiden, auf dieser Achse treffen. Andernfalls kommt nur eine von ihnen als wirklicher Schatten in Betracht.

Die Eigenschattengrenze der Kugel ist derjenige Großkreis, der den durch die Kugelmitte gehenden Lichtstrahl als Achse hat. Mithin erscheint er im Grundriß und Aufriß als Ellipse, deren Hauptachse auf dem zur Lichtrichtung $M'\mathfrak{M}$ bzw. $M''(\mathfrak{M})$ senkrechten und zur Grundrißtafel bzw. Aufrißtafel parallelen Durchmesser h bzw k der Kugel gelegen ist. Da man also von diesen Ellipsen die Hauptachse h' bzw. k'' und noch je einen Durchmesser k' bzw. h'' kennt, findet man ihre Nebenachsen sofort (Nr 245) Den höchsten Punkt der Eigenschattengrenze und ihren tiefsten Punkt, die Stellen O und U, kann man nach Nr 245 ohne Benutzung der Zeichnung der Ellipse genau bestimmen, und nach Nr 136 sind die Schlagschatten, die von den durch O und U gehenden Höhenkreisen der Kugel auf die Grundrißtafel geworfen werden, die Krümmungskreise der Hauptscheitel der Schlagschattenellipse im Grundriß, somit die Schatten $\mathfrak{K}_o$ und $\mathfrak{K}_u$ der Kreismittelpunkte K_o und K_u die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte. Man bedient sich des Krümmungskreises um $\mathfrak{K}_u$ mit Vorteil in dem Falle, wo die Lichtrichtung so flach ist, daß der Schatten der Kugelmitte auf der Grundrißtafel unerreichbar ist und also die Schlagschattenellipse nicht mit Hilfe ihrer Achsen gezeichnet werden kann. In diesem Falle wird man noch die Schatten mehrerer über U gelegener Höhenkreise der Kugel zeichnen. Sie sind nämlich Kreise der Grundrißtafel, die von der Schattenellipse umhüllt werden (vgl. Fig. 240 von Nr. 165), so daß man die Schlagschattenellipse als die Einhüllende dieser Kreise zu bestimmen vermag.

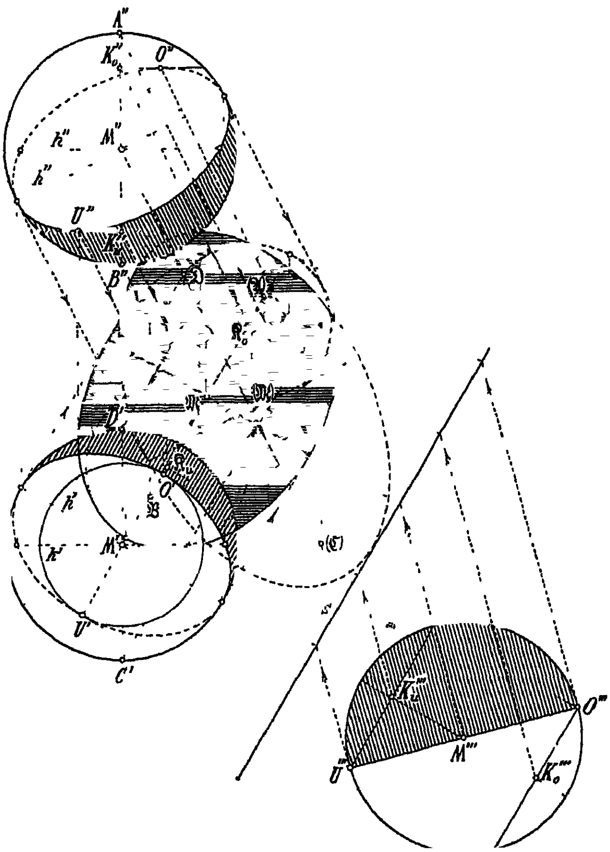


Fig 386

Entsprechendes gilt, wenn der Mittelpunkt der Schlagschattenellipse

im Aufriß unerreichbar ist. An die Stelle der Punkte O und U treten dann die (in der Figur nicht angegebene) vorderste und hinterste Stelle der Eigenschattengrenze und an die Stelle der Höhenkreise der Kugel die zur Aufrißtafel parallelen Kugelkreise.

Diejenigen Lichtstrahlen, deren Aufrißprojektionen den Umriß der Kugel im Aufriß berühren, sind die Aufriß-Spurgeraden zweier zur Aufrißtafel senkrechter Ebenen, zwischen denen die Kugel und alle ihre Schatten gelegen sind. Infolgedessen sind die Lote, die man in den Schnittpunkten der Aufrißprojektionen dieser beiden Lichtstrahlen mit der Projektionsachse auf diese Achse errichten kann, die zur Projektionsachse senkrechten Tangenten der Schlagschattenellipse im Grundriß. Also liegen die Hauptscheitel dieser Schlagschattenellipse im allgemeinen keineswegs auf diesen Loten, sondern nur dann, wenn die Lichtrichtung und demnach die Hauptachse der Schattenellipse zur Aufrißtafel parallel ist.

Man kann die Hauptscheitel der Schlagschattenellipse im Grundriß ohne Benutzung der Brennpunkte bestimmen, indem man einen zur Lichtrichtung parallelen und zur Grundrißtafel senkrechten Seitenriß anwendet, dessen Spurgerade s also zu $M'\mathfrak{M}$ parallel ist. Denn diese Seitenrißtafel ist parallel zu derjenigen lotrechten Ebene, die die Kugel, ihren Eigenschatten und ihren Grundriß-Schlagschatten symmetrisch teilt, so daß die Eigenschattengrenze im Seitenriß die gerade Strecke $O'''U'''$ ist. Indem man mit Hilfe des Seitenrisses die Schatten bestimmt, die von den Punkten O und U auf die Grundrißtafel geworfen werden, bekommt man sofort die Hauptscheitel der Grundrißellipse. Mit Hilfe des Seitenrisses kann man auch die Nebenachse der Eigenschattengrenze in der Grundrißprojektion ermitteln. In entsprechender Art kann man im Aufriß verfahren, indem man eine neue Tafel benutzt, die zur Lichtrichtung parallel und zur Aufrißtafel senkrecht ist.

Soll der Schatten gefunden werden, den eine Kugel auf irgendeine gegebene Ebene wirft, so macht man von dem Umstand Gebrauch, daß der Schlagschatten der Kugel durch den Schlagschatten desjenigen Großkreises begrenzt wird, der die Eigenschattengrenze ist. Man bestimmt also z. B. den Schlagschatten des auf h gelegenen Kreisdurchmessers und des dazu senkrechten Kreisdurchmessers OU. Dadurch bekommt man konjugierte Durchmesser der gesuchten Schlagschattenellipse, und ihre Projektionen sind auf beiden Tafeln konjugierte Durchmesser der Projektionen des Schlagschattens.

275. Kegel- und Zylinderschatten. In bezug auf den Eigen- und Schlagschatten eines Kegels gilt das in Nr. 135 Gesagte. Wir erwähnen aber noch einen Umstand: Zuweilen wird nur der Eigenschatten, nicht auch der Schlagschatten auf den Tafeln gesucht. Es wäre dann zu umständlich, den Eigenschatten durch Zurückgehen in der Lichtrichtung aus den Schlagschatten abzuleiten, wenn der Kegel eine beliebige Lage gegenüber den Tafeln hat. Vielmehr benutzt man dann denjenigen Schlagschatten, den der Kegel auf seine eigene Grundebene werfen würde, wenn sie undurchsichtig wäre. Man bestimmt also, siehe Fig. 387, den Punkt $\mathfrak{S}$, in dem der durch die Kegelspitze S gehende Lichtstrahl die etwa durch Hauptlinien h, k gegebene Grundebene des Kegels schneidet (Nr. 199) und

zieht von $\mathfrak{S}$ aus die Tangenten $\mathfrak{S}P$ und $\mathfrak{S}Q$ an die Grundkurve, als die in Fig. 387 ein Kreis angenommen worden ist. Dann sind die Mantellinien SP und SQ die Eigenschattengrenzen auf der Kegelfläche. Wenn man will, kann man die Berührungspunkte P', Q' und P'', Q'' der von $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}''$ an die Ellipsen im Grundriß und Aufriß gehenden Tangenten nach Nr. 78 ohne Benutzung der Ellipsen selber oder nach Nr. 189 mit Hilfe der Polaren der Punkte $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}''$ hinsichtlich der betreffenden Ellipsen bestimmen.

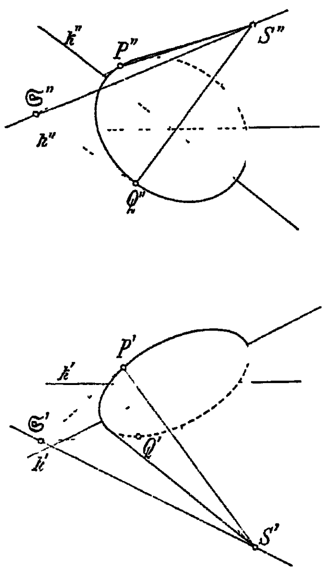


Fig 387

In Fig 387 ist der Pfeil, der den Sinn der Lichtrichtung bezeichnet, absichtlich fortgelassen worden. Kommt das Licht von rechts, d. h. ist der Pfeilsinn der von S nach $\mathfrak{S}$, so ist das zwischen SP und SQ links gelegene Stück der Kegelfläche dunkel, andernfalls das rechts gelegene Stück. Ergibt sich als Punkt $\mathfrak{S}$ eine Stelle im Innern des Grundkreises, so ist der ganze Kegel hell, wenn das Licht den Sinn von S nach $\mathfrak{S}$ hat, dagegen der ganze Kegel dunkel, wenn es den entgegengesetzten Sinn hat Liegt $\mathfrak{S}$ auf dem Grundkreis selbst, so gilt dasselbe mit einer Ausnahme Die Mantellinie $S\mathfrak{S}$ ist dann eine halbdunkle Streiflinie des Lichtes Es kann sein, daß die Lichtrichtung zur Grundkreisebene parallel ist, also $\mathfrak{S}$ unendlich fern liegt Dann ist die eine Hälfte des Kegels hell, die andere dunkel (vgl Nr 118)

Daß in Fig 387 ein gerader Kreiskegel angenommen worden ist, hat keine Bedeutung Das Gesagte gilt im wesentlichen auch für einen schiefen Kreiskegel, ja für einen Kegel mit beliebiger ebener Grundkurve Im letzten Fall ist es möglich, daß von $\mathfrak{S}$ mehr als zwei Tangenten an die Grundkurve gehen, so daß Sektoren der Kegelfläche abwechselnd hell und dunkel sind Auch kann es dann vorkommen, daß der Kegel auf sich selbst Schlagschatten wirft Wenn nämlich von $\mathfrak{S}$ an die Grundkurve eine Tangente $\mathfrak{S}P$ geht, die die Grundkurve außerdem noch in einem Punkte R schneidet, wirft die Mantellinie SP auf den Kegel einen Schatten längs der Mantellinie SR, falls das Licht von der entsprechenden Seite herkommt

Da ein Zylinder als Kegel mit unendlich ferner Spitze aufzufassen ist, gilt für den Eigenschatten des Zylinders Entsprechendes. Man wird daher den Schatten konstruieren, den etwa die Zylinderachse oder überhaupt irgendeine zum Zylinder parallele Gerade auf die Grundebene des Zylinders wirft Der unendlich ferne Punkt dieser Schattenlinie ist dann der Punkt $\mathfrak{S}$, d h man zieht die zu dieser Schattenlinie parallelen Tangenten an die Grundlinie, usw.

Die Schlagschatten, die ein Kegel oder ein Zylinder auf die Tafeln wirft, müssen sich, wie immer, längs der Projektionsachse aneinander anschließen, wenn sie überhaupt bis an die Achse herankommen Andernfalls kommt nur der Schlagschatten im Grundriß oder nur der im Aufriß als wirklicher Schatten in Betracht.

Auch in solchen Fällen, wo man den Schlagschatten des Kegels oder Zylinders auf den Tafeln konstruiert und also von ihnen aus in der Lichtrichtung zu den Eigenschatten gelangen kann, empfiehlt es sich, zur genaueren Ermittlung der Eigenschattengrenzen das vorhin angegebene Verfahren anzuwenden, d. h. den gedachten Schlagschatten auf der Grundebene des Kegels oder Zylinders zu benutzen. Hierzu als Beispiel Fig. 388 mit einem die Grundrißtafel längs einer Mantellinie berührenden geraden Kreiszylinder. Der vordere Endkreis, dessen Ebene lotrecht ist, wirft auf die Grundrißtafel eine Schattenellipse, deren Mittelpunkt $\mathfrak{M}$ der Schlagschatten der Kreismitte M ist und die man nach Nr. 273 durch Affinität bestimmt. Weil nun dabei die Ebene des Grundkreises um ihre Spur s in die Grundrißtafel umgelegt wird, benutzen wir sie zugleich als Seitenrißebene. Nach Nr. 270 wird also die Projektion der Lichtrichtung auf diese neue Tafel ermittelt. Die Schlagschattenellipse um $\mathfrak{M}$ ist zu dem Grundkreis auf der neuen Tafel affin mit der Affinitätsachse s, und die Schlagschattenellipse des anderen Endkreises geht aus dieser Ellipse durch Verschieben hervor. Der gesamte Schlagschatten, den der Zylinder auf die Grundrißtafel wirft, wird in Fig. 388 zu einem großen Teil durch den Zylinder verdeckt, und ein Stück davon kommt wegen der als undurchsichtig angenommenen Aufrißtafel nicht zustande. Er wird aber begrenzt durch Bogen der beiden konstruierten Ellipsen und die ihnen gemeinsamen und zur Zylinderachse parallelen Tangenten. Diese Tangenten sind nun die Schlagschatten derjenigen Mantellinien, die den Eigenschatten begrenzen und die man durch Zurückgehen in der Lichtrichtung ermitteln könnte. Genauer ergeben sie sich aber so. Die Zylinderachse wirft auf die Seitenrißtafel, d. h. auf die Ebene ihres Grundkreises, den Schatten, der durch den von M''' ausgehenden Strahl angegeben wird. Die zu ihm parallelen Tangenten des Kreises berühren den Kreis in den Punkten P und Q, von deren Seitenrissen P''' und Q''' man sofort zu den Grundrissen P' und Q' und damit zu den Eigenschattengrenzen auf dem Zylinder gelangt. Die Aufrisse P'' und Q'' müssen so hoch über der Projektionsachse liegen wie P''' und Q''' über s, so daß sich die Eigenschattengrenzen auch im Aufriß genau angeben lassen.

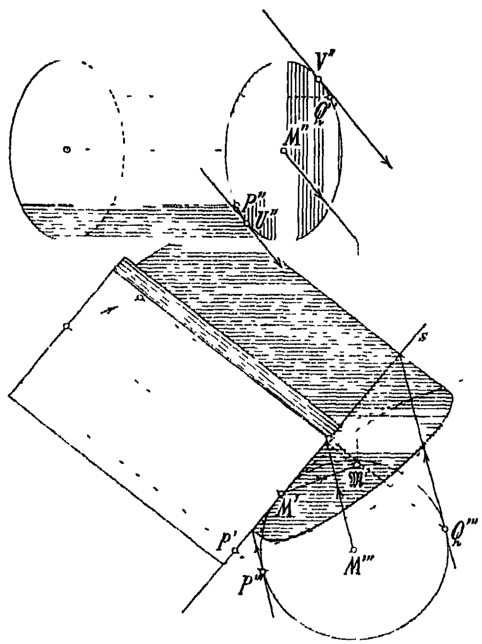


Fig. 388

Diejenigen Lichtstrahlen, deren Aufrißprojektionen den Aufriß des Grundkreises in U'' und V'' berühren, liefern im allgemeinen keineswegs

die Punkte P'' und Q'', in denen die Grenzlinien des Eigenschattens beginnen. Denn in Wahrheit berühren die durch U und V gehenden Lichtstrahlen dort gar nicht den Grundkreis, weil sie nicht in seiner Ebene verlaufen. Dies wäre nur dann der Fall, wenn die Grundrißprojektion der Lichtrichtung zu s parallel, also der Schatten des Grundkreises auf der Grundrißtafel statt einer Ellipse nur eine Strecke wäre.

276. Schlagschatten von Geraden auf Kegeln, Zylindern oder Kugeln. Da die durch eine Gerade g gehenden Lichtstrahlen eine Ebene bilden, ist der Schlagschatten, den eine Gerade g auf einen Kreiskegel werfen kann, ein Kegelschnitt, d. h eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel (Nr 267) Von dieser Kurve kommt allerdings immer nur ein Teil in Betracht, denn ein von einem Punkte P von g ausgehender Lichtstrahl tritt einerseits in den Kegel ein, um andererseits wieder auszutreten, und von beiden Stellen ist nur diejenige ein wirklicher Schatten, die von der Lichtrichtung aus gerechnet zuerst auf den Punkt P folgt. Deshalb kommt nur der auf dem hellen Flächenstück des Kegels liegende Teil des Kegelschnittes als wirklicher Schlagschatten in Betracht, und auch nur dann, wenn dieser Teil, von der Lichtrichtung aus gesehen, jenseits von g liegt. Wenn die Gerade g z B. den Kegel durchbohrt, ist derjenige Teil des Kegelschnitts, der zu den im Innern des Kegels gelegenen Punkten von g gehört, kein wirklicher Schlagschatten. Man konstruiert den Schlagschatten, indem man die Lichtebene durch g nach Nr. 268 mit dem Kegel zum Schnitt bringt.

Der Schatten einer Geraden g auf einen Kreiszylinder oder auf einen elliptischen Zylinder, was ja nach Nr 139 dasselbe ist, ist ein Stück einer Ellipse (Nr. 133) Konjugierte Durchmesser dieser Ellipse bekommt man, indem man irgend zwei zueinander senkrechte Durchmesser des Grundkreises oder konjugierte Durchmesser der Grundellipse auswählt, die von ihnen ausgehenden Mantellinien zieht und dann diejenigen Stellen auf ihnen bestimmt, die von der Geraden g Schatten empfangen. Diese vier Stellen sind die Endpunkte konjugierter Durchmesser der Schattenellipse, der Mittelpunkt der Ellipse liegt auf der Zylinderachse. Man ermittelt jene vier Stellen, indem man sowohl die Schlagschatten jener vier Mantellinien als auch der Geraden g auf der Grundrißtafel entwirft und von den Schnittpunkten der Schatten in der Lichtrichtung zurückgeht. Ein Beispiel gibt Fig 389, in der die einen geraden Zylinder durchbohrende Strecke AB einen Schatten auf den Zylinder wirft. Man kann die konjugierten Durchmesser *1 3* und *2 4* in diesem Fall auch ohne Benutzung der Schlagschatten im Grundriß ausfindig machen, weil die vier Mantellinien des Zylinders im Grundriß bloß als Punkte erscheinen. Das Verfahren ist für die Punkte *1* und *2* in der Figur angegeben. Man findet nämlich sofort aus dem Grundriß die Punkte *1̄* und *2̄* von AB, die auf die betreffenden Mantellinien Schatten werfen, so daß die Schatten *1* und *2* in der Aufrißprojektion gezeichnet werden können.

Die Gerade AB ist so angenommen worden, daß sie den Zylinder durchbohrt. Infolgedessen geht die Schattenellipse durch diese Durchbohrungsstellen, und das zwischen ihnen gelegene Stück der Ellipse ist kein wirklicher Schatten. Es ist in Fig. 389 fortgelassen worden. Da, wo die Ellipse die Eigenschattengrenzen des Zylinders überschreitet,

hat sie den Lichtstrahl als Tangente Denn ihre Tangente liegt in der Tangentialebene des Zylinders, und die Tangentialebene längs einer Eigenschattengrenze enthalt die Lichtstrahlen Ware der Zylinder nicht durch die Grundrißtafel beendet, so bestande der wahre Schlagschatten der Geraden AB aus den beiderseits von dem schattenfreien Stück zwischen den Durchbohrungsstellen gelegenen Bogen bis zu den Eigenschattengrenzen des Zylindermantels Die andere Hälfte der Ellipse ist bloß geometrischer Schatten, sie enthalt diejenigen Punkte, in denen die von AB ausgehenden Lichtstrahlen wieder aus dem Zylinder austreten In Fig 389 besteht der gesamte wirklich zustande kommende Schlagschatten der Strecke AB zunachst aus einer Strecke auf der Grundrißtafel von 𝔄 aus bis zum Grundkreis des Zylinders Daran schließt sich der Ellipsenbogen bis zur ersten Durchbohrungsstelle Dann kommt eine Lucke Weiterhin wird der Schatten von dem Ellipsenbogen von der zweiten Durchbohrungsstelle an bis zur Eigenschattengrenze des Zylinders gebildet. Hier springt der Schlagschatten wieder auf die Grundrißtafel uber, wo er geradlinig bis zu seinem Ende 𝔅 verlauft.

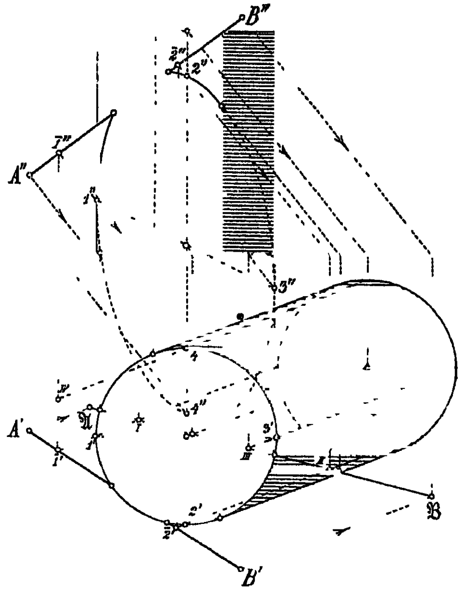


Fig 389

Der Schlagschatten, den eine Gerade auf eine Kugel wirft, ist als Schnitt der Kugel mit der Lichtebene durch die Gerade ein Kreis. Die Aufgabe, ihn zu bestimmen, kommt also darauf hinaus, die Kugel mit einer Ebene zu schneiden, siehe Nr 89 und 246

277. Schlagschatten in Hohlzylindern. Ein Kreiszylinder oder, was dasselbe ist (Nr. 139), ein elliptischer Zylinder werde durch eine Ebene abgeschnitten. Dadurch entsteht eine Ellipse Ist der Zylinder hohl, so kann dieser elliptische Rand einen Schlagschatten auf die Innenseite des Zylindermantels werfen Er besteht aus denjenigen Punkten, in denen die durch die Randpunkte gehenden Lichtstrahlen zum zweitenmal den Zylinder durchbohren. Alle diese Lichtstrahlen bilden einen Zylinder, den wir den Lichtzylinder nennen wollen Der gegebene Zylinder und der Lichtzylinder haben die Randellipse gemein. Nach Nr. 140 schneiden sie sich also zum zweitenmal ebenfalls in einer Ellipse, d. h. der Schatten, den der elliptische Rand des Zylinders auf die Innenseite des Zylinders wirft, ist ein Ellipsenbogen. Man bekommt konjugierte Durchmesser der Schattenellipse, indem man von konjugierten Durchmessern der Randellipse ausgeht. Die Schatten, die ihre Endpunkte auf den Zylinder werfen, sind dann die Endpunkte der gesuchten Durchmesser. Der gegebene Zylinder und der

Lichtzylinder haben zwei parallele gemeinsame Tangentialebenen (Nr. 140), und die Mantellinien, längs deren diese Ebenen die Zylinder berühren, bestimmen durch ihre Schnitte die beiden Punkte U und V, die der Randellipse und der Schattenellipse gemein sind. Sie sind die Endpunkte eines gemeinsamen Durchmessers beider Ellipsen, und von der Schattenellipse kommt als wirklicher Schatten nur die auf der einen Seite dieses Durchmessers gelegene Hälfte in Betracht.

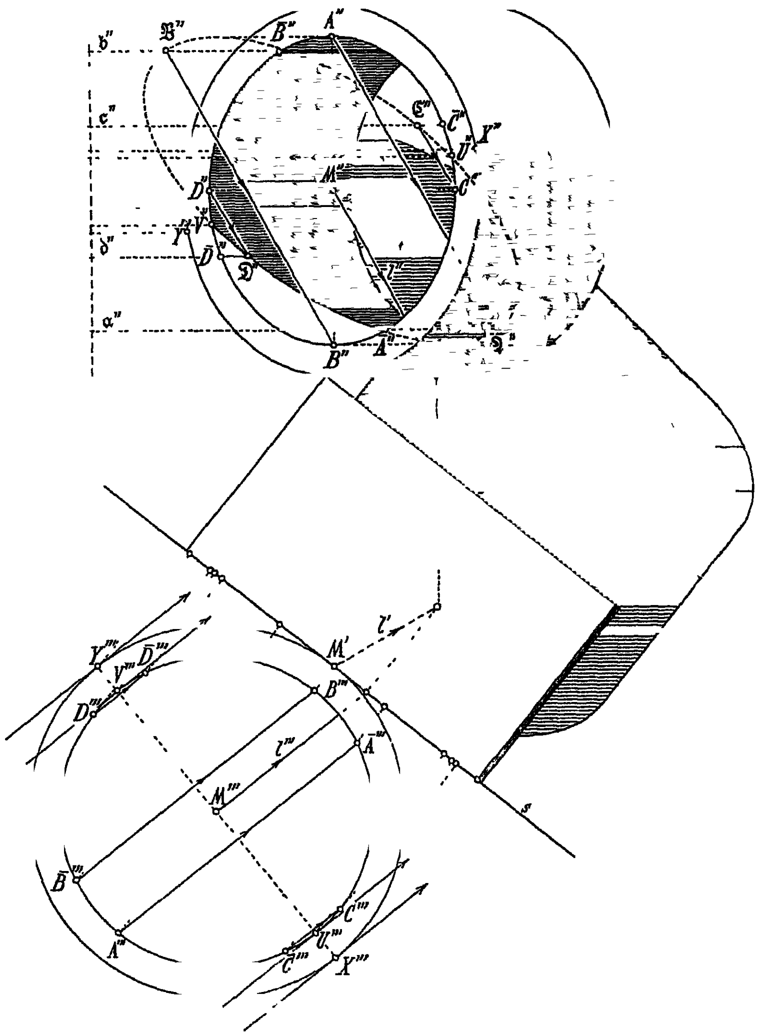


Fig 390

In Fig. 390 ist der Schatten im Innern eines Ringes, der die Grundrißtafel zur Tangentialebene hat, nach diesen allgemeinen Gesichtspunkten hergestellt worden: Die Punkte A, B, C, D sind die Endpunkte zueinander senkrechter Durchmesser des Randkreises. der

den Schatten wirft Es handelt sich darum, die Mantellinien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ ausfindig zu machen, auf denen die Schatten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ von A, B, C, D liegen Da die Mantellinien zur Grundebene des Zylinders senkrecht sind, erscheinen sie auf der Grundebene, wenn man diese als Seitenrißtafel benutzt, bloß als Punkte Man braucht also nur durch A''', B''', C''', D''' die Parallelen zur Lichtrichtung l''' zu ziehen, um die Seitenrisse der Punkte $\bar{A}$, B, C, D auf dem Zylinderkreis zu bekommen, von denen die Mantellinien $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ ausgehen Der Seitenriß gibt durch die Entfernungen der Punkte $\bar{A}'''$, B''', C''', $\bar{D}'''$ von der neuen Projektionsachse s die Hohen der Aufrißprojektionen $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$, $\mathfrak{d}''$ über der Grundrißtafel, so daß man im Aufriß die Punkte $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}''$, $\mathfrak{C}''$, $\mathfrak{D}''$ ohne weiteres findet Von den vier Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ sind nur $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ wirklich zustande kommende Schlagschatten, denn $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ liegen von der Lichtrichtung aus gerechnet vor B und C. Die Punkte U und V, in denen die Schattenellipse mit den konjugierten Durchmessern $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ den Randkreis $ABCD$ schneidet, bestimmen sich aus ihren Seitenrißprojektionen U''', V''', denn die dem inneren Zylinder und dem Lichtzylinder gemeinsamen Tangentialebenen stehen auf der Seitenrißtafel senkrecht und erscheinen hier also als die zu l''' parallelen Tangenten des Kreises $A'''B'''C'''D'''$ Die Ellipsenhalfte $U\mathfrak{A}\mathfrak{D}V$ ist der wirklich zustande kommende Schlagschatten, die andere Halfte liegt von der Lichtrichtung aus gerechnet vor dem Kreis $ABCD$, namlich auf der Fortsetzung des inneren Zylinders nach vorn hin

278. **Schlagschatten in Hohlkugeln.** Wird von einer Hohlkugel ein Stuck durch eine Ebene abgeschnitten, so kann das Licht durch die entstehende kreisformige Offnung ins Innere dringen Der im Innern entstehende Schattenrand ist die Kurve, in der die Kugel zum zweitenmal durch den vom Rande der Offnung ausgehenden Lichtzylinder durchdrungen wird Dieser Lichtzylinder ist ein im allgemeinen schiefer Kreiszylinder Seine Hauptebene (Nr 123) ist diejenige Ebene, die die Achse z des Zylinders enthalt und auf seinem Grundkreis senkrecht steht, also diejenige Ebene, die den von der Mitte der Kreisoffnung ausgehenden Lichtstrahl z und die Achse dieses Kreises enthalt und somit durch die Kugelmitte geht Mithin schneidet die Hauptebene des Zylinders die Kugel in einem Großkreis Wird die Hauptebene als Zeichenebene benutzt, siehe Fig 391 a, so ist die Kreisoffnung ein langs einer Sehne AB des Großkreises auf der Ebene senkrecht stehender Kreis vom Durchmesser AB Die Schatten der Punkte A und B sind die Stellen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ im Innern der Kugel. Da nun AB und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ein Kreisviereck bilden, ist der Winkel bei A das Supplement des Winkels bei $\mathfrak{B}$, und daraus

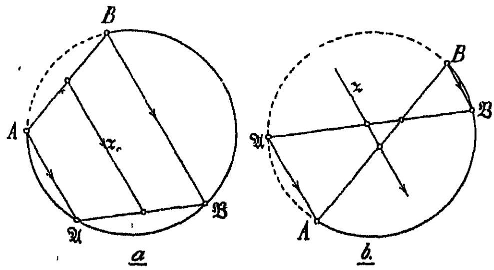


Fig 391.

folgt nach Nr. 123, daß die Ebene, die langs $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ auf der Großkreisebene senkrecht steht, den Lichtzylinder in dem Kreis schneidet, der $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ zum Durchmesser hat. Dieser Kreis gehört aber auch der Kugel an.

Somit ergibt sich: Der Schatten, den ein Kugelkreis ins Innere der Kugel wirft, ist stets ein Kreis. Unter Umständen tritt nur ein Teil dieses Kreises als wirklicher Schlagschatten auf, so in Fig 391 b, wo $\mathfrak{A}$ nur geometrischer Schatten ist.

Der Fall von Fig. 391 a kommt in Fig. 392 vor Hier handelt es sich um den Schatten im Innern einer Hohlkugel, von der durch eine wagerechte Ebene ein Stuck abgeschnitten ist Die Hauptebene, von der vorhin die Rede war, ist hier die zur Grundrißtafel senkrechte Ebene durch den Lichtstrahl, der durch die Kegelmitte geht. Sie ist Symmetrieebene der abgeschnittenen Kugel und des Lichtzylinders, und in ihr liegt daher die Nebenachse der zu zeichnenden Schattenellipse (Nr 245) Deshalb wird man eine zu ihr parallele Ebene als Seitenrißtafel benutzen. Im Seitenriß erscheint der Schattenkreis als die Strecke $\mathfrak{A}'''\mathfrak{B}'''$, aus der sich sofort der Grundriß ergibt, da $\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$, die Hauptachse im Grundriß, gleich $\mathfrak{A}'''\mathfrak{B}'''$ sein muß. Im Aufriß ist der Schatten im Innern nicht zu sehen, dagegen der Eigenschatten auf der Außenseite der Kugel, der ebenso wie der Schlagschatten im Grundriß nach Nr. 274 gefunden wird

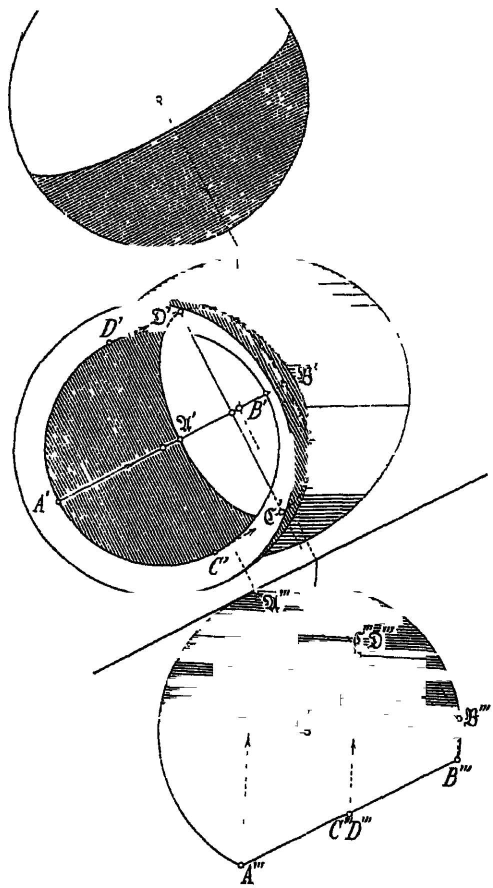


Fig 392.

Der Fall von Fig. 391 b kommt in Fig 393 vor. Hier ist angenommen worden, daß eine lotrechte Wand, die Aufrißtafel, eine kugelformige, aber nur flache Vertiefung habe, z. B. eine Kachel. Die Umrisse der Kugel sind in beiden Projektionen angedeutet. In diesem Fall ist die Hauptebene des Lichtzylinders, der vom Rand der Vertiefung ausgeht, die zur Aufrißtafel senkrechte Ebene durch den Lichtstrahl l, der durch die Kugelmitte geht Man könnte daher die Aufgabe, den Schlagschatten in der Vertiefung zu bestimmen, so wie vorhin dadurch lösen, daß man einen zu dieser Ebene parallelen Seitenriß senkrecht zur Aufrißtafel benutzte. Statt dessen ist das in Nr. 212 angegebene Verfahren angewandt worden. Die Kugel und die Lichtrichtung sind um das Lot von der Kugelmitte auf die Aufrißtafol so weit gedreht, bis die Lichtrichtung zum Grundriß parallel wird. Der Lichtstrahl l

geht dadurch in den Lichtstrahl (l) über, der dadurch bestimmt wird, daß man die Drehung auf irgendeinen Punkt von l ausübt Nunmehr kann die Grundrißtafel zu demselben Zweck dienen wie in Fig. 392 die Seitenrißtafel. Man zieht also die Strahlen parallel zu (l)′ durch A' und B', wodurch sich die Schatten (𝔄)′ und (𝔅)′ ergeben. Der Schattenkreis erscheint im Grundriß als die Strecke (𝔄)′(𝔅)′, woraus sich die Nebenachse (𝔄)″(𝔅)″ im Aufriß sowie die Hauptachse (ℭ)″(𝔇)″ im Aufriß, diese gleich (𝔄)′(𝔅)′, ergibt. Schließlich ist die Aufrißellipse wieder zurückzudrehen, wodurch die Hauptachse nach ℭ″𝔇″ und die Nebenachse nach 𝔄″𝔅″ gelangt In Fig 393 sind auch diejenigen Punkte ermittelt worden, die der Schattenkreis mit dem Umriß der Kugel im Aufriß sowie mit dem Rande der Vertiefung gemein hat

Anmerkung Oben ist bewiesen worden Schneidet ein Zylinder eine Kugel in einem Kreis, so schneidet er sie außerdem in noch einem Kreis. Vgl die Anmerkung zu Nr 165

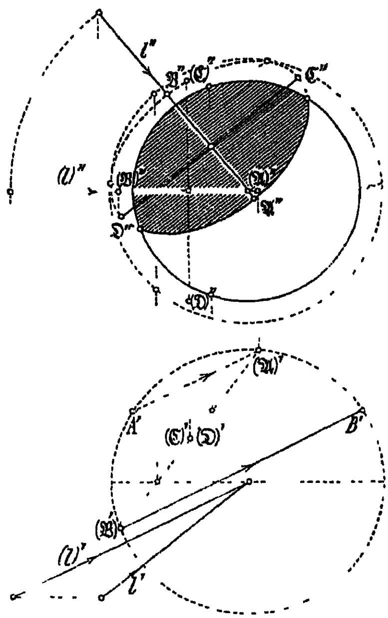


Fig 393

279. Schnitt zweier Kegel mit gemeinsamem Grundkreis. Um weitere Anwendungen von den Schattenkonstruktionen zu machen, bedurfen wir eines Satzes uber zwei Kegel mit gemeinsamem Grundkreis, und diesen Satz wollen wir hier beweisen

In Fig. 394 sei die Grundrißtafel die Ebene eines Kreises, der als Grundkreis fur zwei Kegel mit zunachst irgendwo im Raume gewahlten Spitzen S_1 und S_2 diene Die beiden Kegel haben außer dem Grundkreis noch eine zweite Schnittkurve, deren Beschaffenheit ermittelt werden soll Zu diesem Zweck stellen wir die Aufrißtafel so, daß der Punkt T, in dem die Gerade durch die Kegelspitzen S_1 und S_2 die Ebene des Grundkreises trifft, geradesoweit von der Aufrißtafel entfernt ist wie die Mitte des Kreises, so daß die Polare t, die dem Punkt T hinsichtlich des Kreises zukommt (Nr 188), zur Projektionsachse senkrecht ist. Will man nun einen beiden Kegeln gemeinsamen Punkt P finden, so legt man durch die Spitzen S_1 und S_2 eine Hilfsebene (Nr 158), die den Grundkreis schneidet Da S_1S_2 die Grundrißtafel in T trifft, ist die Grundrißspur der Hilfsebene irgendeine von T ausgehende und den Grundkreis schneidende Gerade Sind A und B die Schnittpunkte, so liegen die nach A und B gehenden Mantellinien der Kegel in einer gemeinsamen Ebene, d. h. sie schneiden sich und liefern daher vier Punkte, die beiden Kegeln gemein sind Zwei davon sind A und B selbst Ein dritter ist der Schnittpunkt P von S_1B und S_2A, ein vierter der Schnittpunkt von S_1A und S_2B. Wir betrachten etwa den dritten; fur den vierten, der unterhalb der Aufrißtafel liegt und in Fig. 394 nicht angegeben ist, läßt sich die folgende Überlegung ebenfalls anstellen. Die beiden Kegeln gemeinsame Kurve, von der P ein Punkt ist, hat in P eine Tangente,

die sowohl der den einen Kegel längs S_1B als auch der den anderen Kegel längs S_2A berührenden Ebene angehört. Diese beiden Ebenen schneiden die Grundkreisebene in den in A und B an den Grundkreis gelegten Tangenten, und diese beiden Tangenten treffen sich in einem Punkte Q, der nach Nr 188 auf der Polare t von T liegt. Die Gerade PQ ist die Tangente der Durchdringungskurve in P. Da nun t zur Aufrißtafel senkrecht ist, erscheint t im Aufriß bloß als Punkt t'', und Q'' liegt also in t'', d. h. die Aufrißprojektion der Durchdringungskurve ist so beschaffen, daß alle ihre Punkte P'' Tangenten haben, die nach demselben Punkt t'' gehen. Wenn aber alle Tangenten einer ebenen Kurve durch einen gemeinsamen Punkt gehen, ist die Kurve selbst eine Gerade durch diesen Punkt. Folglich ist die Aufrißprojektion der Durchdringungskurve eine Gerade, d. h. die Durchdringungskurve liegt in einer zur Aufrißtafel senkrechten Ebene. Mithin ist sie nach Nr. 267 eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel. Hiermit ist bewiesen Wenn zwei Kegel einen Kreis gemein haben, treffen sie sich außerdem noch in einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel.

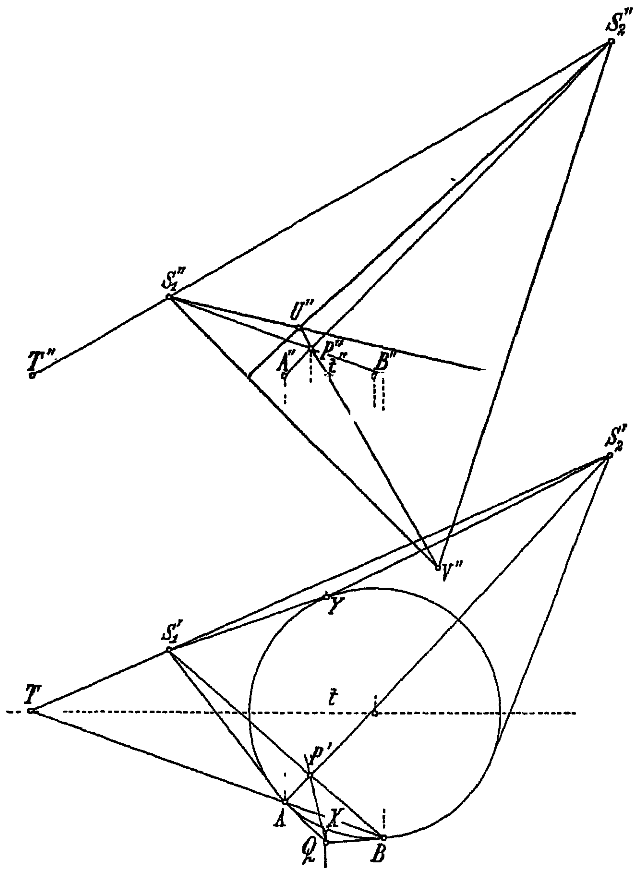


Fig 394

Wir fügen hinzu: Wenn die Hilfsebene durch S_1 und S_2 durch die Mitte des Kreises gelegt wird, ergibt sich, daß die in Fig. 394 mit U'' und V'' bezeichneten Schnittpunkte der äußersten Mantellinien Punkte der Aufrißprojektion des Kegelschnittes sind. Die beiden Kegeln gemeinsame Ellipse, Parabel oder Hyperbel erscheint also im Aufriß als die Strecke $U''V''$. In Fig. 394 ist diese gemeinsame Kurve eine Ellipse. Die Kegel können aber auch so liegen, daß sich eine unendlich lange Strecke $U''V''$ ergibt, so daß die Kurve eine Parabel ist. Sie können schließlich auch so liegen, daß U'' und V'' nicht beide den eigentlichen

Kegeln, sondern einer von ihnen den Scheitelkegeln angehört. Dann besteht die Aufrißprojektion der Schnittkurve aus zwei sich ins Unendliche von U'' und V'' aus erstreckenden Teilen einer Geraden, so daß die Schnittkurve eine Hyperbel ist

Die Kegel haben zwei gemeinsame Tangentialebenen. Die Grundrißspuren dieser Ebenen sind die Tangenten von T an den Grundkreis, und sie beruhren den Grundkreis nach Nr. 188 in den Punkten X und Y der Polare t. Nach X oder Y rücken nun A und B und somit auch Q und P für den Fall, daß die Hilfsebene durch die Kegelspitzen eine der beiden Grenzlagen erreicht, namlich eine der gemeinsamen Tangentialebenen wird Also folgt. Haben zwei Kegel einen Kreis gemein, so schneiden sie sich außerdem in einem Kegelschnitt, der durch diejenigen Punkte X und Y geht, in denen die gemeinsamen Tangentialebenen beider Kegel den Kreis beruhren

Der Beweis, der vorhin gebracht wurde, beruhte auf den Polareigenschaften des Kreises Da diese Eigenschaften nach Nr 189 auch der Ellipse zukommen, ergibt sich ebenso

Zwei Kegel, die eine Ellipse gemein haben, schneiden sich außerdem noch in einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel, die durch diejenigen Punkte geht, in denen die beiden gemeinsamen Tangentialebenen der Kegel jene Ellipse beruhren

Da Zylinder Sonderfalle von Kegeln sind, laßt sich der Satz auch fur Zylinder aussprechen. Aber jeder ebene Schnitt eines elliptischen Zylinders ist eine Ellipse Mithin treten hier weder Parabeln noch Hyperbeln auf Also gilt der Satz· Hat ein Kegel mit einem Zylinder eine Ellipse gemein, so schneiden sich beide außerdem in einer zweiten Ellipse, und beide Ellipsen begegnen sich in den Beruhrungspunkten der beiden dem Kegel und Zylinder gemeinsamen-Tangentialebenen. Schließlich ergibt sich noch, daß sich zwei Zylinder, die eine Ellipse gemein haben, außerdem in einer zweiten Ellipse schneiden, und damit gelangen wir zu einem schon in Nr 140 bewiesenen Satz zuruck

280. Schlagschatten in Hohlkegeln. Liegt ein gerader oder schiefer Kreiskegel vor, der hohl ist und dessen Grundflache das Licht durchlaßt, so kann der Rand, d. h der Grundkreis, einen Schlagschatten ins Innere werfen. Die durch die Punkte des Randes gehenden Lichtstrahlen bilden einen Lichtzylinder, und nach der letzten Nummer hat dieser Zylinder mit dem Kegel noch eine Ellipse gemein. Mithin ist der Schatten, den der Grundkreis eines hohlen Kegels ins Innere des Kegels wirft, ein Stück einer Ellipse. Die Punkte X und Y, in denen die Ellipse den Grundkreis durchsetzt, sind die Endpunkte des wirklich auftretenden Schattenbogens. Sie liegen in den gemeinsamen Tangentialebenen des Kegels und des Lichtzylinders, d. h. sie sind die Endpunkte derjenigen Mantellinien des Kegels, deren Tangentialebenen zur Lichtrichtung parallel sind, anders gesagt, derjenigen Mantellinien, die die Eigenschattengrenze des Kegelmantels bestimmen.

In Fig. 395 ist der Schatten im Innern eines kegelförmigen Kübels bestimmt worden. Der Innenrand $ABCD$ wirft ins Innere

auf den Kegel einen elliptischen Schatten. Da die lotrechte Ebene, die durch die Mitte M des Kreises $ABCD$ geht und den Lichtstrahl durch diese Mitte enthalt, Symmetrieebene ist, muß in ihr eine der Achsen der Schattenellipse gelegen sein In einer zu ihr parallelen Seitenrißebene würde sich also die Schattenellipse als Strecke darstellen. Man kann aber auch wie in Nr. 212 die Seitenrißtafel durch ein Drehen ersetzen. So ist es in Fig 395 geschehen Der Kübel und die Lichtrichtung werden um die Achse des Kübels, die ja zur Grundrißtafel senkrecht ist, so weit gedreht, bis die Lichtrichtung zur Aufrißtafel parallel wird Die neue Lichtrichtung ergibt sich, wenn man den Schlagschatten $\mathfrak{M}$, den M auf die Grundrißtafel wirft, an der Drehung teilnehmen laßt, indem dann $\mathfrak{M}$ nach $(\mathfrak{M})$ gelangt Nach der Drehung erscheint die gesuchte Schattenellipse im Aufriß als Strecke $(\mathfrak{A})''(\mathfrak{B})''$, die sich sofort aus den durch A'' und B'' gezogenen Aufrißprojektionen des Lichtstrahls in der neuen Richtung ergibt Die zugehörige Grundrißprojektion der Ellipse hat die eine Achse $(\mathfrak{A})'(\mathfrak{B})'$. Die andere ist zu ihr senkrecht Da nun im Grundriß die Lichtrichtung zur Projektionsachse parallel gemacht worden ist, erhellt, daß sich der gesuchte Schlagschatten von der Geraden $(\mathfrak{A})'(\mathfrak{B})'$ uberhaupt nur so weit entfernt, wie die Punkte C' und D' von ihr entfernt sind, d. h die andere Achse $(\mathfrak{C})'(\mathfrak{D})'$ muß ihre Endpunkte auf den Parallelen zur Projektionsachse durch C' und D' haben Schließlich wird die Drehung wieder rückwärts ausgeübt Dabei gelangt das Achsenkreuz in die richtige Lage $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$. Der Schlagschatten wird zum Teil von der inneren Bodenflache des Kübels aufgefangen, hier ist seine Grenze ein Kreis, bei dessen Bestimmung man darauf achten muß, daß der Kübelboden eine gewisse Dicke hat.

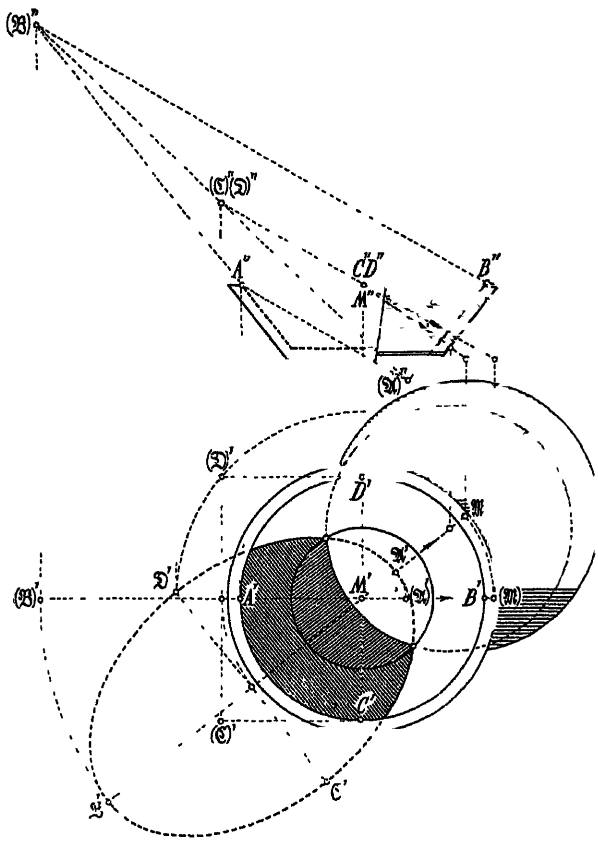


Fig 395

281. Übungen. Die Aufgabe, den Schlagschatten ausfindig zu machen, den ein Körper auf irgendeinen Gegenstand wirft, kommt darauf hinaus, den Zylinder derjenigen Lichtstrahlen, die den Körper nur streifen, mit der Oberfläche des Gegenstandes zum Schnitt zu bringen. Deshalb gehört sie zu den sogenannten Durchdringungsaufgaben, mit denen wir uns, soweit sie Pyramiden, Prismen, Kegel und Zylinder betreffen, zwar schon in Nr. 155 bis 158 und sonst beschäftigt haben, auf die wir aber im zweiten Bande wieder zurückkommen. Dann werden wir auch die Aufgaben über Schatten noch einmal in Angriff nehmen. Im vorhergehenden sind nur solche Schattenkonstruktionen behandelt worden, bei denen sich als Schattengrenzen Geraden und Kreise sowie allgemeiner Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln ergaben. Auch in den folgenden Übungsbeispielen beschränken wir uns auf Fälle von derselben Art.

1) Die in Nr. 154 behandelten Aufgaben im Grundriß und Aufriß zu lösen (Nr. 272)

2) Ein Dach über einem rechteckigen Grundviereck trägt auf dem First einen Schornstein von quadratischem Querschnitt Den Schlagschatten des Schornsteins auf dem Dach zu bestimmen (Nr. 272).

3) Auf dasselbe Dach werfe ein kreisrunder Turm mit kegelförmiger Spitze einen Schatten (Nr. 273)

4) Der Mittelpunkt einer Kugel werfe seinen Schlagschatten in die Nähe des Punktes, in dem eine durch ihre Spuren gegebene und in beiden Projektionen von derselben Seite zu sehende Ebene die Projektionsachse schneidet Der Schlagschatten der Kugel besteht dann aus einem Stück in der Grundrißtafel, einem in der Aufrißtafel und einem in der gegebenen Ebene. Diese Schatten sollen bestimmt werden (Nr. 274).

5) Eigen- und Schlagschatten eines auf der Grundrißtafel stehenden schiefen Kreiszylinders für den Fall, wo der obere Endkreis seinen Schlagschatten vollständig auf die Aufrißtafel wirft (Nr 275).

6) Bestimmung aller Schatten für den Fall, wo ein auf der Grundrißtafel stehender Rotationskegel einen auf derselben Tafel liegenden Rotationszylinder zum Teil beschattet (Nr 275).

7) Eine auf der Grundrißtafel stehende Säule, deren Querschnitt ein regelmäßiges Vieleck ist, soll auf einen auf derselben Tafel stehenden Rotationskegel Schatten werfen (Nr. 276).

8) Eine Kugel sei derart zentrisch durchbohrt (Nr. 91), daß man sowohl im Grundriß als auch im Aufriß in das Innere des Durchbohrungszylinders blickt. Gesucht alle Schatten (Nr. 274, 277)

9) Auf einer auf der Grundrißtafel liegenden halbkugeligen Schale (Aschenbecher) liegt eine Gerade (Streichholz). Alle Schatten zu bestimmen (Nr. 278).

10) Die Aufrißtafel sei eine lotrechte Mauer, in der eine Kachel mit einer Vertiefung in Form eines Rotationskegelstumpfes angebracht sei. Gesucht der Schatten in dieser Vertiefung (Nr. 280).

§ 8. Senkrechte Axonometrie.

282. Neue Projektionstafel in allgemeiner Lage. Weil ein Gegenstand durch Angabe seines Grundrisses und Aufrisses vollständig bestimmt ist, muß es möglich sein, seine senkrechte Projektion

auf irgendeine neue Tafel aus seinem Grundriß und Aufriß abzuleiten. In Nr. 207 wurde insbesondere gezeigt, wie man seine senkrechte Projektion auf eine neue Tafel findet, die ebenso wie die Aufrißtafel zur Grundrißtafel senkrecht ist. In Nr. 213 wurde ferner die senkrechte Projektion auf irgendeine zur Aufrißtafel senkrechte Ebene besprochen. Indem wir in Nr. 214 nacheinander zwei neue Tafeln benutzten, zuerst eine zur Grundrißtafel senkrechte, dann eine zu dieser neuen Tafel senkrechte Tafel, haben wir auch die senkrechte Projektion auf eine solche Ebene ermittelt, die weder zur Grundrißtafel noch zur Aufrißtafel lotrecht war.

Aber die Aufgabe, die senkrechte Projektion eines Gegenstandes auf eine beliebig angenommene neue Tafel aus dem Grundriß und Aufriß des Gegenstandes abzuleiten, ist dadurch noch nicht befriedigend gelöst. Ist nämlich die neue Tafel T z. B durch ihre Spuren oder durch ein Paar Hauptlinien gegeben, so muß man, um auf dem in Nr. 214 eingeschlagenen Wege die neue Projektion zu finden, zunächst noch eine Tafel einschalten, nämlich eine sowohl zur Grundrißtafel als auch zur Tafel T senkrechte Ebene Hat man dies getan, so ist es zwar leicht, nach Nr. 207 auf sie als Seitenrißtafel das Bild des Gegenstandes zu entwerfen. Man muß aber weiterhin, um zu der gesuchten senkrechten Projektion auf die gegebene neue Tafel T zu kommen, zunächst diese Tafel T in die Ebene der eingeschalteten Seitenrißtafel umlegen. Dies bringt unvermeidliche Zeichenfehler mit sich Das Verfahren ist überdies unvollkommen, weil eine Zwischentafel eingeschaltet wird, obgleich uns an der senkrechten Projektion auf diese Schalttafel eigentlich nichts gelegen ist Vielmehr ist zu verlangen, daß die gesuchte senkrechte Projektion auf die neue Tafel T möglichst geradezu gefunden werde

Diese Aufgabe löst die sogenannte senkrechte Axonometrie, nämlich so Auf der Projektionsachse wird ein Punkt O angenommen. Er wird zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Achsenkreuzes gemacht, dessen x-Achse in der Projektionsachse liegt, während seine y-Achse der Grundrißtafel und seine z-Achse der Aufrißtafel angehört. Wenn wir allen drei Achsen eine gleiche Länge geben, entsteht ein rechtwinkliges Achsenkreuz mit gleichlangen Achsen OX, OY, OZ, siehe Fig. 396 a. Die Grundrißtafel ist die xy-Ebene, die Aufrißtafel die zx-Ebene. Die dritte Achsenebene, die yz-Ebene, fügen wir als Kreuzrißtafel (Nr. 209) hinzu. Die senkrechten Projektionen irgendeines Punktes P auf die drei Ebenen, also seinen Grundriß, Aufriß und Kreuzriß, die wir bisher P', P'', P''' genannt haben, wollen wir jetzt mit P_x, P_y, P_z bezeichnen, indem durch den angehängten Index angegeben werde, zu welcher der drei Achsen diejenige Projektionsrichtung parallel ist, die zu dem betreffenden Bild gehört Nun werde vom Achsenkreuz $OXYZ$ nach einem der verschiedenen in Nr. 53 bis 62 entwickelten Verfahren die senkrechte Projektion $O'X'Y'Z'$ auf irgendeine Tafel T, die Ebene der Zeichnung in Fig 396 b, hergestellt. Mit Hilfe des zugehörigen Sinusmaßstabes (Nr 63) in Fig. 396 c kann man dann die Punkte P_x', P_y', P_z' finden, die bei der senkrechten Projektion auf die neue Tafel T die Bilder der Punkte P_x, P_y, P_z sind. Man bestimmt nämlich mittels des Sinusmaßstabes diejenigen Strecken x', y', z', als die sich die auf den drei Achsen gemessenen Koordinaten x, y, z

des Punktes P bei der Projektion auf die neue Tafel T darstellen, trägt sie auf $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ auf und findet durch Parallelenziehen zu den Achsen im Bilde die gesuchten Punkte P_x', P_y', P_z' (vgl. Nr. 164, wo jedoch P_x, P_y, P_z andere Bedeutung hatten). Der Punkt P selbst hat auf der neuen Tafel T eine senkrechte Projektion P', die man schließlich so ermittelt, wie es Fig. 396b zeigt.

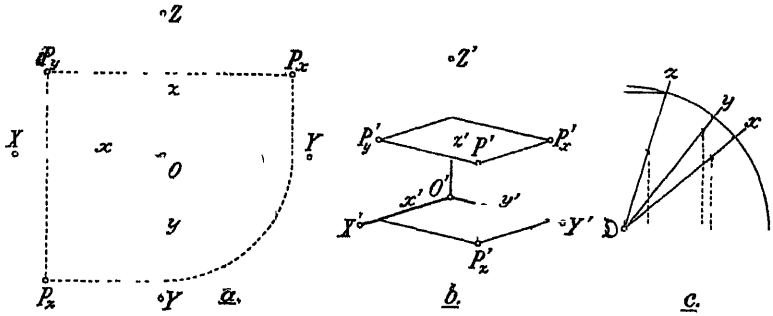


Fig 396

Liegen also die Grundrisse P_z und die Aufrisse P_y aller Punkte P eines Gebildes vor, so daß man auch ihre Kreuzrisse P_x kennt, so liefert dies Verfahren die senkrechten Projektionen P' aller Punkte P des Gebildes auf eine beliebige neue Tafel T.

Da man sich die Gegenstände im allgemeinen über der Grundrißtafel aufgebaut denkt, ist es gebräuchlich, zunächst die gegebene Grundrißzeichnung mit Hilfe der x und y auf die neue Tafel zu übertragen, also die Punkte P_z' zu zeichnen, dann bekommt man die senkrechten Projektionen P' der Punkte P, indem man durch die Punkte P_z' die Parallelen zu $O'Z'$ zieht und auf ihnen die verkürzten Koordinaten z' auftragt.

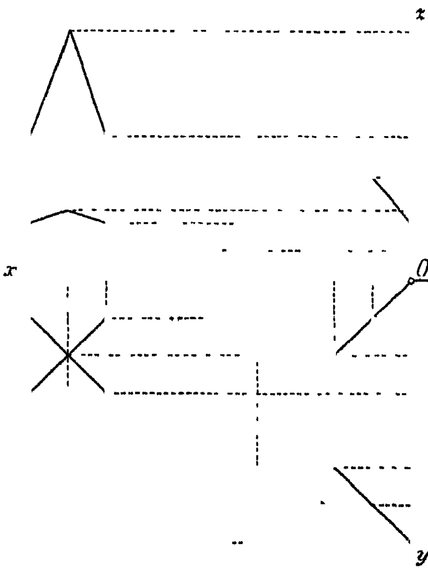


Fig 397

In Fig. 397 ist der Grundriß und Aufriß einiger Gebäude dargestellt, und in Fig 398 ist daraus die senkrechte Projektion dieser Gebäude auf eine beliebige neue Tafel T abgeleitet worden Wir haben genau dieselben Baulichkeiten wie in Fig 241 von Nr 166 benutzt. Jene Figur gab zwei schiefe Parallelprojektionen dieser Häuser; die Bilder in jener Figur mußte man also, um einen richtigen Eindruck zu bekommen, aus Richtungen betrachten, die zu der Ebene der Zeichnung schief waren. Anders ist es mit Fig. 398; da hier eine senkrechte Projektion auf die neue Tafel T vorliegt, muß man das Bild

aus der zur Zeichenebene senkrechten Richtung anschauen. Deshalb befriedigt dies Bild mehr als die Darstellungen in Fig. 241. Die neue Fig. 398 ist aufzufassen als der Anblick, den die Gebaude jemandem gewahren, der in ziemlicher Hohe über dem Gelande gerade zu ihnen hinblickt. Der Beobachter befindet sich dabei nicht etwa senkrecht über dem Grundstück, denn sonst würde der Anblick, den es ihm gewahrt, der des Grundrisses in Fig. 397 sein. Vielmehr mag man sich den Beobachter als einen Flieger denken, der noch ziemlich weit von dem Grundstück entfernt ist. Obgleich die Richtung seiner Sehstrahlen, die wir angenahert als parallele Geraden auffassen dürfen, mit der wagerechten Ebene des Gelandes keinen rechten Winkel bildet, ist die Darstellung in Fig. 398 dennoch eine senkrechte Projektion, namlich die Projektion der Gebaude auf einer zur Sehrichtung senkrecht anzunehmenden Ebene. In Fig. 241 von Nr. 166 dagegen lagen Projektionen auf zur Sehrichtung schragen Tafeln vor.

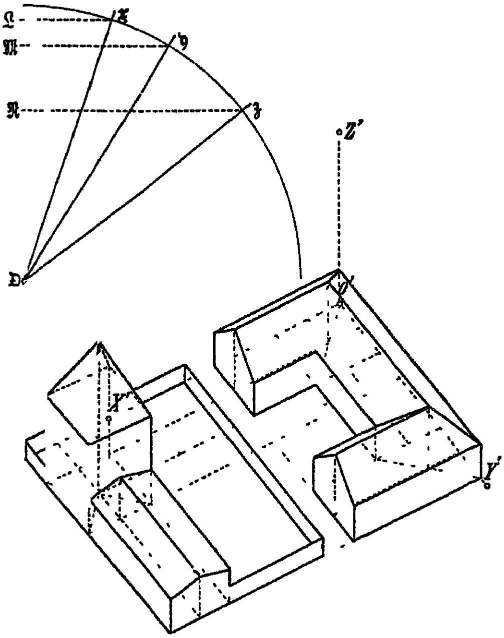


Fig 398

In Fig. 398 ist die z-Achse am starksten verkürzt. Das Bild gewahrt deshalb einen Anblick der Gebaude in starker Obersicht Da man nicht gewöhnt ist, Baulichkeiten aus großer Hohe zu betrachten, zieht man es vor, das Achsenkreuz so zu wahlen, daß die z-Achse die geringste Verkürzung aufweist, siehe Fig. 399. Einem Flieger, der auf die dargestellten Gebaude zusteuert, bieten sie zuerst den Anblick in Fig. 399, dann den in Fig. 398, schließlich, wenn er sich gerade hoch über dem Grundstück befindet, den Anblick des Grundrisses in Fig. 397.

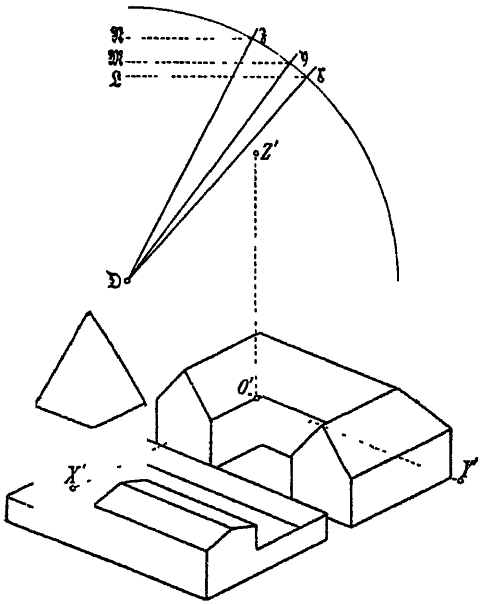


Fig 399

Dreht man den Grundriß in Fig. 397 um einen rechten Winkel, so ergibt dasselbe Verfahren das in Fig. 400 dargestellte Bild.

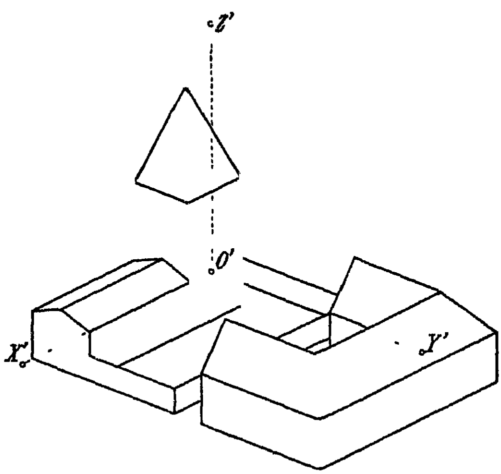


Fig 400

Von jedem Gegenstand, dessen Grundriß und Aufriß man in irgendeiner besonderen Lage des Gegenstandes zu den Tafeln entworfen hat, gewinnt man durch das auseinandergesetzte Verfahren die senkrechte Projektion auf eine ganz beliebig gegenüber dem Gegenstand gelegene Tafel. Es ist deshalb nicht erforderlich, ja geradezu eine unnütze Vergeudung von Arbeit, wenn man den Grundriß und Aufriß, von dem man ausgeht, für eine möglichst allgemeine Lage des Gegenstandes zu den Tafeln herstellt. Vielmehr liegt der Vorteil der senkrechten Axonometrie gerade darin, daß sie erlaubt, aus dem Grundriß und Aufriß eines in eine möglichst einfache Lage zu diesen beiden Tafeln gebrachten Gegenstandes die senkrechte Projektion desselben Gegenstandes auf eine Tafel T von ganz allgemeiner Lage abzuleiten.

283. Ermittlung der Höhen axonometrisch dargestellter Punkte. Die besprochenen Darstellungen der Gegenstände sind, wie gesagt, senkrechte Projektionen auf die neue Tafel T. Die Lage dieser Tafel T gegenüber dem rechtwinkligen Achsenkreuz OX, OY, OZ wird durch die Spurgeraden gekennzeichnet, die den Achsenebenen auf der Tafel T zukommen Nach Nr. 49 bilden die Spurgeraden ein Dreieck, das Spurdreieck, dessen Seiten zu den Projektionen $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ der Achsen senkrecht sind. Da die Tafel T durch irgendeine zu ihr parallele Ebene, also durch irgendeine Höhenebene ersetzt werden darf (Nr 12), indem sich dabei das Bild nicht ändert, kann als Spurgerade der xy-Ebene irgendeine zu $O'Z'$ senkrechte Gerade s_z angenommen werden. Die Spurgeraden s_x und s_y schließen sich alsdann so an s_z an, daß sie von den Schnittpunkten von s_z mit $O'Y'$ und $O'X'$ ausgehen und zu $O'X'$ bzw. $O'Y'$ senkrecht sind, und sie treffen einander auf $O'Z'$, so daß das von allen dreien gebildete Spurdreieck den Höhenschnittpunkt O' hat (vgl. auch Nr. 61). Die Ecken des Spurdreiecks (die Schnittpunkte der Achsen mit der Tafel T) hatten wir früher mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ bezeichnet (Nr. 49). Im folgenden wollen wir nun annehmen, daß die Tafel T durch den Anfangspunkt O des Achsenkreuzes gehe, d. h. das Achsenkreuz liege gegenüber der Tafel so, daß es sich in O auf die Tafel stütze. Dann rücken alle drei Spurpunkte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ in O zusammen, indem das Spurdreieck in den Punkt O zusammenschrumpft. Die Spurgeraden s_x, s_y, s_z sind jetzt die durch O gehenden und zu OX', OY', OZ' senkrechten Geraden. Die Höhenlinien der xy-Ebene, d. h. die

zur Tafel T parallelen Geraden der xy-Ebene, projizieren sich als die Parallelen zu s_z, d. h. als die Senkrechten zu OZ'. Ebenso stellen sich die Höhenlinien der yz-Ebene als die Senkrechten zu OX' und die Höhenlinien der zx-Ebene als die Senkrechten zu OY' dar. Da die Höhenlinien zur Tafel T parallel sind, hat jede auf einer Höhenlinie gelegene Strecke im Bilde die wahre Länge.

Nachdem wir der Tafel T gegenüber dem Achsenkreuz eine bestimmte Lage gegeben, sie nämlich durch O selbst gelegt haben, stellen wir uns nun die Aufgabe, die Höhe eines Punktes P über der Tafel T zu ermitteln, wenn der Punkt P in senkrechter Axonometrie dargestellt worden ist, d. h. wenn das Bild P'_z seines Grundrisses in der xy-Ebene sowie sein eigenes Bild P' gegeben ist, siehe Fig. 401.

Die durch P'_z senkrecht zur z-Achse gezogene Gerade, die die Bilder der x- und y-Achse in U'_z und V'_z schneidet, ist das Bild einer Höhenlinie $U_z V_z$ der xy-Ebene. Die Ebene durch diese Höhenlinie und durch P ist zur z-Achse parallel, schneidet also die xz- und yz-Ebene in Parallelen zur z-Achse. Mithin schneidet die durch P gelegte Parallele zu jener Höhenlinie die xz- und yz-Ebene in denjenigen Punkten U und V, deren Bilder U' und V' auf den Parallelen zu z' durch U'_z und V'_z liegen.

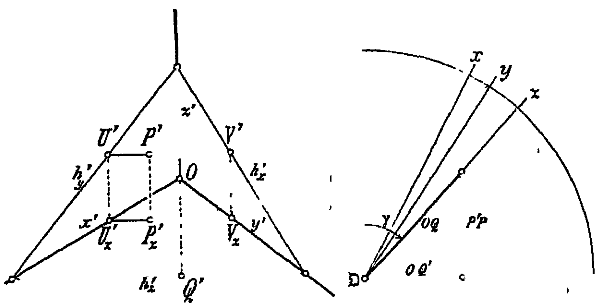


Fig. 401

Da die Gerade UV zur Tafel T parallel ist, liegt sie in der durch P gehenden Höhenebene. Diese Ebene schneidet die Achsenebenen in Höhenlinien, und da sie mit der xz- und yz-Ebene die Punkte U und V gemein hat, schneidet sie die xz- und yz-Ebene in denjenigen Höhenlinien h_y und h_x, die durch U und V gehen und als Senkrechte h'_y und h'_x zur y- bzw. x-Achse erscheinen. Die Geraden h'_y und h'_x müssen sich auf der z-Achse treffen. Durch die Schnittpunkte von h_y und h_x mit der x- bzw. y-Achse geht die in der xy-Ebene gelegene Höhenlinie h_z der Höhenebene von P, und h'_z liegt senkrecht zur z-Achse. Nun wissen wir also, daß der Punkt P dieselbe Höhe über der Tafel T hat wie jeder Punkt der Geraden h_z. Betrachten wir insbesondere denjenigen Punkt Q von h_z, der im Bilde auf der Verlängerung der z-Achse liegt. Die Gerade OQ der xy-Ebene ist in Wahrheit zur z-Achse senkrecht. Bildet die z-Achse mit der Tafel T den Winkel γ (Nr. 50), so bildet also OQ mit ihr den Komplementwinkel von γ. Nun aber wird γ im Sinusmaßstab durch den Winkel des Strahls z mit der Lotrechten dargestellt (Nr. 63). Demnach hat OQ zur Tafel T dieselbe Neigung wie der z-Strahl des Sinusmaßstabes zur Wagerechten. Da OQ' die senkrechte Projektion von OQ ist, findet man also die wahre Länge von OQ, indem man OQ' auf der Wagerechten des Maßstabes vom Kreismittelpunkt $\mathfrak{O}$ aus abträgt und im Endpunkt das Lot errichtet, denn dies Lot schneidet auf dem z-Strahl die wahre Länge OQ ab. Weil Q, wie gesagt, gerade so

hoch über der Tafel T liegt wie der Punkt P, ist demnach die Höhe $P'P$ des Punktes P über der Tafel T gleich der Länge des soeben errichteten Lotes.

284. Anderes Verfahren zur Ermittlung der Höhen. Dieselbe Aufgabe läßt sich auch wie folgt lösen: Die Koordinaten x, y, z des Punktes P stellen sich in Fig. 402 verkürzt als die mit x', y', z' bezeichneten Strecken dar. Wenn die Achsen mit der Tafel die Winkel α, β, γ bilden (Nr. 50), ist also

$$x' = x\cos\alpha\,, \qquad y' = y\cos\beta\,, \qquad z' = z\cos\gamma\,.$$

Man denke sich nun in O das Lot a auf die Tafel T errichtet. Da der Punkt P senkrecht über der Stelle P' der Tafel liegt, ist die Höhe $P'P$ von P über der Tafel gleich der Strecke, die sich auf a ergibt, wenn man die Strecke OP senkrecht auf die Gerade a projiziert. Wir benutzen also die Gerade a als eine Achse, auf die wir die Punkte des Raumes senkrecht projizieren, wie es in Nr. 7 geschah. Mit R sei der Endpunkt der Koordinate x auf der x-Achse bezeichnet. Dann ist ORP_zPO ein räumliches geschlossenes Viereck, und nach

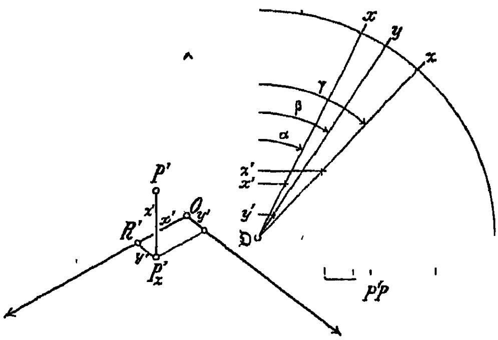


Fig. 402

Nr. 7 ist die Summe der senkrechten Projektionen seiner Seiten auf die Achse a gleich Null. Dabei ist der Achse a ein bestimmter Pfeilsinn zu geben, etwa nach oben, über der Tafel. Die positiven Achsen bilden dann mit a die Winkel $90° - \alpha$, $90° - \beta$, $90° - \gamma$, und da OR, RP_z, P_zP die Längen x, y, z haben, ist die Summe der senkrechten Projektionen der drei Seiten OR, RP_z, P_zP jenes räumlichen Vierecks auf die Achse a gleich

$$x\sin\alpha + y\sin\beta + z\sin\gamma$$

oder also nach dem Vorhergehenden gleich

$$x'\operatorname{tg}\alpha + y'\operatorname{tg}\beta + z'\operatorname{tg}\gamma$$

Ferner ist die Projektion der vierten Seite PO auf die Achse a entgegengesetzt gleich der Höhe $P'P$ des Punktes P über der Tafel T. Somit ergibt sich, weil die Summe der Projektionen gleich Null ist

$$P'P = x'\operatorname{tg}\alpha + y'\operatorname{tg}\beta + z'\operatorname{tg}\gamma\,.$$

Um auf Grund dieser Formel die Höhe $P'P$ von P zu konstruieren, haben wir zu beachten, daß die Winkel α, β, γ im Sinusmaßstab als die der Strahlen x, y, z mit der Lotrechten vorkommen. Wir tragen demnach die aus der vorliegenden Zeichnung zu entnehmenden Strecken x', y', z' von $\mathfrak{O}$ aus auf der Lotrechten ab und ziehen durch die Endpunkte die Wagerechten. Die mit x, y, z bezeichneten Strahlen des Maßstabes bestimmen auf diesen drei Wagerechten Strecken, die gleich

$x' \operatorname{tg}\alpha$, $y' \operatorname{tg}\beta$, $z' \operatorname{tg}\gamma$ sind. Mithin ist die Summe dieser drei Strecken die gesuchte Höhe $P'P$.

In Fig. 402 liegt ein Punkt P mit durchweg positiven Koordinaten x, y, z vor. Wäre eine der Koordinaten negativ, so würde die ihm entsprechende Strecke mit dem Minuszeichen zu versehen, also von der Summe der anderen abzuziehen sein. Bei gehöriger Beachtung der Vorzeichen ergibt sich überhaupt stets die gesuchte Höhe $P'P$ mit dem richtigen Vorzeichen, indem die Strecke negativ wird, wenn P unter der Tafel T gelegen ist.

285. Freie senkrechte Axonometrie. In Nr. 282 wurde die senkrechte axonometrische Darstellung eines Gegenstandes aus seinem Grundriß und Aufriß abgeleitet. Dagegen wird in der freien senkrechten Axonometrie die Aufgabe gestellt, die darzustellenden Gegenstände unmittelbar mit Hilfe der vorher entworfenen senkrechten Projektion des Achsenkreuzes $OXYZ$ in senkrechter Projektion auf die Tafel T abzubilden, ohne also auf den ursprünglichen Grundriß und Aufriß zurückzugehen.

Ein Punkt P des Raumes ist durch sein Bild P', siehe Fig. 402 der letzten Nummer, noch nicht vollständig bestimmt, vielmehr muß auch das Bild P'_z seiner senkrechten Projektion P_z auf die xy-Ebene gegeben sein (vgl. die allgemeine Bemerkung zu Fig. 209 in Nr. 147). Sind nun mehrere Punkte P, Q, R .. sowohl durch ihre Bilder P', Q', R' ... als auch durch die Bilder P'_z, Q'_z, R'_z ... ihrer senkrechten Projektionen auf die xy-Ebene gegeben, so ist man imstande, wie im ersten Kapitel alle auf sie bezüglichen Aufgaben zu lösen. Denn man kennt von den Punkten P, Q, R ... einerseits ihre senkrechten Projektionen P', Q', R' ... auf die Tafel T und kann andererseits nach Nr. 283 oder Nr. 284 auch ihre Höhen $P'P, Q'Q, R'R$ .. über der Tafel ermitteln, also den zugehörigen Höhenmaßstab (Nr. 8) herstellen, und das ist alles, was man braucht, um diejenigen Aufgaben zu lösen, die im ersten Kapitel behandelt wurden.

Als Beispiel sei die Aufgabe erwähnt, die wahre Länge einer Strecke PQ zu finden, wenn sowohl P', Q' als auch P'_z, Q'_z gegeben sind. Diese wahre Länge ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete die Strecke $P'Q'$ im Bild und dessen andere Kathete der Höhenunterschied von P und Q ist (Nr. 8). Da man die Höhen von P und Q nach Nr. 283 oder 284 ermitteln kann, läßt sich die Hypotenuse bestimmen. Zugleich ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck die Neigung der Geraden PQ gegenüber der Tafel T. Hierbei sei hervorgehoben, daß man der Höhen der Punkte P und Q selbst nicht bedarf, vielmehr ihren Höhenunterschied geradezu bestimmen wird. Das kann wie in voriger Nummer geschehen. An Stelle der dort mit x', y', z' bezeichneten Strecken auf den Bildgeraden der Achsen hat man nämlich in diesem Falle nur die Unterschiede zwischen den auf P und Q bezüglichen Abschnitten auf den Achsen zu benutzen. Dabei ist wohl zu beachten, ob diese Differenzen positiv oder negativ sind.

286. Der Kreis in freier senkrechter Axonometrie. Wir beschränken uns darauf, als einziges Beispiel zur freien senkrechten Axonometrie die

Aufgabe zu lösen, denjenigen Kreis darzustellen, dessen Mittelpunkt M und Achse MS gegeben ist und von dem außerdem der Radius r vorgeschrieben ist Die Punkte M und S sollen durch ihre axonometrischen Bilder M', S' und durch die Bilder M_z', S_z' ihrer senkrechten Projektionen auf die xy-Ebene gegeben sein, siehe Fig. 403.

Da es sich um eine senkrechte Projektion handelt, erscheint der gesuchte Kreis im Bild als eine Ellipse, deren Hauptachse gleich $2r$ ist und in M' auf $M'S'$ senkrecht steht (Nr. 88). Mithin kommt es nur noch auf die Ermittlung der Länge der Nebenachse an. Zu diesem Zwecke wird zunächst festgestellt, welche Neigung die Achse MS des Kreises zur Tafel T hat. Man braucht dazu nach voriger Nummer den Höhenunterschied von M und S Die Parallele zu $M_z'S_z'$ durch S' schneidet $M_z'M'$ in einem Punkte P', und $P'M'$ ist der Unterschied der auf M' und S' bezüglichen Strecken z' Er ist im vorliegenden Falle positiv, da $M_z'M' > S_z'S'$ ist. Die Parallelen zur y-Achse durch M_z' und S_z' schneiden auf der x-Achse die Differenz der Größen x' ab, sie ist ebenfalls positiv. Die Parallelen zur x-Achse durch M_z' und S_z' schneiden auf der y-Achse die Differenz der Größen y' ab, sie ist negativ Nach Nr. 284 werden die drei so ermittelten Differenzen auf der Lotrechten des Sinusmaßstabes abgetragen. Die durch ihre Endpunkte gezogenen Wagerechten bis zu den Strahlen x, y, z sind diejenigen Strecken, deren algebraische Summe den Höhenunterschied von M und S gegenüber der Tafel T darstellt. Hierbei ist zu beachten, daß die unterste Strecke negativ ist. Tragt man also die beiden positiven Strecken von M' aus nacheinander auf dem Lot zu $M'S'$ ab und vom Endpunkt aus rückwärts die dritte, negative Strecke, so kommt man zu einem Punkt (M), und dann ist $M'(M)$ der Höhenunterschied von M und S gegenüber der Tafel T, so daß $S'(M)$ zu $S'M'$ dieselbe Neigung hat wie SM zur Tafel T Derjenige Durchmesser des gesuchten Kreises, der die Nebenachse der Ellipse gibt, ist der steilste, d. h. seine Neigung zur Tafel ist die des in (M) auf $S'(M)$ errichteten Lotes gegenüber $S'M'$. Indem man also auf diesem Lot von (M) aus nach beiden Seiten r abträgt, bekommt man zwei Endpunkte, von denen man die Lote auf $S'M'$ fällt, um in den Fußpunkten der Lote die Endpunkte der Nebenachse zu erhalten.

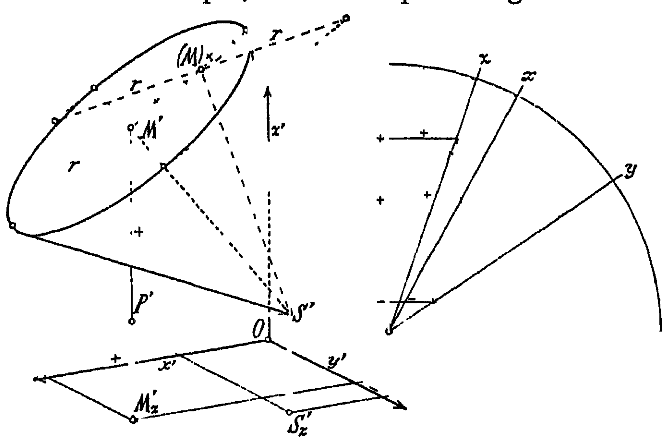


Fig 403

Wenn man noch, wie es in Fig. 403 geschehen ist, von S' aus die Tangenten an die Ellipse zieht, liegt die senkrechte Projektion eines geraden Kreiskegels vor. Was die Sichtbarkeit der Grundfläche betrifft, so ist zu beachten, daß der Höhenunterschied von M

und S positiv ausgefallen ist, daß also M höher als S über der Tafel T liegt. Folglich ist die Grundfläche des Kegels sichtbar.

287. Kreise in Ebenen parallel zu den Achsenebenen. Liegt ein Kreis vom Radius r in der xy-Ebene, so stellt er sich als eine Ellipse dar, deren Hauptachse eine Höhenlinie dieser Ebene und daher zur z-Achse im Bilde senkrecht ist. Dieser Durchmesser erscheint in wahrer Länge $2r$. Die Nebenachse der Ellipse ist das Bild des auf einer Falllinie der xy-Ebene gelegenen Durchmessers. Da die Falllinie mit der Tafel das Komplement des Winkels γ bildet, unter dem die z-Achse zur Tafel geneigt ist, findet man die Länge der halben Nebenachse, indem man r auf dem z-Strahl des Sinusmaßstabes abträgt und dann als verkürzte Strecke nicht den lotrechten Abstand vom Endpunkt bis zur Wagerechten, sondern den wagerechten Abstand vom Endpunkt bis zur Lotrechten benutzt.

Entsprechendes gilt, wenn es sich um die Darstellung eines Kreises handelt, der in der yz-Ebene oder in der zx-Ebene liegt, indem dann an die Stelle des z-Strahls der x-Strahl oder y-Strahl des Sinusmaßstabes tritt.

Dasselbe gilt auch für die Zeichnung eines Kreises, der nicht in einer Achsenebene, sondern in einer Ebene liegt, die zu einer Achsenebene parallel ist.

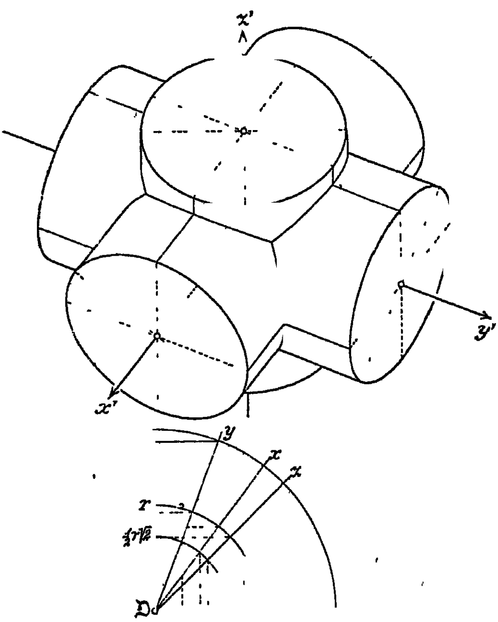


Fig. 404

So sind z. B. in Fig. 404 Kreise von gleichen Radien r dargestellt, deren Mittelpunkte auf den Achsen liegen und in Wahrheit gleiche Abstände von O haben, während die Ebenen der Kreise zu den Achsen senkrecht sind. Der Kreis um $\mathfrak{O}$ mit dem Radius r schneidet den x-Strahl, y-Strahl und z-Strahl in Punkten, deren wagerechte Abstände von der Lotrechten durch $\mathfrak{O}$ die halben Nebenachsen der Ellipsen sind. Diejenigen beiden Kreise, deren Mittelpunkte auf denselben Achsen liegen, können als die Endkreise eines Rotationszylinders aufgefaßt werden. So gehen drei Rotationszylinder hervor. Nach Nr. 140 schneiden sie sich zu je zweien in je zwei Ellipsen. In Fig. 404 ist die vollständige Durchdringung aller drei Zylinder gezeichnet, soweit sie sichtbar ist. Für die Durchdringungsellipsen, von denen immer nur Teile in Betracht kommen, kann man leicht konjugierte Durchmesser mit Hilfe derjenigen Durchmesser der Endkreise ermitteln, die zu den Achsen des Achsenkreuzes parallel sind. Zu je dreien stoßen die Ellipsenbogen in

einem Punkte zusammen, und in jedem Oktanten des Achsenkreuzes liegt ein derartiger Punkt; in Fig. 404 sind zwei von ihnen sichtbar. Diese Punkte kann man unabhängig von den Ellipsen so finden: Der Punkt im Hauptoktanten hat drei gleichgroße Koordinaten, und da er von allen drei Achsen die Entfernung r hat, sind seine Koordinaten gleich $\frac{1}{2}r\sqrt{2}$. Indem man also mit diesem Radius den Kreis um $\mathfrak{O}$ schlägt und die lotrechten Entfernungen der Schnittpunkte dieses Kreises mit dem x-, y- und z-Strahl bis zur Wagerechten durch $\mathfrak{O}$ abgreift, bekommt man die Längen der Koordinaten im Bilde, so daß man den Punkt einzeichnen kann.

288. Über die Vorzüge der Darstellungen in senkrechter Axonometrie. Man kann auf Grund des Vorhergehenden die sogenannten Grundaufgaben (Nr. 206) in freier senkrechter axonometrischer Darstellung erledigen. Ferner leuchtet ein, daß sich der Umriß einer Kugel in senkrechter Axonometrie immer als Kreis darstellt, und man vermag auch die auf die Kugel bezüglichen Aufgaben der Stereometrie axonometrisch zu behandeln. Wie der Kreis abzubilden ist, wurde in den letzten Nummern gezeigt. Die Gesamtheit der Aufgaben, die sich auf Kegel und Zylinder beziehen, sowie auch die Aufgaben der Schattenkonstruktion kann man daher ebenfalls in freier senkrechter Axonometrie lösen. Wir beabsichtigen jedoch nicht, hierauf näher einzugehen. Es mag genügen, daß in Nr. 283 und 284 gezeigt wurde, wie man für jeden axonometrisch gegebenen Punkt P, sobald auch der Fußpunkt P_z des Lotes von ihm auf der xy-Ebene vorliegt, die Höhe über der durch den Anfangspunkt des Achsenkreuzes gelegt gedachten Tafel T ermitteln kann. Denn dadurch gelangt man zu allen denjenigen Angaben, die nötig sind, um die vorhin erwähnten Aufgaben wie im ersten Kapitel durchzuführen, wie schon in Nr. 285 gesagt wurde.

Dagegen seien noch einige Bemerkungen über die Vorzüge der Darstellungen in senkrechter Axonometrie angefügt. Will man von einem Gegenstand ein Bild gewinnen, das auf den Beobachter möglichst denselben Eindruck wie der Gegenstand selbst macht, so kann man entweder verlangen, daß dieser Eindruck entstehe, sobald man das Bild von einer ganz bestimmten Stelle des Raumes aus, vom sogenannten Augenpunkt her, betrachtet oder sobald man das Bild aus so weiter Ferne ansieht, daß die nach ihm gehenden Sehstrahlen als parallel aufgefaßt werden dürfen. Das Bild für den zuerst genannten Fall zu entwerfen, wo man also das Auge an einer bestimmten Stelle gegenüber der Tafel annimmt, ist Sache der Zentralprojektion oder Perspektive, und diesen Fall werden wir im zweiten Band ausführlich behandeln. Hier sei nur das eine bemerkt, daß sich dann ergeben wird, daß solche Geraden des Gegenstandes, die zueinander parallel sind, in diesem Fall im Bilde im allgemeinen nicht mehr parallel zueinander erscheinen. Das ist zwar für künstlerische Zeichnungen, wie man später sehen wird, durchaus vorteilhaft, aber für technische Zeichnungen (Nr. 1) bedenklich. Bei technischen Gegenständen, wie z. B. Maschinen, kommt es so sehr auf die gegenseitige Lage der einzelnen Teile an, daß man nur ungern diejenigen Kanten der Gegenstände, die in Wahrheit parallel sind, im Bild nicht mehr parallel darstellen wird. Deshalb ver-

zichtet man hier auf die Anwendung der Zentralprojektion. Dann aber handelt es sich darum, eine **Parallelprojektion** herzustellen Zweifellos ist nun diejenige **Parallelprojektion, bei der die projizierenden Strahlen zur Tafel senkrecht sind, die natürlichste**, denn wenn man eine Zeichnung betrachtet, bringt man sie allemal unwillkürlich in eine derartige Lage, daß man senkrecht auf sie blickt. Somit wird man die senkrechte Projektion bevorzugen. Nun weisen die technischen Gegenstande fast immer drei ausgezeichnete zueinander senkrechte Ebenen auf, ihre wagerechte Grundebene und zwei lotrechte Ebenenstellungen in ihrer Länge und Breite. Deshalb ist der Grundriß und Aufriß eines technischen Gegenstandes besonders bequem zu zeichnen, wenn man die Grundrißtafel als die wagerechte Grundebene des Gegenstandes benutzt und die Aufrißtafel parallel zu einer Seitenwand des Gegenstandes annimmt. So z. B. besteht die in dieser Weise herzustellende Abbildung eines Würfels einfach aus einem Quadrat in der Grundrißebene und einem Quadrat in der Aufrißebene. Aber gerade das Bequeme einer derartigen Zeichnung ist das Mißliche für das Erkennen ihrer räumlichen Bedeutung. Denn infolge der für die Tafeln getroffenen Wahl sieht man im Grundriß alle lotrechten Ebenen nur als Geraden und im Aufriß alle wagerechten Ebenen sowie alle zur Breite der Gegenstande senkrechten Ebenen nur als Geraden. Demnach geht der korperliche Eindruck vieler Seitenwände im Bilde verloren. Wir haben schon in Nr. 105 hierauf hingewiesen. Damals benutzten wir als Auskunftsmittel die **Kavalierperspektive**, also eine schiefe Parallelprojektion. So einfach ihre Herstellung ist, leidet sie doch an dem erheblichen Übelstand, daß man sie in schrager Richtung betrachten muß

Man kommt demnach auf die Forderung zurück, eine senkrechte Projektion des technischen Gegenstandes zu entwerfen, aber nicht auf eine Tafel, die wagerecht oder zu einer der ausgezeichneten Ebenen, namlich zu einer Seitenebene des Gegenstandes, parallel ist, sondern eine ganz allgemeine Lage hat Die senkrechte Projektion auf eine Tafel, die gegenüber dem Gegenstande allgemeine Lage hat, geradezu auszuführen, ist aber meistens mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden. Der Nutzen der senkrechten Axonometrie besteht nun, wie schon in Nr 282 gezeigt wurde, darin, daß sie gestattet, auf durchaus mechanischem Weg aus dem Grundriß und Aufriß für den Fall besonders bequem gelegter Grundriß- und Aufrißtafeln die senkrechte Projektion des Gegenstandes auf eine Tafel T von ganz beliebiger Lage abzuleiten.

Die Anwendung der senkrechten Axonometrie liefert also die am meisten befriedigende Darstellung von technischen Gegenstanden.

* Anmerkung. William Farish (geb. 1759 in Carlisle, Professor an der Universitat Cambridge, gest 1837 in Little-Stoneham) trat eifrig fur die Anwendung der senkrechten Axonometrie in dem allerdings sehr einfachen Fall auf, wo alle drei Achsen gleiche Neigung zur Tafel T haben, d h. wo die Tafel T durch die Endpunkte X, Y, Z der drei gleichlangen und zueinander senkrechten Achsen OX, OY, OZ geht. Dies Verfahren heißt insbesondere die isometrische Projektion und war gelegentlich schon früher benutzt worden; aber Farish forderte seine systematische Anwendung, um aus dem Grundriß und Aufriß eine besser korperlich wirkende senkrechte Projektion zu gewinnen. Siehe die Abhandlung „On isometrical perspective“, Transactions of the Cambridge Philosoph. Society 1 Bd. 1822, S. 1 u. f Dann trat Otto Mollinger (geb. 1814 in Speier, Professor in Solothurn, gest. 1886 in Fluntern bei Zurich) in seiner

„Isometrischen Projektionslehre“, Solothurn 1840, für die senkrechte Axonometrie mit nur zwei im Bilde gleichlangen Achsen ein. Nachdem Julius Weisbach die Gesetze der allgemeinen senkrechten Axonometrie entwickelt hatte (Nr 62), widmete Martin Hermann Meyer (geb 1824 zu Freiberg i. S., Lehrer an der öffentl. Handelslehranstalt in Leipzig, gest 1856 in Leipzig) sowohl die Programmschrift „Über Axonometrie, d i. die Darstelluhg der Körper in geneigter Lage mit Hilfe eines Achsensystems“, Leipzig 1850, als auch zusammen mit seinem Bruder Karl Theodor Meyer das umfangreiche „Lehrbuch der axonometrischen Projektionslehre“, Leipzig 1855—63, den Vorzügen der senkrechten Axonometrie Dies weitschweifige Lehrbuch ist aber in fast unerträglicher Weise mit allzu vielen unwesentlichen Dingen belastet Weiterhin trat Quintino Sella (geb 1827 in Mosso bei Biella, Professor am Istituto tecnico zu Turin, später italienischer Finanzminister und Präsident der neu begründeten Accademia dei Lincei in Rom, gest 1884) für die Benutzung der senkrechten Axonometrie ein mit der Schrift· „Sui principii geometrici del disegno e specialmente dell' axonometrico, dalle lezioni di geometria applicata“ aus dem Jahre 1856, die, wie es scheint, nicht in den Buchhandel gekommen ist, von der aber eine Übersetzung „Über die geometrischen Prinzipien des Zeichnens, insbesondere über die der Axonometrie“ von Maximilian Curtze (Nr 84) im Archiv d Math u. Phys 43 Teil 1865, S 245—289, vorliegt

Indem wir eine Reihe von Arbeiten in derselben Richtung übergehen, erwähnen wir, daß Carl Pelz (geb 1845 in Belec, Professor an der technischen Hochschule Graz, dann an der böhmischen technischen Hochschule Prag, gest 1909) in zwei Abhandlungen „Zur wissenschaftlichen Behandlung der orthogonalen Axonometrie“, Sitzungsberichte der mathem -naturw Klasse der Akademie der Wissensch zu Wien, Abt II, Bd 81, 1880, S 300—330, und Bd 83, 1881, S 375—384, systematisch die Lösung der Grundaufgaben (Nr 206) in freier senkrechter Axonometrie in Angriff genommen hat Als neuestes Lehrbuch sei das Werk „Orthogonale Axonometrie“, Leipzig und Berlin 1905, von Rudolf Schüßler, Professor an der technischen Hochschule Graz, genannt

289. Übungen. 1) Die Schnittpunkte einer Ebene mit den Achsen seien in senkrechter Axonometrie gegeben Gesucht der Fußpunkt des Lotes vom Anfangspunkt O auf die Ebene Das Lot erscheint im Bilde senkrecht zu den Höhenlinien der Ebene Diese Höhenlinie findet man durch den Schnitt der Ebene mit einer Höhenebene (Nr. 283) Um den Fußpunkt des Lotes zu bestimmen, benutze man als Hilfsebene die durch das Lot und die z-Achse, sie schneidet die xy-Ebene in einer Senkrechten zu derjenigen Geraden s, in der die gegebene Ebene die xy-Ebene trifft, aber diese Senkrechte erscheint im Bilde nicht als Senkrechte Man kennt jedoch in der xy-Ebene zwei Paare von in Wahrheit zueinander senkrechten Richtungen, nämlich die x- und y-Achse sowie die Höhenlinie und Fallinie der xy-Ebene durch O Infolgedessen kann man auch die zu s senkrechte Gerade durch O ermitteln (Nr 183).

2) Die Entfernung einer durch ihre Schnittpunkte mit den Achsen gegebene Ebene vom Anfangspunkt O zu ermitteln.

3) Eine Kugel berühre die xy-Ebene in einem gegebenen Punkt Ihr Mittelpunkt werfe auf die xy-Ebene einen gegebenen Schatten. Gesucht der Eigenschatten und Schlagschatten der Kugel (Nr. 286) in senkrechter Axonometrie.

4) In senkrechter Axonometrie soll der elliptische Schnitt eines Rotationskegels mit einer Ebene dargestellt werden Auch sollen die Kugeln gezeichnet werden, die zur Ermittlung der Brennpunkte der Schnittellipse dienen (Nr. 77).

Stichwörter.

Die Zahlen bedeuten die Nummern des Buches, eingeklammerte beziehen sich auf Anmerkungen. Allzu häufig vorkommende Begriffe sind nur da angemerkt, wo sie zuerst auftreten, und da, wo ihnen eine besondere Bedeutung zukommt. Viele Begriffe sind aus Gründen der Raumersparnis nur einmal angegeben, und zwar da, wo sie nach dem Sprachgebrauch hingehoren. So findet man z. B. die Durchdringung von Pyramiden nur unter dem Stichwort Durchdringung und nicht unter dem Stichwort Pyramiden.

Druck der Spamerschen Buchdruckerei in Leipzig.

Manuldruck von F. Ullmann G. m. b. H., Zwickau Sa.